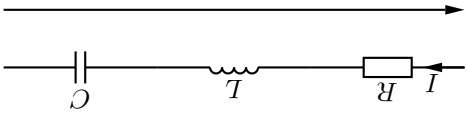


Étude de quelques aspects du phénomène de

résonance

Partie I – Étude d'un circuit RLC

I.A Résonance série



$$E = E_0 \cos \omega t$$

I.A.1) L'impédance complexe $\underline{Z}_S$ de ce dipôle s'écrit :

$$\underline{Z}_S = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = R \left[1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right] \tag{I.1}$$

où $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ et $Q = \frac{R}{L\omega_0}$.
I.A.2) On en déduit :

$$Z_S = |\underline{Z}_S| = R \sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2} \tag{I.2}$$

Avec les notations complexes, on a : $\overline{E} = \underline{Z}_S \underline{I}$. Par conséquent, $\arg(\overline{E}) = \arg(\underline{Z}_S) + \arg(\underline{I})$. On en déduit que $\varphi = \arg(\overline{E}) - \arg(\underline{I}) = \arg(\underline{Z}_S)$. D'où le résultat suivant :

$$\tan \varphi = Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \tag{I.3}$$

avec $\cos \varphi \gtrless 0$, soit $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

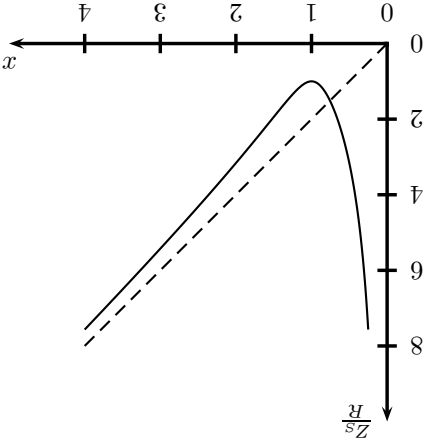
Correction proposée par François Vandenbrouck (francois.vandenbrouck@prepas.org)

I.A.3) On a :

$$\frac{R}{Z_S} = \sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2} \tag{I.4}$$

- Pour $x \gg 1$: $\frac{R}{Z_S} \sim \frac{x}{Q}$.
- Pour $x \gg 1$: $\frac{R}{Z_S} \sim Qx$.
- Pour $x = 1$: $\frac{R}{Z_S} = 1$.

D'où le graphe suivant (où $Q = 2$; on a représenté en pointillés l'asymptote d'équation $\frac{R}{Z_S} = Qx$) :



I.A.4) L'amplitude de l'intensité du courant qui traverse le dipôle s'écrit :

$$I_0 = \frac{E_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \tag{I.5}$$

Le maximum de I_0 est réalisé lorsque le dénominateur est minimum, c'est-à-dire lorsque Z_S est minimum. Vu le graphe tracé précédemment, on peut conclure que I_0 est maximum

lorsque $x = 1$, soit $\omega = \omega_0$. On obtient alors :

$$I_{0\max} = \frac{E_0}{R} . \quad (L.6)$$

L'équation L.5 peut être écrite sous la forme :

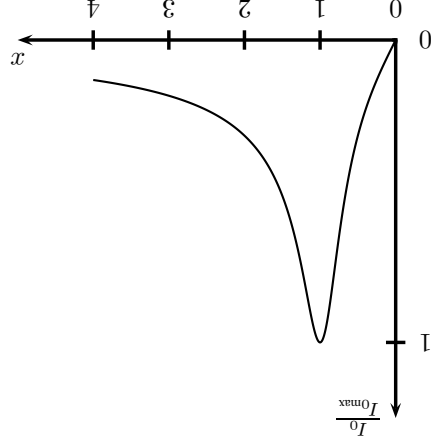
$$\frac{I_{0\max}}{I_0} = \frac{\sqrt{1 + Q^2} \left(x - \frac{x}{2}\right)}{1} . \quad (L.7)$$

Le comportement asymptotique de $\frac{I_{0\max}}{I_0}$ est le suivant :

$$\bullet \text{ Pour } x \gg 1 : \frac{I_{0\max}}{I_0} \sim \frac{Q}{x} .$$

$$\bullet \text{ Pour } x \gg 1 : \frac{I_{0\max}}{I_0} \sim \frac{1}{1} .$$

D'où le graphe suivant ($Q = 2$) :



$$\bullet \text{ Pour } x \gg 1 : \tan \varphi \sim -\frac{Q}{x}, \text{ soit } \varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2} .$$

$$\bullet \text{ Pour } x \gg 1 : \tan \varphi \sim Qx, \text{ soit } \varphi \rightarrow \frac{\pi}{2} .$$

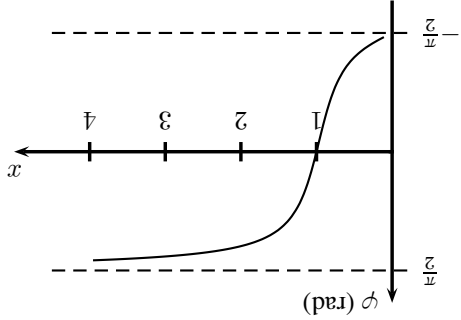
$$\bullet \text{ Pour } x = 1 : \tan \varphi = 0, \text{ soit } \varphi = 0 .$$

On a $\tan \varphi = Q(x - \frac{1}{x})$ et $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, ce qui donne :

$$(L.8)$$

$$(L.7)$$

D'où le graphe suivant (avec $Q = 2$) :



L.A.5) On a $\frac{I_{0\max}}{I_0} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ lorsque $Q^2(x - \frac{1}{x})^2 = 1$, soit pour $Q(x - \frac{1}{x}) = \pm 1$, ce qui conduit aux deux équations du second degré suivantes : $x^2 \pm \frac{Q}{x} - 1 = 0$. On ne retient que les racines positives de ces deux équations. Il vient :

$$x_1 = -\frac{2Q}{1} + \sqrt{1 + \frac{4Q^2}{1}} , \quad (L.8)$$

$$x_2 = \frac{2Q}{1} + \sqrt{1 + \frac{4Q^2}{1}} . \quad (L.9)$$

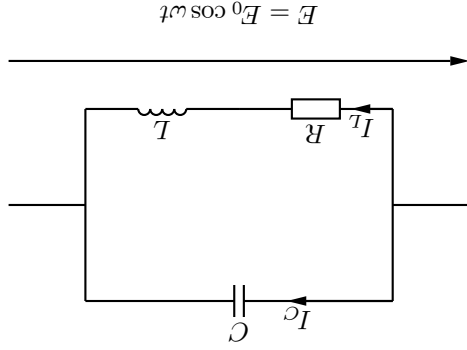
On en déduit l'acuité A de la résonance $A = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = x_2 - x_1 = \frac{Q}{1}$.

Les valeurs correspondantes de la phase φ pour les deux pulsations réduites x_1 et x_2 sont :

$$\tan \varphi_1 = \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + 4Q^2} \right) - \frac{-1 + \sqrt{4Q^2 + 1}}{2Q^2} = -1 , \quad (L.10)$$

$$\tan \varphi_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + 4Q^2} \right) - \frac{1 + \sqrt{4Q^2 + 1}}{2Q^2} = 1 . \quad (L.11)$$

On a par conséquent $\varphi_1 = -\frac{\pi}{4}$ et $\varphi_2 = \frac{\pi}{4}$.

I.B Résonance parallèle

I.B.1) Posons $\underline{Z}_L = R + jL\omega$ et $\underline{Y}_C = jC\omega$. L'impédance complexe du dipôle étudié s'écrit : $\underline{Z}_P = \frac{\underline{Z}_L}{1 + \underline{Y}_C \underline{Z}_L}$. On en déduit le résultat demandé :

$$(I.12) \quad \underline{Z}_P = \frac{R + jL\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}.$$

I.B.2) On peut remarquer que $\underline{Z}_S = \underline{Z}_L + \frac{\underline{Y}_C}{1}$, d'où : $1 + \underline{Y}_C \underline{Z}_L = \underline{Y}_C \underline{Z}_S$. Par ailleurs, on peut écrire : $\underline{Z}_L = R + jL\omega = R \left(1 + jQ \frac{\omega}{\omega_0} \right)$. En reportant ces résultats dans l'expression de $\underline{Z}_P$, on trouve :

$$(I.13) \quad \underline{Z}_P = \frac{R \left(1 + jQ \frac{\omega}{\omega_0} \right)}{jC\omega \underline{Z}_S}.$$

I.B.3) Dans la limite où $Q \gg 1$ et $Q \frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$, on trouve $\underline{Z}_P \approx \frac{Q}{R} \frac{C\omega_0 \underline{Z}_S}{j}$, soit $\underline{Z}_P \approx Q^2 \frac{R^2}{\underline{Z}_S}$.
 I.B.4) Pour $\omega = \omega_0$, on a $\underline{Z}_S = R$. Alors $\underline{Z}_P = Q^2 R$ en utilisant la formule approchée. Comme $Q \gg 1$, on en déduit que $|\underline{Z}_P| \gg R$. Il en résulte que le dipôle s'oppose au passage du courant électrique. On parle de circuit bouchon.

I.B.5) On obtient l'intensité du courant traversant le condensateur en écrivant : $\underline{I}_C = \underline{Y}_C \underline{E}$ où $\underline{I}_C$ et $\underline{E}$ désignent les amplitudes complexes de I_C et E . Ceci donne : $\underline{I}_C = C\omega_0 E_0 \exp(-j\frac{z}{2})$. D'où :

$$(I.14) \quad I_C(t) = \frac{E_0}{R} Q \cos\left(\omega_0 t - \frac{z}{2}\right).$$

I. N'aurait-il pas mieux valu appeler ce rapport amplification et non gain...

Partie II – Étude d'un montage électronique

À la résonance (dans l'hypothèse où $Q \gg 1$), les deux branches présentent la même impédance et l'intensité du courant qui circule dans chacune des deux branches est la même et elle est particulièrement faible : le dipôle est un «circuit bouchon».

$$(I.15) \quad I_L(t) = \frac{E_0}{R} Q \cos\left(\omega_0 t - \frac{z}{2}\right).$$

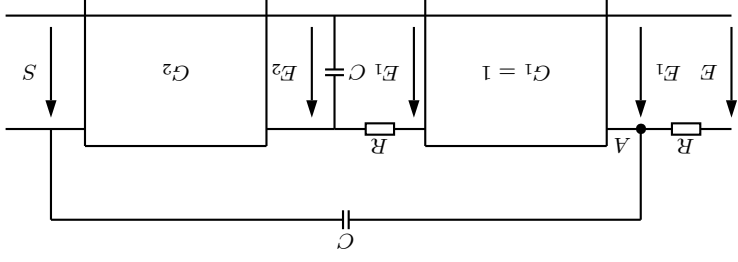
De même, on écrit : $\underline{I}_L = \underline{Y}_L \underline{E}$ avec $\underline{Y}_L = \frac{R + jL\omega}{1}$. D'où : $\underline{I}_L = \frac{R(1+jQ)}{R(1+jQ)}$. En écrivant $\frac{1}{1+jQ} = \frac{\sqrt{1+Q^2}}{1} \exp(j\psi)$ avec $\tan \psi = -Q$ et $-\frac{z}{2} \leq \psi \leq -\frac{z}{2}$, on obtient : $I_L(t) = \frac{E_0}{R} \sqrt{1+Q^2} \cos(\omega_0 t + \psi)$. Dans la limite où $Q \gg 1$, $\psi \rightarrow -\frac{z}{2}$ et l'expression de $I_L(t)$ se simplifie en :

$$(II.16) \quad \frac{V_E}{V_S} = 1 + \frac{P}{Q}.$$

II.A - Le montage proposé est celui d'un amplificateur non inverseur. L'amplificateur opérationnel est supposé idéal : on en déduit que $I_E = I_+ = 0$ et $I_- = 0$ et fonctionne en régime linéaire, par conséquent $V_+ = V_-$. Cette dernière relation implique que la tension d'entrée V_E se retrouve aux bornes de la résistance P . Comme $I_- = 0$, les résistances P et Q , associées en série, constituent un pont diviseur de tension. On en déduit immédiatement que : $V_E = \frac{P+Q}{V_S} V_S$. On en déduit la valeur du rapport $\frac{V_E}{V_S}$:

II.B - Selon le schéma proposé, on peut écrire : $V_E = R_E I_E$ et $V_S = GV_E - R_S I_S$. Comme I_E est toujours nul (amplificateur idéal) quelle que soit la valeur de V_E , on en déduit que $R_E = 0$. En identifiant la relation II.16 avec $V_S = GV_E - R_S I_S$, on trouve que le gain $G = 1 + \frac{P}{Q}$ et $R_S = 0$.

II.C - On étudie l'amplificateur représenté ci-dessous.



On définit $\overline{Y}_C = j\frac{C}{x}\omega$.

II.C.1) On a les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\overline{S} &= G_2 \overline{E_2}, \\ \overline{E_2} &= \frac{\overline{Z}_C}{\overline{Z}_R + \overline{Z}_C} \overline{E_1} = \frac{1}{\overline{E_1} + \overline{Y}_C \overline{Z}_R}.\end{aligned}$$

On écrit aussi le théorème de Millmann au point A :

$$\overline{E_1} = \frac{\overline{E}}{\frac{\overline{Z}_C}{S} + \frac{\overline{Z}_R}{1} + \frac{\overline{Z}_C}{S}}.$$

ce qui conduit à :

$$\overline{E_1} = \frac{\overline{E} + \overline{Y}_C \overline{Z}_R \overline{S}}{1 + \overline{Y}_C \overline{Z}_R \overline{S}}.$$

Or $\overline{Y}_C \overline{Z}_R = jx$. D'où :

$$\begin{aligned}\overline{S} &= G_2 \overline{E_2}, & \text{(II.17)} \\ \frac{\overline{E_2}}{\overline{E_1}} &= \frac{1 + jx}{\overline{E_1}}, & \text{(II.18)} \\ \overline{E_1} &= \frac{1 + jx}{\overline{E} + jx \overline{S}}. & \text{(II.19)}\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\overline{S} = \frac{G_2}{(1 + jx)^2} (\overline{E} + jx \overline{S}).$$

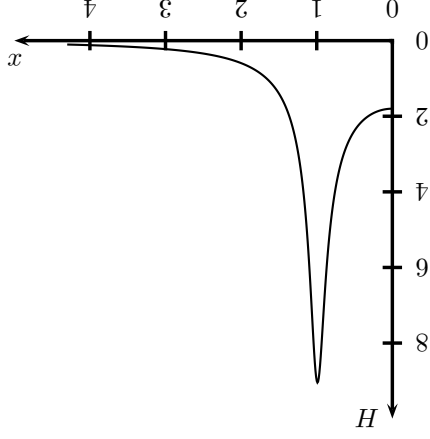
On obtient alors la fonction de transfert $\overline{H}$:

$$\overline{H} = \frac{\overline{S}}{\overline{S}} = \frac{1 - x^2 + jx(2 - G_2)}{G_2} \quad \text{(II.20)}$$

II.C.2) Le module H de la fonction de transfert s'écrit :

$$H = \frac{G_2}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + x^2(2 - G_2)^2}} \quad \text{(II.21)}$$

H est extremum lorsque $(1 - x^2)^2 + x^2(2 - G_2)^2$ est extremum, ce qui est réalisé lorsque $4x(-1 + x^2 + \frac{1}{2}(2 - G_2)^2) = 0$, soit $x = 0$ ou $x^2 = 1 - \frac{1}{2}(2 - G_2)^2$. Cette deuxième solution donne la valeur maximale de $H : H_{\max} \approx \frac{2}{2 - G_2}$. La pulsation réduite correspondante est $x = \sqrt{1 - \frac{1}{2}(2 - G_2)^2} \approx 1$, ce qui correspond à $\omega = \omega_0$.



Le graphe correspondant est le suivant (obtenu pour $G_2 = 1,8$) :

- Pour $x \gg 1$, $H \sim \frac{x^2}{G_2}$.
- Pour $x \ll 1$, $H \sim G_2$.

II.C.3) Le comportement asymptotique de H est le suivant :

On en déduit l'acuité A de la résonance : $A = x_2 - x_1 = \varepsilon^2 = (2 - G_2)^2$. On constate que pour faire facilement varier l'acuité de la résonance, il suffit de modifier le « gain » G_2 .

$$x_2 = 1 + \frac{1}{4}\varepsilon^2 \quad \text{(II.23)}$$

$$x_1 = 1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 \quad \text{(II.22)}$$

Les deux pulsations réduites de coupure à -3dB, x_1 et x_2 sont telles que $H(x_i) = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}$. On doit donc résoudre l'équation : $(1 - x^2)^2 + (2 - G_2)^2 x^2 = 2(2 - G_2)^2$. Posant $X = x^2$ et $\varepsilon = 2 - G_2 > 0$, on se ramène à une équation du second degré : $X^2 + (\varepsilon^2 - 2)X + 1 - 2\varepsilon^2 = 0$. Dans la limite où $\varepsilon \ll 1$, on trouve les deux valeurs de x_1 et x_2 au second ordre en ε , correspondant aux racines carrées des racines de l'équation précédente :

$$H = \frac{H_{\max} \sqrt{\frac{(1 - x^2)^2}{2} + x^2}}{(2 - G_2)^2}.$$

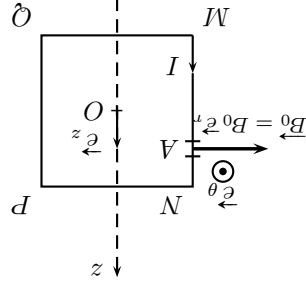
Écrivons H sous la forme suivante :

II.C.4) La fonction de transfert $\underline{H}$ que nous venons de calculer est celle d'un filtre passe-bas du second ordre. Avec les valeurs numériques proposées $\omega_0 = 10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, ce qui correspond à la fréquence $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 1,6 \text{ Hz}$. Le signal en crêteaux considéré a une fréquence de 1000 Hz : toutes les composantes de Fourier de ce signal sont dans la bande atténuée (fréquences multiples de 1000 Hz) à l'exception de la composante de fréquence nulle correspondant à la valeur moyenne du signal, qui se trouve dans la bande passante. Par conséquent, vu les valeurs numériques choisies, on a, en régime établi : $\langle S(t) \rangle = \langle E \rangle^T = \frac{1}{T} \int_0^T E(t) dt$. On obtient :

$$S(t) = \frac{1}{T} \int_0^T E(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T E_0 dt = aE_0 \quad (\text{II.24})$$

Application numérique : $S = 0,2 \text{ V}$.

Partie III – Oscillations d'une bobine dans un champ magnétique



On utilise la base des coordonnées cylindriques $(\vec{0}; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. Le courant est compté positivement dans le sens de la flèche figurant sur le schéma ci-dessus.

III.A - Considérons un élément de longueur $d\vec{l} = dz \vec{e}_z$, centré au point A (cf. figure ci-dessus). Il est parcouru par un courant I . La force de Laplace qui s'exerce sur cet élément de courant s'écrit : $d\vec{f} = Idz \vec{e}_z \wedge \vec{B}_0 = B_0 Idz \vec{e}_\theta$. On peut ensuite calculer le moment de cette force élémentaire par rapport au point O : $d\vec{M}_O = \vec{OA} \wedge d\vec{f}$. On trouve $d\vec{M}_O = -B_0 Idz dz \vec{e}_r + B_0 I \frac{z}{2} dz \vec{e}_z$. Le moment résultant s'obtient en intégrant sur toute la longueur du côté MN :

$$\vec{M}_O = -B_0 I \int_{-a/2}^{a/2} z dz \vec{e}_r + \frac{1}{2} B_0 I a \int_{-a/2}^{a/2} dz \vec{e}_z = \frac{1}{2} B_0 I a^2 \vec{e}_z$$

Comme la bobine est constituée de N spires, le moment total des efforts de Laplace s'exerçant sur le côté MN s'écrit donc :

$$\vec{M}_{MN} = \frac{2}{N} B_0 I a^2 \vec{e}_z \quad (\text{III.25})$$

Le moment des efforts de Laplace s'exerçant sur le côté PQ est le même que celui que l'on vient de calculer, car, sur le côté PQ, à la fois le champ magnétique $\vec{B}_0$ et le courant I changent de sens. Par ailleurs, les efforts de Laplace subis par les côtés NP et MQ sont nuls car le champ magnétique y est colinéaire au courant électrique. Il en résulte que le moment, en O, des efforts de Laplace s'exerçant sur la bobine s'écrit :

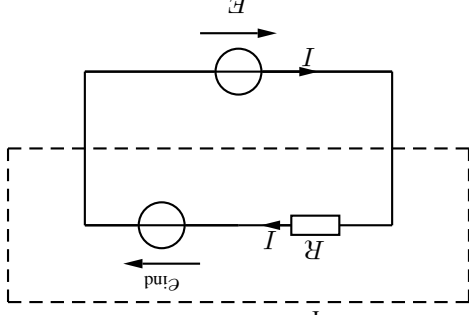
$$\vec{M}_{\text{Laplace}} = N B_0 I a^2 \vec{e}_z \quad (\text{III.26})$$

On écrit ensuite le théorème du moment cinétique, appliqué à la bobine, dans le référentiel galiléen défini dans l'énoncé. En projection sur l'axe (Oz), on obtient :

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -k\theta + N B_0 I a^2 \quad (\text{III.27})$$

III.B - Pour calculer la force électromotrice d'induction, le plus simple est d'utiliser le bilan énergétique : $P_{\text{Laplace}} + e_{\text{ind}} I = 0$, où P_{Laplace} désigne la puissance des efforts de Laplace. On a : $P_{\text{Laplace}} = \vec{M}_{\text{Laplace}} \cdot \dot{\vec{\Omega}} = \vec{M}_{\text{Laplace}} \cdot \theta \dot{\vec{e}}_z$, où $\dot{\vec{\Omega}} = \theta \dot{\vec{e}}_z$ est le vecteur rotation de la bobine. On trouve : $P_{\text{Laplace}} = N B_0 I a^2 \dot{\theta}$. On en déduit la force électromotrice d'induction :

$$e_{\text{ind}} = - \frac{P_{\text{Laplace}}}{I} = - N B_0 a^2 \dot{\theta} \quad (\text{III.28})$$



On obtient (loi d'Ohm généralisée) : $E = RI - e_{\text{ind}}$, ce qui conduit à :

$$I = \frac{E}{R} - \frac{E}{N B_0 a^2} \dot{\theta}. \quad (\text{III.29})$$

III.C - On pose $\phi_0 = N a^2 B_0$. Pour obtenir l'équation différentielle vérifiée par θ , il faut éliminer I entre les équations III.27 et III.29. On obtient :

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -k\theta + \phi_0 \left(\frac{E}{N B_0 a^2} - \frac{R}{\phi_0} \right), \quad (\text{III.30})$$

$$= -k\theta + \frac{R}{\phi_0} E_0 \cos \omega t - \frac{R}{\phi_0} \theta. \quad (\text{III.31})$$

Finalement, il vient :

$$J \ddot{\theta} + h\dot{\theta} + k\theta = s \cos \omega t, \quad (\text{III.32})$$

avec $h = \frac{R}{\phi_0^2}$ et $s = \frac{R}{\phi_0 E_0}$. On constate que, conformément à la loi de Lenz, le moment des efforts de Laplace s'oppose au mouvement de la bobine.

III.D - On pose $\omega_0^2 = k/J$, $2\varepsilon\omega_0 = h/J$ et $D = s/k$. En divisant l'équation III.32 par J , on obtient :

$$\ddot{\theta} + 2\varepsilon\omega_0 \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \omega_0^2 D \cos \omega t \quad (\text{III.33})$$

L'homogénéité de chacun des termes fait que ω_0 est homogène à l'inverse d'un temps, et se mesure en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$, ε et D sont sans dimension.

III.E - On recherche une solution de la forme $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t - \varphi)$. On utilise la représentation complexe $\bar{\theta} = \theta_0 \exp[j(\omega t - \varphi)]$. On définit aussi l'amplitude complexe de $\theta(t)$: $\bar{\theta}_0 = \theta_0 \exp(-j\varphi)$. La représentation complexe de $\omega_0^2 D \cos \omega t$ est $\omega_0^2 D \exp(j\omega t)$. L'équation III.33 se ramène alors à une équation algébrique dans $\mathbb{C}$:

$$-\omega^2 \bar{\theta}_0 + 2j\varepsilon\omega_0 \omega \bar{\theta}_0 + \omega_0^2 \bar{\theta}_0 = \omega_0^2 D, \quad (\text{III.34})$$

d'où l'on tire l'expression de $\bar{\theta}_0$:

$$\bar{\theta}_0 = \frac{\omega_0^2 D}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2j\varepsilon\omega\omega_0}. \quad (\text{III.35})$$

L'amplitude θ_0 des oscillations est obtenue en calculant le module de $\bar{\theta}_0$:

$$\theta_0 = \frac{D}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 4\varepsilon^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}, \quad (\text{III.36})$$

$$\frac{\theta_0}{\theta_0} = \frac{D}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 4\varepsilon^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}, \quad (\text{III.37})$$

On rappelle l'expression de H :

$$H = \frac{G_2}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} (2 - G_2)^2}}.$$

Ce sont en fait les expressions de θ_0/D et H/G_2 qui ont la même structure mathématique. La quantité $(2 - G_2)$ intervenant dans l'expression de H est alors l'analogue de 2ε . Le montage électronique étudié dans la partie II est un filtre passe-bas, la bobine étudiée ici est aussi un filtre passe-bas (le signal d'entrée est de nature électrique : tension $E(t)$; le signal de sortie est mécanique : déviation angulaire $\theta(t)$).

III.F - Ayant vu l'analogie entre H/G_2 et θ_0/D , on peut utiliser les résultats précédemment trouvés pour H . On sait que la résonance intervient pour le montage électronique pour $\omega \approx \omega_0$. Il en est donc de même pour la bobine. Ceci permet d'obtenir l'expression approchée de l'amplitude maximale des oscillations :

$$\theta_{0\max} = \frac{2\varepsilon}{D}. \quad (\text{III.38})$$

L'acuité de la résonance a été calculée pour le montage électronique : $A = (2 - G_2)^2$. On peut immédiatement en déduire l'expression de l'acuité de la résonance de la bobine :

$$A = 4\varepsilon^2. \quad (\text{III.39})$$

III.G - III.G.1) Avec les valeurs numériques proposées, on trouve : $\theta_{0\max} = 0,5 \text{ rad}$, ce qui correspond à près de 29° .

III.G.2) Avec $\omega_0 = 1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, on trouve une fréquence correspondante $f_0 = 0,16 \text{ Hz}$. Une fréquence de 20 Hz est donc largement supérieure à la fréquence f_0 : cette fréquence est donc située dans la bande atténuée du filtre que constitue la bobine. On en déduit que la bobine oscillera à la fréquence de 20 Hz avec une amplitude négligeable.

C'est parce que la fréquence de la tension délivrée par EDF est située dans cette gamme de fréquence que l'on s'y intéresse en particulier. Afin de détecter un courant de fréquence supérieure à 100 Hz , il faut que cette fréquence soit située dans la bande passante du filtre. Il faut donc faire en sorte que $f_0 \gg 100 \text{ Hz}$. Pour ce, on peut jouer sur la raideur k du ressort spiral qui exerce le couple de rappel.

Partie IV – Oscillations d'une tige

IV.A - La tige étant sans masse, elle ne contribue pas au moment cinétique du système étudié. Seule la masse ponctuelle m placée au point M y contribue. On note $\mathcal{R}$ le référentiel $Oxyz$. Dans ce référentiel, le moment cinétique du système, calculé par rapport au point O s'écrit :

$$\vec{L}_0 = \overrightarrow{OM} \wedge [m \vec{v}_{\mathcal{R}}(M)]. \quad (\text{IV.40})$$

Or $\overrightarrow{OM} = b \vec{e}_r$ et $\vec{v}_{\mathcal{R}}(M) = b\dot{\theta} \vec{e}_\theta$. D'où :

$$\vec{L}_0 = mb^2 \dot{\theta} \vec{e}_z. \quad (\text{IV.41})$$

On en déduit que la constante α qui figure dans l'énoncé est égale à l'unité : $\alpha = 1$.
IV.B - IV.B.1) La force de rappel exercée par le ressort peut s'écrire comme suit : $\vec{F} = k \overrightarrow{AB} = k \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \right)$. Son moment, par rapport au point O , s'écrit :

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F} = k \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = ka^2 \sin(\theta_B - \theta) \vec{e}_z.$$

L'expression du moment du poids par rapport au point O est la suivante :

$$\vec{M}_O(m\vec{g}) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{g} = -mbg \cos \theta \vec{e}_z.$$

Le théorème du moment cinétique appliqué au système étudié, dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$, conduit, en projection sur l'axe vertical Oz , à l'expression suivante :

$$mb^2 \ddot{\theta} = ka^2 \sin(\theta_B - \theta) - mbg \cos \theta - h\dot{\theta}. \quad (\text{IV.42})$$

IV.B.2) La position d'équilibre est obtenue lorsque $\ddot{\theta} = 0$ et $\dot{\theta} = 0$. L'expression IV.42 conduit au résultat suivant :

$$ka^2 \sin(\theta_B - \theta_E) - mbg \cos \theta_E = 0. \quad (\text{IV.43})$$

Si l'on suppose $\theta_E = 0$, alors la relation IV.43 conduit à :

$$\sin \theta_B = \frac{mg}{ka^2}, \quad (\text{IV.44})$$

ce qui n'est possible qu'à condition que : $\frac{mg}{ka^2} \leq 1$.

IV.C - Le référentiel $\mathcal{R}$ est animé d'un mouvement de translation vertical et sinusoïdal par rapport au référentiel du laboratoire (*i.e.* référentiel terrestre) galiléen. Le référentiel $\mathcal{R}$ devient donc non galiléen.

IV.C.1) L'accélération d'entraînement est égale à : $\vec{a}_e = y\dot{\vec{e}}_y = -y_0\omega^2 \cos \omega t \vec{e}_y$. On en déduit que la force d'inertie d'entraînement qui s'exerce sur la tige OA s'écrit comme suit :

$$\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e = m\omega^2 y_0 \cos \omega t \vec{e}_y. \quad (\text{IV.45})$$

Le moment de cette force par rapport au point O s'écrit :

$$\vec{M}_O(\vec{f}_{ie}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}_{ie} = mby_0\omega^2 \cos \omega t \cos \theta \vec{e}_z. \quad (\text{IV.46})$$

Vu que le référentiel $\mathcal{R}$ est animé d'un mouvement de translation par rapport au référentiel du laboratoire, la force de Coriolis est nulle. Il en est donc de même pour son moment par rapport au point O .
IV.C.2) Le théorème du moment cinétique appliqué à la tige dans le référentiel $\mathcal{R}$, s'écrit :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O(m\vec{g}) + \vec{M}_O(\vec{f}_{ie}) + \vec{M}_O(\vec{F}) + \vec{\Gamma}. \quad (\text{IV.47})$$

En projetant la relation précédente sur l'axe Oz , on obtient la relation suivante :

$$mb^2 \ddot{\theta} = -mbg \cos \theta + mby_0\omega^2 \cos \omega t \cos \theta + ka^2 \sin(\theta_B - \theta)h\dot{\theta}, \quad (\text{IV.48})$$

ou encore :

$$\ddot{\theta} + 2\lambda\omega_0\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = \frac{b}{y_0} \omega^2 \cos \theta \cos \omega t, \quad (\text{IV.49})$$

où $\omega_0^2 = \frac{b \tan \theta_E}{h}$ et $2\lambda\omega_0 = \frac{mb^2}{h}$.

IV.C.3) Dans l'hypothèse où $\theta \ll 1$, la relation IV.49 peut être linéarisée :

$$\ddot{\theta} + 2\lambda\omega_0\dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \frac{b}{y_0} \omega^2 \cos \omega t. \quad (\text{IV.50})$$

Pour trouver l'amplitude des oscillations en régime sinusoïdal établi, on utilise les représentations complexes. À une grandeur sinusoïdale $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t - \varphi)$, on associe la représentation complexe $\bar{\theta} = \bar{\theta}_0 \exp(j\omega t)$ où l'amplitude complexe $\bar{\theta}_0$ s'écrit : $\bar{\theta}_0 = \theta_0 \exp(-j\varphi)$. À la relation IV.50, correspond une équation algébrique dans $\mathbb{C}$:

$$-\omega^2 \bar{\theta}_0 + 2j\lambda\omega\omega_0 \bar{\theta}_0 + \omega_0^2 \bar{\theta}_0 = \frac{b}{y_0} \omega^2.$$

On en déduit l'expression de $\bar{\theta}_0$:

$$\bar{\theta}_0 = \frac{b}{y_0} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\lambda\omega\omega_0}{\omega^2}. \quad (\text{IV.52})$$

L'amplitude θ_0 des oscillations correspond au module de $\bar{\theta}_0$:

$$\theta_0 = \frac{b}{y_0} \frac{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2 \omega^2 \omega_0^2}}{\omega^2}. \quad (\text{IV.53})$$

IV.C.4) Posons $x = \omega/\omega_0$, il vient alors :

$$(IV.54) \quad \frac{y_0}{b\theta} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x^2}{1} - 1\right)^2 + \frac{x^2}{4\lambda^2}}}.$$

Posons $f(X) = \left(\frac{x}{1} - 1\right)^2 + 4\frac{x^2}{\lambda^2}$. Lorsque $\frac{y_0}{b\theta}$ est maximum, $f(X)$ est minimum. En dérivant $f(X)$, on trouve que le minimum est obtenu pour $X = \frac{1-2\lambda^2}{1}$, soit pour $x = \frac{\sqrt{1-2\lambda^2}}{1}$. Comme $\lambda \gg 1$, il vient : $x \approx 1 + \lambda^2$, soit $\omega = \omega_0(1 + \lambda^2)$. On trouve alors que : $\frac{y_0}{b\theta_{\max}} \approx \frac{1}{2\lambda}$.

Pour trouver l'acuité A de la résonance, écrivons que :

$$(IV.55) \quad \frac{\theta}{\theta_{\max}} = \frac{\sqrt{(1 - x^2)^2 + 4\lambda^2 x^2}}{2\lambda x^2}.$$

On cherche les deux valeurs de x telles que $\frac{\theta}{\theta_{\max}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Cela revient à résoudre l'équation :

$$\frac{1}{1} = \frac{\sqrt{(1 - x^2)^2 + 4\lambda^2 x^2}}{1} = \frac{\sqrt{8\lambda^2 x^4}}{1},$$

d'où l'équation bicarrée suivante à résoudre : $(1 - 8\lambda^2)x^4 + (4\lambda^2 - 2)x^2 + 1 = 0$. Les deux racines sont : $\frac{1-8\lambda^2 \pm \sqrt{1-8\lambda^2 + 2\lambda^2(1+\lambda^2)}}{1-2\lambda^2-2\lambda^2\sqrt{1+\lambda^2}}$ et $\frac{1-8\lambda^2 \pm \sqrt{1-8\lambda^2 + 2\lambda^2(1+\lambda^2)}}{1-2\lambda^2-2\lambda^2\sqrt{1+\lambda^2}}$. Au premier ordre en λ , on obtient : $x_1 = 1 - \lambda$ et $x_2 = 1 + \lambda$. L'acuité A de la résonance est alors $A = x_2 - x_1 = 2\lambda$.

IV.C.5) Le comportement asymptotique de $b\theta/y_0$ est le suivant :

- $x \gg 1$: $\frac{y_0}{b\theta} \sim x^2$;
- $x \gg 1$: $\frac{y_0}{b\theta} \sim 1$.

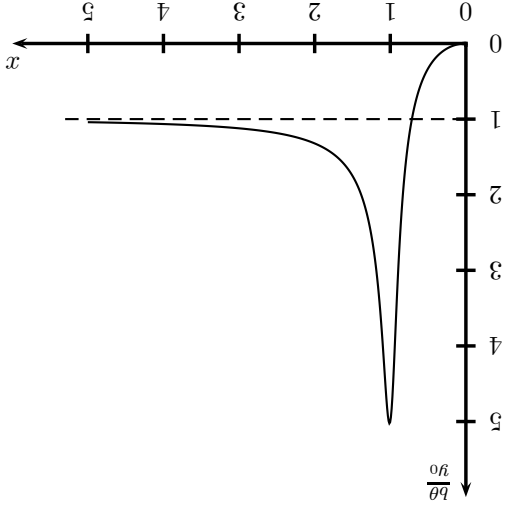
2. Ceci dit, on ne peut pas choisir θ_B indépendamment de b (voir relation IV.44)... Cela signifie que la valeur de la masse, la raideur ou la longueur du ressort doivent aussi être convenablement choisies. En fait, pour un ressort donné, le seul choix de b permet de régler λ , θ_B et finalement f . Mais l'énoncé ne semble guère pousser le candidat à envisager cette solution puisque b est donné et les paramètres du ressort restent inconnus.

L'application numérique conduit à : $\theta_B = 1,57$ rad, soit quasiment 90 degrés. L'amplitude maximale $\theta_{\max}$ est alors égale à 0,05 rad soit 2,9°.

$$\tan \theta_B = \frac{g}{4\pi^2 b f^2} (1 + 2\lambda^2).$$

IV.C.7) Pour obtenir la résonance de la tige à la fréquence f , il faut que $2\pi f = \omega_{\text{rés}} = \omega_0(1 + \lambda^2)$. On en déduit : $4\pi^2 f^2 \approx \frac{b \tan \theta_B}{(1 + 2\lambda^2)}$ ($\lambda \gg 1$). On peut donc choisir l'angle θ_B pour satisfaire cette condition :

IV.C.6) On constate que pour des pulsations d'excitation largement supérieures à la pulsation propre ω_0 , l'amplitude des oscillations de la tige est l'image de l'amplitude d'oscillation du support. Si l'on considère ce dispositif comme un filtre mécanique, on peut le qualifier de passe-haut. Ce système est un sismographe (sismographe de La Coste).



Le graphique ci-dessous est tracé pour $\lambda = 0,1$. On a aussi représenté l'asymptote $\frac{y_0}{b\theta} = 1$.