

DYNAMIQUE DU MÉLANGE DANS LES OCÉANS

1 MÉLANGE VERTICAL

1.1. a Le chlorure et le sodium (chlorure de sodium), concentration d'environ 30 g.L⁻¹.

1.1. b Profondeur moyenne : environ 3700 m. Profondeur maximale : environ 11500 m.

1.1. c  N_S mol de sel dans V Φ_S mol.s⁻¹ flux de sel sortant de V

$$\frac{dN_S}{dt} = - \Phi_S \quad \text{avec} \quad N_S = \iiint_V S \, d\tau \quad \Phi_S = \oint_{S_V} \vec{j}_S \cdot d\vec{S}$$

La loi de Fick s'écrit : $\vec{j}_S = -\kappa \vec{\text{grad}} S$. D'où les relations :

$$\iiint_V \frac{\partial S}{\partial t} \, d\tau + \iiint_V \text{div} \vec{j}_S \, d\tau = 0 \quad (\forall V) \text{ puis : } \frac{\partial S}{\partial t} + \text{div}(-\kappa \vec{\text{grad}} S) = 0, \text{ donc :}$$

$$\boxed{\frac{\partial S}{\partial t} = \kappa \Delta S}$$

1.1. d Dans le cas plus général où le fluide est en mouvement, la variation de N_S est due d'une part à la diffusion à travers S_V et d'autre part au fait que du fluide entre ou sort du volume V :

$$\frac{dN_S}{dt} = \iiint_V \frac{\partial S}{\partial t} \, d\tau = - \Phi_S - \oint_{S_V} S \vec{v} \cdot d\vec{S} = - \Phi_S - \iiint_V \text{div}(S \vec{v}) \, d\tau$$

$$\text{or } \text{div}(S \vec{v}) = S \text{div} \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{\text{grad}} S. \text{ Pour un mouvement incompressible } \text{div} \vec{v} = 0$$

Il reste donc : $\iiint_V \frac{\partial S}{\partial t} \, d\tau = - \iiint_V \text{div} \vec{j}_S \, d\tau - \iiint_V \vec{v} \cdot \vec{\text{grad}} S \, d\tau$, d'où le résultat :

$$\boxed{\frac{\partial S}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\text{grad}} S = \kappa \Delta S}$$

1.2.1. a De la stationnarité nous déduisons $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$. Les hypothèses permettent d'écrire

par ailleurs : $\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}} S = w \frac{dS}{dz}$ et $\kappa \Delta S = \kappa \frac{d^2 S}{dz^2}$ d'où : $\boxed{w \frac{dS}{dz} = \kappa \frac{d^2 S}{dz^2}}$

T vérifie de même : $\boxed{w \frac{dT}{dz} = \kappa \frac{d^2 T}{dz^2}}$ (même diffusivité).

1.2.1. b Par intégrations successives nous obtenons : $\frac{dT}{dz} = A \exp(\frac{w}{\kappa} z)$, $T = a \exp(\frac{w}{\kappa} z) + b$

Sachant que $\lim_{z \rightarrow -\infty} T = T_\infty$, il vient : $\boxed{T = T_\infty + a \exp(\frac{w}{\kappa} z)}$. La constante a

se détermine avec la condition aux limites en $z = 0$ ($T = T_0$) : $a = T_0 - T_\infty$.

Finalement : $\boxed{T = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \exp(\frac{w}{\kappa} z)}$ et de même : $\boxed{S = S_\infty + (S_0 - S_\infty) \exp(\frac{w}{\kappa} z)}$

1.2.1 c Les encarts de la figure 2 montrent que $\ln(T - T_\infty)$ et $\ln(S_0 - S)$ sont bien des fonctions affines de z , et permettent de déterminer le rapport $\frac{w}{\kappa}$.

$$\ln(T - T_\infty) = \frac{w}{\kappa} z + \ln(T_0 - T_\infty) \quad \text{d'où} \quad \frac{w}{\kappa} = \frac{\Delta(\ln(T - T_\infty))}{\Delta z} \approx \frac{5}{\frac{1,5}{1,8} \times 5} \approx 1,2 \text{ m}^{-1}$$

On obtient exactement le même résultat avec S , ce qui confirme l'hypothèse selon laquelle salinité et température diffusent avec la même diffusivité.

1.2.1. d L'unité de S ne joue que sur une translation horizontale du graphe

z fonction de $\ln(S_0 - S)$ et n'a donc pas d'influence sur la détermination de $\frac{w}{\kappa}$.

1.2.1. e . Chauffage du fond océanique par des zones volcaniques sous-marines.

- Source d'eau chaude sous-marine, ou embouchure d'un fleuve.

1.2.2. a $\kappa \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}$ est le terme diffusif $w \frac{\partial C}{\partial z}$ est le terme advectif

μC est le terme "source" représentant le nombre de désintégrations par unité de temps et de volume.

1.2.2. b Discriminant de l'équation caractéristique : $\Delta = w^2 + 4\mu\kappa = w^2 \lambda^2$

Racines : $\frac{w \pm w \lambda}{2\kappa}$. D'où $C = \left[A \exp\left(\frac{w \lambda}{2\kappa} z\right) + B \exp\left(-\frac{w \lambda}{2\kappa} z\right) \right] \exp\left(\frac{w}{2\kappa} z\right)$

1.2.2. c $\lambda^2 - 1 = 4\mu \frac{\kappa}{w^2}$, $\frac{\kappa}{w^2} = \frac{\lambda^2 - 1}{4\mu}$. D'où $\frac{\kappa/w}{\kappa/w^2} = w \approx \frac{1}{1,2} \times \frac{4 \cdot 3,93 \cdot 10^{-12}}{1,05^2 - 1} \approx 1,3 \cdot 10^{-10} \text{ m.s}^{-1}$
 $\frac{(\kappa/w)^2}{\kappa/w^2} = \kappa \approx \frac{1}{1,2} \cdot w = 1,1 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ $w \approx 1,3 \cdot 10^{-10} \text{ m.s}^{-1}$ $\kappa \approx 1,1 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

1.2.2. d $w \sim 10^{-8} \text{ cm.s}^{-1}$, il faut donc 10^8 s pour parcourir 1 cm , soit 100 Ms .

L'échelle de temps adaptée serait 100 Ms ou bien 1 Gs : $w \approx 13 \text{ cm.Gs}^{-1}$.

Temps nécessaire pour remonter du fond à la surface : $\Delta t \approx \frac{3700}{1,3 \cdot 10^{-10}} \approx 2,8 \cdot 10^{13} \text{ s} \approx \underline{\underline{900\,000 \text{ ans}}}$

1.2.2. e Les calculs numériques de la question c montrent que κ et w sont de la forme : $\frac{\partial C}{\partial z^2}$ d'où $\frac{\Delta \kappa}{\kappa} = \frac{\Delta w}{w} = -\frac{2 \Delta \lambda}{\lambda^2 - 1} = -\frac{2 \frac{\Delta \lambda}{\lambda}}{\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2}}$

ce qui montre qu'une faible erreur facteur très supérieur à 1 (à moins de 1)
relative sur λ ($\frac{\Delta \lambda}{\lambda}$) peut conduire à une grande erreur relative sur w ou κ .

1.2.2. f La période du carbone 14 s'obtient à partir de μ : $\frac{dC}{dt} = -\mu C \Rightarrow C = C_0 e^{-\mu t}$

et $e^{-\mu T} = \frac{1}{2} \Rightarrow T = \frac{\ln 2}{\mu} \approx 5600 \text{ ans}$. S'agissant d'étudier l'évolution sur quelques dizaines d'années, une période de 8 jours est trop courte (disparition en 9 mois) une période de $7 \cdot 10^4 \text{ ans}$ trop longue (pas de variation mesurable en 1 an), tandis que la période de 5600 ans permet de mesurer des variations de l'ordre de 1% sur quelques années.

1.3. a Le régime est ici non permanent, mais il n'y a pas de terme source. L'équation d'évolution s'écrit donc :

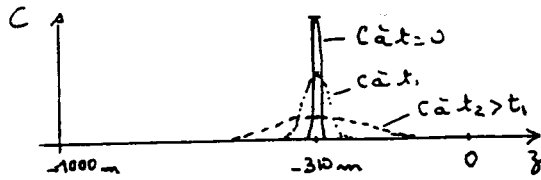
$$\frac{\partial C}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - w \frac{\partial C}{\partial z}$$

il reste : $\frac{\partial C}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}$ (équation de diffusion).

1.3. b largage "instantané" : tout est largué en même temps, à $t = 0$.

"localisé" : largage en un seul point précis (à l'altitude $z = 0$). Le modèle convient si la durée effective du largage est très brève devant la durée de l'expérience et si l'épaisseur de la zone de largage est très faible devant les distances entre points de mesure (en particulier devant 310 m).

La diffusion a lieu symétriquement vers le haut et vers le bas ($\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}$) et conduit à une dilution progressive :



La largeur du "pic" augmente au cours du temps, tandis que sa hauteur diminue. La surface du "pic" reste constante (conservation de la matière).

$$1.3.c \quad \frac{dM}{dt} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \frac{\partial C}{\partial t} dz}{\int_{-\infty}^{+\infty} C dz} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} (z^2 C) dz}{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} C dz \right)^2} \quad \text{or} \quad \frac{\partial C}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}$$

et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} dz = \left[\frac{\partial C}{\partial z} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$. Remarquons que C n'est non nulle que sur un intervalle fini de valeurs de z , d'où la possibilité d'étendre les intégrales sur $]-\infty, +\infty[$ sans en modifier la valeur. Nous avons donc:

$$\frac{dM}{dt} = \kappa \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} dz}{\int_{-\infty}^{+\infty} C dz} \quad \text{or} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} dz = \left[z^2 \frac{\partial C}{\partial z} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \left[2zC \right]_{-\infty}^{+\infty} + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} C dz$$

Enfinement $\boxed{\frac{dM}{dt} = 2\kappa}$ or $\boxed{M(t) = 2\kappa t + M_0}$

1.3.d $\kappa = \frac{1}{2} \frac{\Delta M}{\Delta t}$. En prenant la 1^{ère} et la deuxième mesure: $\kappa = \frac{270-40}{2 \cdot (146-12)} \approx 0,86 \text{ jour}^{-1} \text{ m}^2$

Avec la 1^{ère} et la 3^{ème} mesure: $\kappa = \frac{380-40}{2 \cdot (180-12)} \approx 1,01 \text{ jour}^{-1} \text{ m}^2$. La précision n'est pas très grande.

$\kappa \approx 1 \text{ jour}^{-1} \approx 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

1.3.e $w \frac{\partial C}{\partial z}$ est négligé devant $\kappa \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}$ or $\frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \sim \frac{1}{L} \frac{\partial C}{\partial z}$, L distance caractéristique de variation de C dont on peut dire qu'au cours de l'expérience envisagée elle reste bien inférieure à z_0 (310m). w est donc négligé devant $\frac{\kappa}{L} \gg \frac{1,2 \cdot 10^{-5}}{300} \approx 4 \cdot 10^{-8} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

or $w = \sqrt{\frac{4\mu\kappa}{d^2-1}} \approx \left(\frac{4 \cdot 3,93 \cdot 10^{-12} \cdot 1,2 \cdot 10^{-5}}{1,05^2 - 1} \right)^{1/2} \approx 4 \cdot 10^{-8} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \ll \frac{\kappa}{L} \Rightarrow$ terme advectif négligeable.

1.3.f Augmenter le nombre de dates de mesures, et de points de mesures (pour le calcul de $\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 C dz$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} C dz$). Tenir compte de la diffusion horizontale

1.3.g Les résultats pour κ obtenus en 1.2 et 1.3 diffèrent d'un facteur 10^5 ! Les mesures de Ledwell et al. infirment donc la théorie développée en 1.2.

2 MELANGE HORIZONTAL

2.1.a Ecoulement de Couette plan. (Champ de cisaillement plan).

2.1.b Sachant que $w=0$ l'équation s'écrit: $\boxed{\kappa \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + \eta \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - u \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial C}{\partial t}}$

2.2.1.a En l'absence de diffusion, l'équation s'écrit: $\frac{\partial C}{\partial t} = -u \frac{\partial C}{\partial x} = -\alpha z \cos \omega t \frac{\partial C}{\partial x}$

Introduisons le changement de variable proposé : $\begin{cases} t=t \\ z=z \\ \tilde{x} = x - \frac{\alpha}{\omega} z \sin \omega t \end{cases}$ et posons $\tilde{C}(\tilde{x}, z, t) = C(x, z, t)$.

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{x}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{x}} \cdot \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{C}}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{C}}{\partial t} - \frac{\alpha}{\omega} z \cos \omega t \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial \tilde{C}}{\partial t} - \alpha z \cos \omega t \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{x}}$$

Donc $\frac{\partial \tilde{C}}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial t} + \alpha z \cos \omega t \frac{\partial C}{\partial x} = 0$. On en déduit que $\tilde{C}(\tilde{x}, z, t) = f^*(\tilde{x}, z)$

or à $t=0$ $C(x, z, 0) = f^*(\tilde{x}, z) = f^*(x, z) = \cos(qx) = f(x)$ (car $\tilde{x} = x$ à $t=0$).

Finalement $C(x, z, t) = \cos\left[q\left(x - \frac{\alpha}{\omega} z \sin \omega t\right)\right]$.

2.2.1.b $\tilde{x}$ correspond à l'abscisse dans un repère en translation selon Ox à la vitesse $\alpha z \cos \omega t$.

2.2.1.c En tenant compte de la diffusion C vérifie l'équation :

$$\gamma \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \kappa \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} = \frac{\partial C}{\partial t} + \alpha z \cos \omega t \frac{\partial C}{\partial x} \quad \text{Reprenons le changement de variable précédent et précisons :}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial \tilde{x}^2}, \quad \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial \tilde{C}}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{x}} \cdot \frac{\partial \tilde{x}}{\partial z} = \frac{\partial \tilde{C}}{\partial z} - \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{x}} \quad \text{et enfin :}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \right) \left(\frac{\partial \tilde{C}}{\partial z} - \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{x}} \right) = \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial z^2} - 2 \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial \tilde{x} \partial z} + \frac{\alpha^2}{\omega^2} \sin^2 \omega t \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial \tilde{x}^2}$$

Nous cherchons la solution sous la forme $\tilde{C}(\tilde{x}, z, t) = A(t) \cos(q\tilde{x})$. Donc $\frac{\partial \tilde{C}}{\partial z} = 0$ et $\frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial z^2} = 0$

ainsi que $\frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial \tilde{x} \partial z} = 0$. Finalement l'équation s'écrit :

$$\gamma \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial \tilde{x}^2} + \kappa \frac{\alpha^2}{\omega^2} \sin^2 \omega t \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial \tilde{x}^2} = \frac{\partial \tilde{C}}{\partial t} \quad \text{soit :} \quad -\left(\gamma + \kappa \frac{\alpha^2}{\omega^2} \sin^2 \omega t\right) q^2 \cos(q\tilde{x}) A = A' \cos(q\tilde{x})$$

$$\frac{A'}{A} = -q^2 \left(\gamma + \frac{\kappa \alpha^2}{2\omega^2} - \frac{\kappa \alpha^2}{2\omega^2} \cos 2\omega t \right) \quad \text{À } t=0 \quad C(x, z, 0) = \cos qx \Rightarrow A(0) = 1.$$

D'où $\ln(A(t)) = -q^2 \left(\left(\gamma + \frac{\kappa \alpha^2}{2\omega^2} \right) t - \frac{\kappa \alpha^2}{4\omega^3} \sin 2\omega t \right)$ et enfin :

$$A(t) = \exp \left(-q^2 \left[\left(\gamma + \frac{\kappa \alpha^2}{2\omega^2} \right) t - \frac{\kappa \alpha^2}{4\omega^3} \sin 2\omega t \right] \right)$$

2.2.1.d Cas particulier $\gamma = 0$ et $\frac{q^2 \kappa}{\omega} = 1$: ainsi $A(t) = \exp \left(-\frac{\alpha^2}{2\omega^2} \left[\omega t - \frac{\sin 2\omega t}{2} \right] \right)$

$\frac{\alpha}{\omega} = 0,1$ (le plus petit) correspond donc au trait plein —

$\frac{\alpha}{\omega} = 1$ correspond à la courbe en pointillés

$\frac{\alpha}{\omega} = 10$ correspond à la courbe en tirets ----, la plus rapidement atténuée.

2.2.1.e $C(x, z, t) = \exp \left(-q^2 \left[\left(\gamma + \frac{\kappa \alpha^2}{2\omega^2} \right) t - \frac{\kappa \alpha^2}{4\omega^3} \sin 2\omega t \right] \right) \cos \left(q \left[x - \frac{\alpha}{\omega} z \sin \omega t \right] \right)$

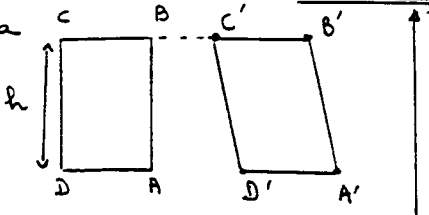
2.2.1.f Dans l'expression ci-dessus nous pouvons distinguer un facteur oscillant : $\cos q\tilde{x}$

un préfacteur qui en module l'amplitude de façon périodique : $\exp \left(q^2 \frac{\kappa \alpha^2}{4\omega^3} \sin 2\omega t \right)$

et enfin un facteur d'atténuation exponentielle : $\exp(-q^2 \eta_e t)$

C tend donc vers 0 (c'est à dire le mélange se fait) sur une durée caractéristique proportionnelle à $\frac{1}{\eta_e}$, il est assuré par la diffusion horizontale (γ) et verticale (κ).

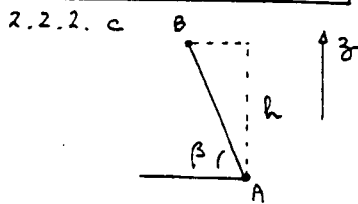
2.2.1. g Si η est négligeable $\eta_e = \frac{\kappa \alpha^2}{2\omega^2}$ l'atténuation est due uniquement à la diffusion verticale

2.2.2. a  B et C se déplacent à la même vitesse, horizontalement. D et A également. Mais A se déplace plus vite que B car il est à l'altitude plus profonde ($|z_A| > |z_B|$)

le rectangle devient un parallélogramme.

2.2.2. b A partir de l'expression $C(x, z, t) = A(t) \cos(q \tilde{x})$ on peut déduire que

$$\frac{\partial C}{\partial z} = -\frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t \frac{\partial C}{\partial x}$$



$$\Phi_{AB} = -\kappa \frac{\partial C}{\partial z} h \cotan \beta$$

$$\text{or } h \cotan \beta = x_A - x_B = \frac{\alpha}{\omega} z_A \sin \omega t - \frac{\alpha}{\omega} z_B \sin \omega t = -\frac{\alpha}{\omega} h \sin \omega t$$

Donc $\Phi_{AB} = \kappa \frac{\alpha}{\omega} h \sin \omega t \frac{\partial C}{\partial x}$. Remplaçons $\frac{\partial C}{\partial z}$ par le résultat précédent:

$$\Phi_{AB} = -\kappa \frac{\alpha^2}{\omega^2} h \sin^2 \omega t \frac{\partial C}{\partial x} \quad \text{En supposant alors } \frac{\partial C}{\partial x} \text{ invariable dans le temps}$$

(car on a $q \frac{\alpha}{\omega} z \ll \pi$) alors $\langle \Phi_{AB} \rangle = -\frac{\kappa \alpha^2}{2\omega^2} h \frac{\partial C}{\partial x}$

2.2.2. d $\Phi_{\text{horiz.}} = -\eta \frac{\partial C}{\partial x} \cdot h \quad \Phi_{\text{total}} = -\left(\eta + \frac{\kappa \alpha^2}{2\omega^2}\right) h \frac{\partial C}{\partial x} = -\eta_e h \frac{\partial C}{\partial x}$

On retrouve donc bien la diffusivité effective horizontale: $\eta_e = \eta + \frac{\kappa \alpha^2}{2\omega^2}$.

2.2.3. a Le champ stationnaire correspond à la situation étudiée précédemment dans la limite $\omega \rightarrow 0$; or $\frac{\sin \omega t}{\omega} \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} t$ et $\frac{\kappa \alpha^2}{2\omega^2} t - \frac{\kappa \alpha^2}{4\omega^3} \sin 2\omega t \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0$

Il reste donc: $C(x, z, t) = \exp(-q^2 \eta_e t) \cos(q[x - \alpha z t])$

2.2.3. b Pour les temps courts on obtient $C(x, z, t) \simeq \cos q(x - \alpha z t)$, ce qui correspond à une onde se propageant selon Ox à la célérité αz .

Pour les temps longs cette onde se trouve amortie exponentiellement sur une durée caractéristique de $1/q^2 \eta_e$: C tend vers 0, ce qui correspond à un mélange total et rapide

2.2.4. a L'équation aux dérivées partielles à laquelle obéit C étant linéaire, le théorème de superposition permet d'obtenir la solution $C(x, z, t)$ à partir de l'étude précédente:

$$C(x, z, t) = A \int_0^{+\infty} \exp(-\alpha^2 q^2) \exp(-q^2 [\eta_e t - \frac{\kappa \alpha^2}{4\omega^3} \sin 2\omega t]) \cos(q[x - \frac{\alpha}{\omega} z \sin \omega t]) dq$$

En posant $\tilde{\alpha}^2 = \alpha^2 + \eta_e t - \frac{\kappa \alpha^2}{4\omega^3} \sin 2\omega t$ et $\tilde{x} = x - \frac{\alpha}{\omega} z \sin \omega t$, on peut écrire:

$$C(x, z, t) = A \int_0^{+\infty} \exp(-\tilde{\alpha}^2 q^2) \cos(q \tilde{x}) dq = \boxed{A \frac{\sqrt{\pi}}{2\tilde{\alpha}} \exp(-\frac{\tilde{x}^2}{4\tilde{\alpha}^2}) = C(x, z, t)}$$

$\tilde{a}$ représente la largeur de l'intervalle des valeurs de $\tilde{x}$ pour lesquelles la concentration C n'est pas nulle (ordre de grandeur de la largeur de la gaussienne $\exp(-\frac{\tilde{x}^2}{4\tilde{a}^2})$).

2.2.4.b Aux temps longs $\tilde{a}^2 \sim \gamma_e t$ ($a^2 - \frac{\kappa \alpha^2}{4\omega^2} \sin 2\omega t$ étant borné).

Ainsi $\tilde{a} \approx \sqrt{\gamma_e t}$. Le mélange diffusif s'étend sur une distance caractéristique $\sqrt{\gamma_e t}$, ce qui est caractéristique d'une diffusion de coefficient γ_e .

2.3. a En reprenant les calculs de la partie 2.2.1, nous pouvons écrire l'équation aux

dérivées partielles vérifiée par $\tilde{C}(\tilde{x}, \tilde{z}, t)$: $\gamma \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial \tilde{x}^2} + \kappa \left(\frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial \tilde{z}^2} + 2\tilde{x}\tilde{z} \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial \tilde{z} \partial \tilde{x}} + \tilde{x}^2 \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial \tilde{x}^2} \right) = \frac{\partial \tilde{C}}{\partial t}$
(en effet $\tilde{C} = a(t) \cos q\tilde{x} \cos m\tilde{z} + b(t) \sin q\tilde{x} \sin m\tilde{z}$ et donc ici $\frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{z}} \neq 0$).

$\frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial \tilde{x}^2} = -q^2 \tilde{C}$, $\frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial \tilde{z}^2} = -m^2 \tilde{C}$, en remplaçant $\tilde{C}$ par son expression, nous obtenons donc:

$$-[\gamma q^2 + \kappa(m^2 + q^2 \tilde{x}_z^2)] [a(t) \cos q\tilde{x} \cos m\tilde{z} + b(t) \sin q\tilde{x} \sin m\tilde{z}] + 2\kappa \tilde{x}_z q m (a(t) \sin q\tilde{x} \sin m\tilde{z} + b(t) \cos q\tilde{x} \cos m\tilde{z}) = a'(t) \cos q\tilde{x} \cos m\tilde{z} + b'(t) \sin q\tilde{x} \sin m\tilde{z}$$

Il suffit d'écrire cette équation en $m\tilde{z} = 0$ et en $m\tilde{z} = \frac{\pi}{2}$ pour obtenir le système:

$$\begin{cases} -[\gamma q^2 + \kappa(m^2 + q^2 \tilde{x}_z^2)] a(t) + 2\kappa q m \tilde{x}_z b(t) = a'(t) \\ 2\kappa q m \tilde{x}_z a(t) - [\gamma q^2 + \kappa(m^2 + q^2 \tilde{x}_z^2)] b(t) = b'(t) \end{cases}$$

2.3. b $\hat{a}'(t) = a'(t) \exp(\int_0^t \Phi(t') dt') + a(t) \Phi(t) \exp(\int_0^t \Phi(t') dt')$ donc

$a'(t) + \Phi(t) a(t) = \hat{a}'(t) \exp(-\int_0^t \Phi(t') dt')$ et relation similaire pour $b'(t)$.

Le système précédent s'écrit donc:

$$\begin{cases} \hat{a}'(t) \exp(-\int_0^t \Phi(t') dt') = 2\kappa q m \tilde{x}_z b(t) \\ \hat{b}'(t) \exp(-\int_0^t \Phi(t') dt') = 2\kappa q m \tilde{x}_z a(t) \end{cases}$$

soit encore plus simplement:

$$\hat{a}'(t) = 2\kappa q m \tilde{x}_z \hat{b}(t) \quad \text{et} \quad \hat{b}'(t) = 2\kappa q m \tilde{x}_z \hat{a}(t)$$

2.3. c Remarquons que $\hat{a}'(t) \hat{a}(t) = 2\kappa q m \tilde{x}_z \hat{b}(t) \hat{a}(t) = \hat{b}'(t) \hat{b}(t)$ donc $\hat{a}^2(t) = \hat{b}^2(t) + cte$.

Initialement $a(0) = 1$ et $b(0) = 0$ donc $\hat{a}(0) = 1$ et $\hat{b}(0) = 0$ d'où $\hat{a}^2(t) = \hat{b}^2(t) + 1$.

Reposons alors $\hat{b}(t) = \pm \sqrt{\hat{a}^2(t) - 1}$ dans la 1^{ère} équation:

$$\frac{\hat{a}'(t)}{\sqrt{\hat{a}^2(t) - 1}} = \pm 2\kappa q m \left(-\frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t \right) \Rightarrow \operatorname{arsh}(\hat{a}(t)) = \pm \frac{2\kappa q m \alpha}{\omega^2} \cos \omega t + cte$$

et $\hat{a}(t) = \operatorname{ch} \left(\pm \frac{2\kappa q m \alpha}{\omega^2} \cos \omega t + cte \right)$ avec $\hat{a}(0) = 1$ nous obtenons:

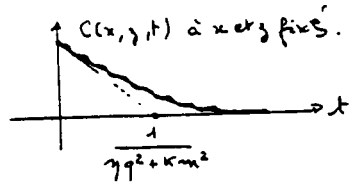
$$\hat{a}(t) = \operatorname{ch} \left(\frac{2\kappa q m \alpha}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) \right) \quad \text{puis} \quad \hat{b}(t) = \pm \operatorname{sh} \left(\frac{2\kappa q m \alpha}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) \right)$$

Explicitons enfin $a(t)$ et $b(t)$ sachant que $\Phi(t) = \gamma q^2 + \kappa(m^2 + \frac{q^2 \alpha^2}{2\omega^2}) - \kappa \frac{q^2 \alpha^2}{2\omega^2} \cos 2\omega t$

$$\begin{cases} a(t) = \exp \left(-[\gamma q^2 + \kappa(m^2 + \frac{q^2 \alpha^2}{2\omega^2})] t + \kappa \frac{q^2 \alpha^2}{4\omega^3} \sin 2\omega t \right) \operatorname{ch} \left(\frac{2\kappa q m \alpha}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) \right) \\ b(t) = \pm \exp \left(-[\gamma q^2 + \kappa(m^2 + \frac{q^2 \alpha^2}{2\omega^2})] t + \kappa \frac{q^2 \alpha^2}{4\omega^3} \sin 2\omega t \right) \operatorname{sh} \left(\frac{2\kappa q m \alpha}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) \right) \end{cases}$$

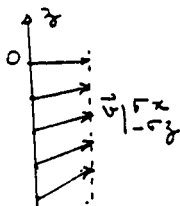
2.3. d En prenant $m = 0$ dans le résultat ci-dessus on retrouve exactement $a(t) = A(t)$ et $b(t) = B(t)$ soit le résultat du 2.1. c. Il y a donc compatibilité.

2.3. e Dans la limite $\omega \rightarrow \infty$ on obtient $C(x, y, t) = \exp(-(\gamma q^2 + \kappa m^2)t) \cos q \tilde{x} \cos m z$

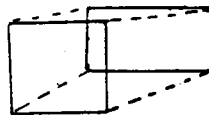


le régime est valable si $\frac{q^2 \alpha^2}{2\omega^2} \ll m^2$ et $\frac{2\kappa q m d}{\omega^2} \ll 1$
 et $\frac{\kappa q^2 \alpha^2}{4\omega^2} \ll \frac{\gamma q^2 + \kappa m^2}{\omega}$ soit $\omega \gg \sqrt{\frac{q \alpha}{\kappa m d}}$...

2.4. a



2.4. b



Le carré se transforme en rectangle, la hauteur s'accroît, la largeur augmente.

2.4. c

$$\gamma \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial C}{\partial t} + \sigma x \frac{\partial C}{\partial x} - \sigma z \frac{\partial C}{\partial z}$$

puisque $\gamma = \kappa$.

2.4. d En l'absence de diffusion : $\frac{\partial C}{\partial t} + \sigma x \frac{\partial C}{\partial x} - \sigma z \frac{\partial C}{\partial z} = 0$

$$\begin{cases} \tau = t \\ x = x e^{-\sigma t} \\ z = z e^{+\sigma t} \end{cases} \quad \hat{C}(x, z, \tau) = C(x, z, t) \quad \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial \hat{C}}{\partial \tau} + \frac{\partial \hat{C}}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \hat{C}}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t}$$

$$\text{soit } \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial \hat{C}}{\partial \tau} - \sigma x e^{-\sigma t} \frac{\partial \hat{C}}{\partial x} + \sigma z e^{+\sigma t} \frac{\partial \hat{C}}{\partial z} ; \quad \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial \hat{C}}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x} = e^{-\sigma t} \frac{\partial \hat{C}}{\partial x} ;$$

$$\text{et } \frac{\partial C}{\partial z} = e^{+\sigma t} \frac{\partial \hat{C}}{\partial z} . \text{ D'où : } \frac{\partial \hat{C}}{\partial \tau} - \sigma x e^{-\sigma t} \frac{\partial \hat{C}}{\partial x} + \sigma z e^{+\sigma t} \frac{\partial \hat{C}}{\partial z} + \sigma x e^{-\sigma t} \frac{\partial \hat{C}}{\partial x} - \sigma z e^{+\sigma t} \frac{\partial \hat{C}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \hat{C}}{\partial \tau} = 0 \quad \text{et} \quad \hat{C}(x, z, \tau) = \hat{f}(x, z) = f(x e^{-\sigma t}, z e^{+\sigma t}) . \text{ Or à } t=0 \quad f(x, z) = \cos q x \cos m z .$$

$$\text{Nous obtenons finalement : } C(x, z, t) = \cos(q x e^{-\sigma t}) \cos(m z e^{+\sigma t})$$

Le nombre d'onde selon Oz peut être défini par $\frac{m e^{\sigma t}}{2\pi}$. Il est donc multiplié par le facteur exponentiel croissant $e^{\sigma t}$. Comparaison??

2.4. e Cherchons la solution dans le cas diffusif sous la forme : $\hat{C}(x, z, \tau) = A(\tau) \cos q x \cos m z$.

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = e^{-2\sigma t} \frac{\partial^2 \hat{C}}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} = e^{+2\sigma t} \frac{\partial^2 \hat{C}}{\partial z^2} . \text{ D'où : } \gamma \left(e^{-2\sigma t} \frac{\partial^2 \hat{C}}{\partial x^2} + e^{+2\sigma t} \frac{\partial^2 \hat{C}}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial \hat{C}}{\partial \tau}$$

$$A \text{ vérifie donc : } -\gamma (q^2 \exp(-2\sigma \tau) + m^2 \exp(2\sigma \tau)) A(\tau) \cos q x \cos m z = A'(\tau) \cos q x \cos m z$$

Les conditions initiales imposent $A(0) = 1$. L'intégration sur $t (= \tau)$ donne donc :

$$A(t) = \exp \left(\frac{\gamma}{2\sigma} (q^2 e^{-2\sigma t} - m^2 e^{2\sigma t}) \right)$$

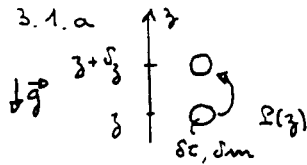
2.4. f $A(t)$ est l'amplitude, lorsque $t \gg \frac{1}{\sigma}$ $q^2 e^{-2\sigma t}$ est négligeable devant $m^2 e^{2\sigma t}$ et l'amplitude vaut environ : $A(t) \approx \exp \left(-\frac{\gamma m^2}{2\sigma} (e^{2\sigma t}) \right)$

ce qui correspond à une atténuation extrêmement brutale au delà de $t = \frac{1}{\sigma}$.

Le mélange est donc encore plus rapide que dans le cas précédent.

3. ONDES INTERNES

3.1. a



Equilibre de la particule δm dans son état initial :

$$-\delta m g - \frac{\partial P}{\partial z}(z) \delta z = 0$$

Equation du mouvement de la particule déplacée :

$$\delta m \ddot{\delta z} = -\delta m g - \frac{\partial P}{\partial z}(z + \delta z) \delta z \quad \left(\begin{array}{l} \delta t \text{ constant} \\ \text{champ de pression non modifié} \end{array} \right)$$

En soustrayant la 1^{re} équation :

$$\ddot{\delta z} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}(z) \delta z = 0 \quad \left(\text{avec } \frac{\delta m}{\delta z} = \bar{\rho}(z) \right)$$

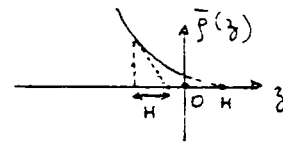
Par ailleurs l'équilibre du fluide impose $\frac{\partial P}{\partial z} = -\bar{\rho} g$ donc $\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = -\bar{\rho}' g$

Donc $\ddot{\delta z} - \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}} g \delta z = 0$ et $N = \sqrt{-\frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}} g}$ δz oscille à la pulsation N .

3.1. b Les grandeurs physiques intervenant sont $\bar{\rho}, \bar{\rho}', g$. $\bar{\rho}$ peut s'exprimer en fonction de $\bar{\rho} g$ par l'équilibre. La pulsation N doit donc s'écrire en fonction de $\bar{\rho}$ et g .

or $[g] = m \cdot s^{-2}$, en divisant par des mètres et en prenant la racine carrée on obtient des s^{-1} . $N \propto \sqrt{-\frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}} g}$.

3.1. c $\frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}} = \frac{d\bar{\rho}}{dz} = -\frac{1}{H} \Rightarrow \bar{\rho} = \bar{\rho}_0 \exp(-\frac{z}{H})$



3.2. a Conservation de la masse : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$. Incompressible : $\text{div} \vec{v} = 0$

d'où $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} \rho = 0$

3.2. b Conservation de la masse $\Rightarrow \frac{\partial \rho_e}{\partial t} + w \frac{d\bar{\rho}}{dz} = 0$ (1)

Incompressibilité $\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ (2)

Projection horizontale Euler $\Rightarrow \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial P_e}{\partial x}$ (3)

Projection verticale Euler $\Rightarrow \rho_0 \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial P_e}{\partial z} - \rho_e g$ (4) (car $-\frac{\partial P}{\partial z} - \bar{\rho} g = 0$)

3.2. c (2) $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 P_e}{\partial z \partial x^2} = -\frac{1}{\rho_0} \left(g \frac{\partial^2 \rho_e}{\partial x^2} + \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right)$

D'où : $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial^2 \rho_e}{\partial x^2} = 0$; $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \rho_e}{\partial x^2} \right) = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{d\bar{\rho}}{dz}$ (selon (1))

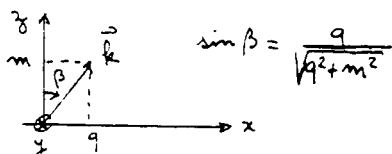
En dérivant par rapport à t :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \frac{g}{\rho_0} \frac{d\bar{\rho}}{dz} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

$v = N^2$

3.2. d $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \leftrightarrow -\omega^2$ $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \leftrightarrow -q^2$ $\frac{\partial^2}{\partial z^2} \leftrightarrow -m^2$ Après simplifications nous obtenons :

$\omega^2 (q^2 + m^2) \hat{w} - N^2 q^2 \hat{w} = 0$ d'où $\omega^2 = N^2 \frac{q^2}{q^2 + m^2}$ (relation de dispersion)



$\sin \beta = \frac{q}{\sqrt{q^2 + m^2}}$

$\omega = N |\sin \beta|$

3.2.e Si $\omega > N$, la relation impose $q^2 + m^2 < q^2$ donc $m^2 < 0$, m imaginaire pur. Il y a propagation selon ox mais atténuation exponentielle selon oz .

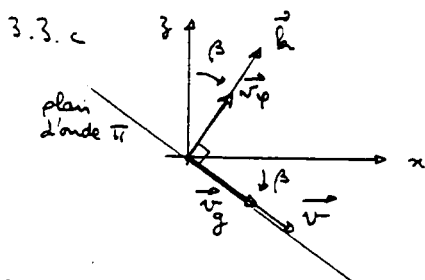
Si $\omega < N$ il y a propagation selon $\vec{k} = q\vec{e}_x + m\vec{e}_z$ (q et m sont réels).

3.3.a $\frac{\vec{p}}{k} = \sin \beta \vec{e}_x + \cos \beta \vec{e}_z$ et $\omega = N \sin \beta$ ($\beta \in]0, \pi[$)

où $\vec{v}_g = \frac{N}{k} \sin^2 \beta \vec{e}_x + \frac{N}{k} \sin \beta \cos \beta \vec{e}_z$

3.3.b $\omega = N \frac{q}{\sqrt{q^2 + m^2}}$ ($m > 0$) $\Rightarrow \frac{d\omega}{dq} = N \frac{m^2}{(q^2 + m^2)^{3/2}}$, $\frac{d\omega}{dm} = -N \frac{mq}{(q^2 + m^2)^{3/2}}$

soit encore: $\frac{d\omega}{dq} = \frac{N}{k} \cos^2 \beta$ et $\frac{d\omega}{dm} = -\frac{N}{k} \cos \beta \sin \beta$ $\vec{v}_g = \frac{N}{k} \cos \beta (\cos \beta \vec{e}_x - \sin \beta \vec{e}_z)$



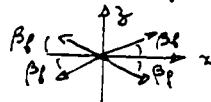
$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \Rightarrow -iq \hat{u} - im \hat{w} = 0$
 $\Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{v} = 0 \quad \vec{k} \perp \vec{v}$

(onde transverse).

Ce qui est très particulier, c'est que $\vec{v}_g \perp \vec{k}$!

3.3.d Le solide "rayonne" des ondes de pulsation $\omega_f = N |\sin \beta_f|$ ($\omega_f < N$)

On peut donc observer des rayons dans les directions $\pm \arcsin(\frac{\omega_f}{N})$ par rapport à l'horizontale.



Aucune condition n'est imposée sur k par la relation de dispersion, donc aucune longueur d'onde particulière n'est excitée ($k = \frac{2\pi}{\lambda}$).

3.4.a $e_c = \frac{1}{2} \rho_0 (u^2 + w^2)$; $\frac{\partial e_c}{\partial t} = \rho_0 u \frac{\partial u}{\partial t} + \rho_0 w \frac{\partial w}{\partial t}$ Avec les équations (3) et (4) et (2)

on obtient: $\frac{\partial e_c}{\partial t} = -u \frac{\partial p_c}{\partial x} - w \frac{\partial p_c}{\partial z} - p_c w g = -\frac{\partial}{\partial x} (u p_c) - \frac{\partial}{\partial z} (w p_c) - p_c w g$ (car $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$)

grâce à (4) on trouve: $w = -\frac{1}{\frac{dp_c}{dz}} \cdot \frac{\partial p_c}{\partial t}$ donc $-p_c w g = + \frac{g}{\frac{dp_c}{dz}} p_c \frac{\partial p_c}{\partial t} = -\frac{g^2}{2\rho_0} \left(-\frac{\rho_0}{g \frac{dp_c}{dz}} \right) \frac{\partial p_c^2}{\partial t}$

Finalement $\frac{\partial e_c}{\partial t} = -\text{div}(p_c \vec{v}) - \frac{g^2}{2\rho_0 N^2} \frac{\partial p_c^2}{\partial t}$ posons $e_p = \frac{g^2 p_c^2}{2\rho_0 N^2}$ et $\vec{I} = p_c \vec{v}$

$\frac{\partial e_c}{\partial t} = -\frac{\partial e_p}{\partial t} - \text{div} \vec{I}$, on $\boxed{\frac{\partial (e_c + e_p)}{\partial t} + \text{div} \vec{I} = 0}$

e_c = énergie cinétique volumique de l'onde, e_p son énergie potentielle volumique, $\vec{I}$ est le vecteur densité de courant d'énergie.

3.4.b ??

$$3.4.c \quad \langle e_c \rangle = \frac{1}{4} \rho_0 (\hat{u}^2 + |\hat{w}|^2) \quad \langle e_p \rangle = \frac{g^2}{4 \rho_0 N^2} |\hat{p}_e|^2$$

$$(1) \Rightarrow i \omega \hat{p}_e = - \frac{d\bar{p}}{dy} \hat{w}, \quad |\hat{p}_e|^2 = \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{d\bar{p}}{dy} \right)^2 |\hat{w}|^2 \quad \text{d'où } \langle e_p \rangle = \frac{g^2 \left(\frac{d\bar{p}}{dy} \right)^2}{\omega^2 4 \rho_0 N^2} |\hat{w}|^2$$

$$\langle e_p \rangle = \rho_0 \frac{g^2 \left(\frac{d\bar{p}}{dy} \right)^2}{4 \rho_0^2 N^4} \left(1 + \frac{m^2}{q^2} \right) |\hat{w}|^2 \quad \langle e_p \rangle = \frac{1}{4} \rho_0 \left(1 + \frac{m^2}{q^2} \right) |\hat{w}|^2$$

$$(2) \Rightarrow -i q \hat{u} - i m \hat{w} = 0, \quad |\hat{u}|^2 = \frac{m^2}{q^2} |\hat{w}|^2 \quad \text{donc} \quad \boxed{\langle e_c \rangle = \frac{1}{4} \rho_0 \left(1 + \frac{m^2}{q^2} \right) |\hat{w}|^2 = \langle e_p \rangle}$$

On retrouve ce même résultat pour les OPPH acoustiques, celles d'une corde vibrante ou plus simplement pour un oscillateur mécanique harmonique.

Energie volumique totale moyenne: $\langle e_{tot} \rangle = \frac{1}{2} \rho_0 \left(1 + \frac{m^2}{q^2} \right) |\hat{w}|^2$

$$3.4.d. \quad \langle \vec{I} \rangle = \langle p_e u \rangle \vec{e}_x + \langle p_e w \rangle \vec{e}_z \quad \text{or} \quad +i q \hat{p}_e = i \rho_0 \omega \hat{u} \Rightarrow \hat{p}_e = + \frac{\rho_0 \omega}{q} \hat{u}$$

et $\hat{u} = -\frac{m}{q} \hat{w}$ d'où $\langle p_e u \rangle = \frac{1}{2} \hat{p}_e \hat{u}^* = + \frac{1}{2} \frac{\rho_0 \omega}{q} \left(\frac{m}{q} \right)^2 |\hat{w}|^2 = + \frac{1}{2} \frac{\rho_0 \omega m^2}{q^3} |\hat{w}|^2$

et $\langle p_e w \rangle = \frac{1}{2} \hat{p}_e \hat{w}^* = - \frac{1}{2} \frac{\rho_0 \omega m}{q^2} |\hat{w}|^2$, soit $\boxed{\langle \vec{I} \rangle = \frac{1}{2} \frac{\rho_0 \omega m}{q^2} |\hat{w}|^2 \left(\frac{m}{q} \vec{e}_x - \vec{e}_z \right)}$

Par ailleurs $\vec{v}_g = \frac{\omega \cos \beta}{k \sin \beta} (\vec{e}_x - \tan \beta \vec{e}_z) = \frac{\omega m^2}{q(q^2 + m^2)} (\vec{e}_x - \frac{q}{m} \vec{e}_z)$

$$\langle e_{tot} \rangle \vec{v}_g = \frac{1}{2} \rho_0 \frac{q^2 + m^2}{q^2} |\hat{w}|^2 \frac{\omega m^2}{q(q^2 + m^2)} (\vec{e}_x - \frac{q}{m} \vec{e}_z) = \frac{1}{2} \rho_0 \frac{\omega m}{q^2} |\hat{w}|^2 \left(\frac{m}{q} \vec{e}_x - \vec{e}_z \right)$$

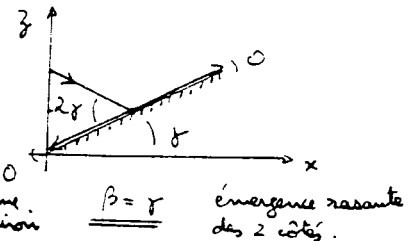
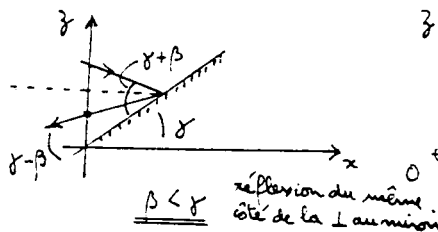
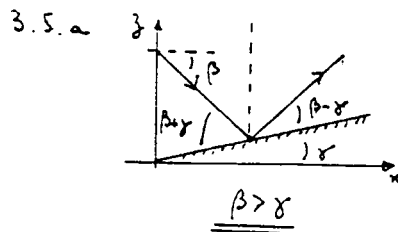
On obtient donc $\boxed{\langle \vec{I} \rangle = \langle e_{tot} \rangle \vec{v}_g}$, ce qui signifie que $\vec{v}_g$ représente la vitesse de propagation de l'énergie totale.

$$3.4.e \quad \omega = N \sin \beta \quad \Rightarrow \quad \sin \beta = \pm \frac{0,01}{0,02} = \pm 0,5 \quad \beta = \pm 60^\circ, \pm 120^\circ$$

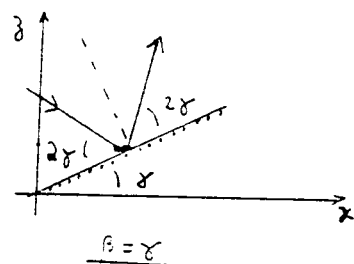
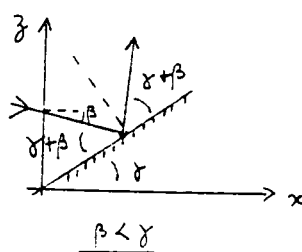
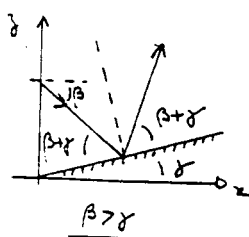
Les rayons peuvent donc se propager selon les directions formant des angles de $\pm 60^\circ, \pm 120^\circ$ avec l'horizontale. $|\hat{w}| = 1 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\frac{2\pi}{|\mathbf{q}|} = 3,14 \text{ m}$ soit $|\mathbf{q}| = 2 \text{ m}^{-1}$.

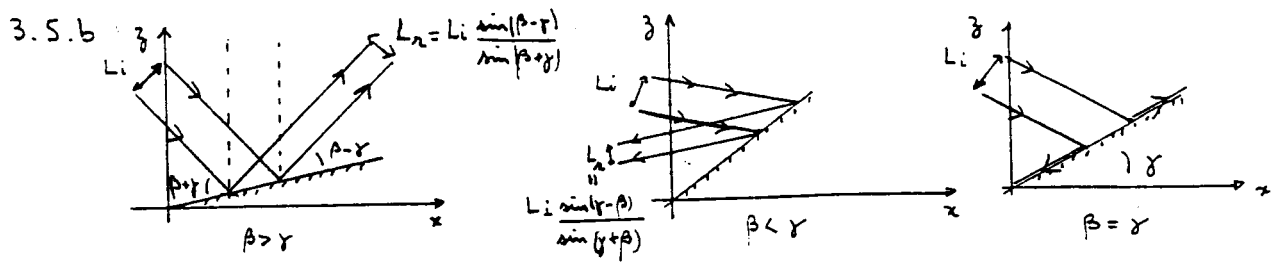
Le flux d'énergie par unité de surface perpendiculaire à un rayon est $|\langle \vec{I} \rangle| = \langle e_{tot} \rangle v_g$

$$|\langle \vec{I} \rangle| = \frac{1}{2} \rho_0 \sqrt{1 + \frac{m^2}{q^2}} |\hat{w}|^2 \frac{\omega m}{q^2} = \frac{1}{2} \rho_0 \frac{\omega}{q} \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} |\hat{w}|^2 = \frac{1}{2} 1050 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2} 0,01 \cdot 10^{-4} \approx 9 \cdot 10^{-4} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$



Dans le cas des ondes acoustiques ce sont les lois de Descartes pour la réflexion qui prévalent.





Les rayons réfléchis "s'éloignent" toujours de la normale au miroir, donc L_r est toujours plus petit que L_i . Le minimum est $L_r = 0$ si $\beta = \gamma$.

La puissance réfléchie doit être égale à la puissance incidente (conservation de l'énergie);

comme $L_r = 0$ dans le cas $\beta = \gamma$, il s'ensuit que $\langle \vec{I} \rangle$ diverge (donc $\frac{|\hat{w}|^2}{q}$ diverge).

En faisant l'hypothèse que l'énergie volumique $\langle e_{tot} \rangle$ ($\propto |\hat{w}|^2$) ne diverge pas, il reste que $\frac{1}{q}$ diverge donc $\vec{v}_g$ diverge.... Sinon c'est $|\hat{w}|^2$ qui diverge...

3.5.c On peut penser qu'il s'agit de la concentration, au voisinage du plan incliné sous-marin, d'ondes de fréquence 0,5 cph arrivant en incidence de 24°

3.5.d Dans le cas $\beta = \gamma$ l'onde se propageant le long du fond marin et une onde de surface. (Envisager q et m complexes....)

Il faudrait faire intervenir l'élasticité du fond marin et la possibilité pour les ondes de s'y propager....

3.5.e La puissance des ondes internes étant importante le long du fond marin, le mouvement du fluide correspondant contribue plus efficacement au mélange...