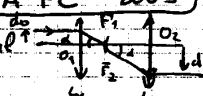
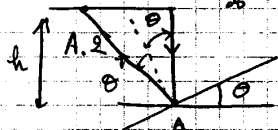


# Correction Pb gouttes et plaques? (E3A PC 2003) p03 rp1

A.1. Former un système sphérique  avec  $\cos \theta = \frac{d_0}{r} = \frac{d}{r_2}$

donc  $r_2 = \frac{d}{\cos \theta} = 5 \mu m$  et  $r_1 = 6 \mu m$

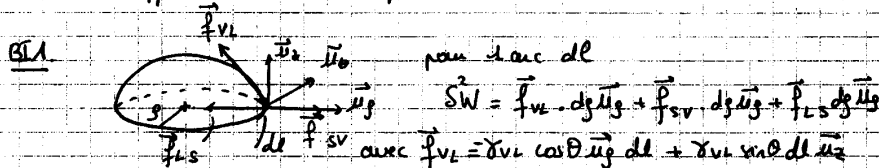


Loi de Descartes de la réflexion donc l'angle du rayon réfléchi est de  $2\theta$

A.3. pour  $B \neq A$   $d < \theta$  donc  $2d < 2\theta$  et ce rayon réfléchi n'est pas sur le bord de la tache

A.4.  $\tan 2\theta = \frac{D-d}{2h} = \frac{4,2-0,5}{2 \times 12} = 0,15$  d'où  $\theta = 4,4^\circ$

A.5. l'ouverture angulaire du faisceau diffracté est  $\theta' = \frac{\lambda}{S} = \frac{638 \cdot 10^{-9}}{3,5 \cdot 10^{-3}} = 1,82 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 0,0104^\circ < 2\theta$   
→ la diffraction ne peut se faire la mesure de  $\theta$ .



$\vec{f}_{SV} = \gamma_{SV} d\vec{u}_g$   $\vec{f}_{LS} = -\gamma_{LS} d\vec{u}_g$

$\delta W = (-\gamma_{VL} \cos \theta + \gamma_{SV} - \gamma_{LS}) dl$

B.I.2. En intégrant sur toute la ligne triple de longueur  $l = \int dl = \int r_2 d\theta$

on obtient  $\delta W = (-\gamma_{VL} \cos \theta + \gamma_{SV} - \gamma_{LS}) \int r_2 d\theta$  (cf p.1)

B.I.3. à l'équilibre  $\delta W = 0$  donc  $-\gamma_{VL} \cos \theta_E + \gamma_{SV} - \gamma_{LS} = 0$

$\cos \theta_E = \frac{\gamma_{SV} - \gamma_{LS}}{\gamma_{VL}}$  avec  $-1 \leq \cos \theta_E \leq +1$

soit  $-1 \leq \frac{\gamma_{SV} - \gamma_{LS}}{\gamma_{VL}} \leq +1$

B.I.4. la condition  $\gamma_{SV} - \gamma_{LS} > \gamma_{VL}$  n'est pas cohérente avec l'existence de  $\theta_E$ , mais donne  $\gamma_{SV} - \gamma_{LS} - \gamma_{VL} \cos \theta > 0$

une évolution spontanée vers donc l'augmentation de  $S$  jusqu'à l'étalement complet de la goutte qui aura donc une épaisseur nulle.

B.I.1. On peut exprimer le travail  $\delta W$  par :

$\delta W = (\gamma_{SV} - \gamma_{LS} - \gamma_{VL} \cos \theta_1) f_1 dS + (\gamma_{SV} - \gamma_{LS} - \gamma_{VL} \cos \theta_2) f_2 dS$

$\delta W = 0$  donc  $(\gamma_{SV} - \gamma_{LS}) (f_1 + f_2) - \gamma_{VL} (f_1 \cos \theta_1 + f_2 \cos \theta_2) = 0$

d'où  $\frac{\gamma_{SV} - \gamma_{LS}}{\gamma_{VL}} = f_1 \cos \theta_1 + f_2 \cos \theta_2 = \cos \theta^*$

B.I.2. sur la fraction  $(1-f)$  de la surface d'interaction a lieu uniquement entre le solide et la vapeur donc  $\theta_{SV} = \pi$

sur la fraction  $f$ , il s'agit d'une interaction liquide-vapeur uniquement donc  $\theta_{LV} = \theta_E = \theta_L$

B.I.3. on en déduit que  $\cos \theta_E^* = f \cos \theta_E + (1-f) \cos \pi$

$\cos \theta_E^* = f \cos \theta_E - (1-f)$

Calculons  $\cos \theta_E^* - \cos \theta_E = \cos \theta_E (f-1) - (1-f) = -(1-f)(\cos \theta_E + 1)$

avec  $1-f > 0$   $\frac{\pi}{2} < \theta_E \leq \pi$   $-1 \leq \cos \theta_E \leq 0$

donc  $0 \leq \cos \theta_E + 1 \leq 1$

donc  $\cos \theta_E^* - \cos \theta_E \leq 0$

$\cos \theta_E^* \leq \cos \theta_E$  donc  $\theta_E^* \geq \theta_E$

La rugosité amplifie l'hydrophobie

B.I.4. Pour une goutte sphérique  $\theta_E^* = \pi$  donc  $f=0$ , c'est à dire qu'il n'y a pas d'interaction solide-liquide réaliste pour un contact ponctuel... mais peu vraisemblable

AN  $\theta_E = 120^\circ$   $\cos \theta_E^* = 0,1 \times \cos 120 - 0,9 = -0,95$

$\theta_E^* = 162^\circ$   $\theta_E^* > \theta_E$  OK

B.I.5. pour une insecticide liquide il faut que le contact soit max/mum, il doit être hydrophile donc  $\theta_E = \pi/2$  semble le plus approprié

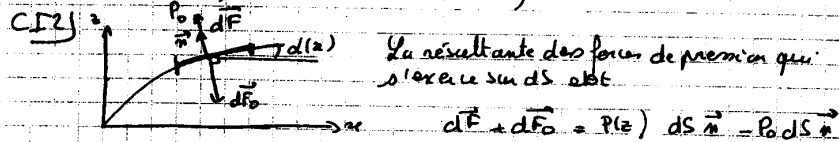
Pour un insecticide imperméabilisant, hydrophobe il faut  $\theta > \pi/2$  et ce contact sera encore amélioré par une ligne rugueuse

CI1) Il suffit d'appliquer la relation fondamentale de la statique pour un fluide incompressible :

$$-\text{grad } P + \mu \vec{g} = 0 \quad \text{soit sur Oz} \quad -\frac{\partial P}{\partial z} - \mu g = 0$$

$$\text{d'où } P(z) = -\mu g z + \text{cte} \quad \text{avec } P(z = e_n) = P_0 = -\mu g e_n + \text{cte}$$

$$\text{d'où } cte = P_0 + \mu g e_n \quad \text{et } \boxed{P(z) = P_0 + \mu g (e_n - z)}$$



où  $\vec{n}$  est perpendiculaire à  $d\vec{s}$ .

$$\text{Sur Oz} \quad d\vec{F} \cdot \vec{n} + d\vec{F}_0 \cdot \vec{n} = (P(z) - P_0) d\vec{s} \cdot \vec{n} = dF_n$$

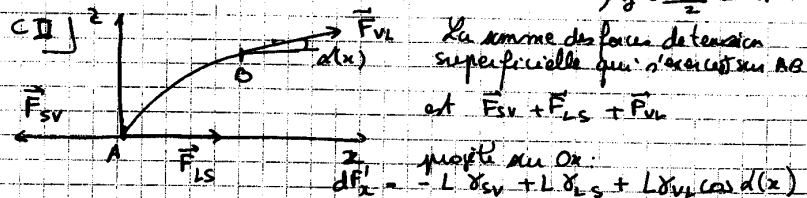
$$\text{et } \vec{n} \cdot \vec{n} = -\cos \alpha(z) \rightarrow \text{on introduit } e(z) \text{ et } e_n$$

$$\text{d'où } dF_n = \mu g (z - e_n) \cos \alpha(z) d\vec{s} \quad \text{et } d\vec{s} = L d\ell$$

$$= \mu g (z - e_n) L \cos \alpha(z) d\ell \quad \text{sin } \alpha(z) = \frac{dz}{d\ell}$$

$$= \mu g (z - e_n) L \cos \alpha(z) dz = \mu g (z - e_n) L dz \quad \text{cqd} \quad \text{CI3) } F_n = \int_0^{e(z)} \mu g (z - e_n) L dz$$

$$= \mu g \left( \frac{e(z)^2}{2} - e_n e(z) \right)$$



III-1) L'interface étant en équilibre la somme des deux résultantes est nulle :

$$\mu g \left( \frac{e(z)^2}{2} - e_n e(z) \right) L dz = L \gamma_{sv} + L \gamma_{ls} + L \gamma_{tn} \cos \alpha(z) = 0$$

$$\text{d'où } e_n e(z) - \frac{e(z)^2}{2} = \left( \gamma_{tn} \cos \alpha(z) - (\gamma_{sv} - \gamma_{ls}) \right) \frac{1}{\mu g}$$

$$= \frac{\gamma_{tn}}{\mu g} (\cos \alpha(z) - \frac{\gamma_{sv} - \gamma_{ls}}{\gamma_{tn}})$$

$$\boxed{e_n e(z) - \frac{e(z)^2}{2} = \frac{\gamma_{tn}}{\mu g} (\cos \alpha(z) - \cos \theta_E)} \quad \text{cqd.}$$

III-2) Lorsque  $e(z) = e_n$   $\alpha(z) = 0$  d'où  $\frac{e_n^2}{2} = \frac{\gamma_{tn}}{\mu g} (1 - \cos \theta_E)$

$$\text{et } \boxed{e_n = \sqrt{\frac{2\gamma_{tn}}{\mu g} (1 - \cos \theta_E)}}$$

$$\text{IV) si } \theta_E \text{ est petit } \cos \theta_E = 1 - \frac{\theta_E^2}{2} \quad \cos \alpha(z) = 1 - \frac{\alpha(z)^2}{2}$$

$$\text{d'où } \cos \alpha(z) - \cos \theta_E = \frac{\theta_E^2 - \alpha(z)^2}{2}$$

$$\text{et } e_n = \sqrt{\frac{2\gamma_{tn}}{\mu g} (1 - \cos \theta_E)} \approx \theta_E l_c$$

$$\text{d'où } e_n e(z) - \frac{e(z)^2}{2} = \frac{\gamma_{tn}}{\mu g} (1 - \alpha(z)^2)$$

$$\text{en dérivant par rapport à } z : e_n \frac{de}{dz} - e(z) \frac{de}{dz} = -\frac{\gamma_{tn}}{\mu g} \frac{d\alpha(z)}{dz}$$

$$\text{or } \tan \alpha(z) = \frac{dz}{dx} \approx \alpha(z) \quad \frac{d\alpha(z)}{dz} = \frac{1}{dx} \frac{d\alpha(z)}{dz} = -\frac{\gamma_{tn}}{\mu g} \frac{d\alpha(z)}{dz}$$

$$\text{soit } \left[ \frac{de}{dz} - \frac{e(z)}{l_c} = \frac{e_n}{l_c} \right] \quad \text{qui n'est pas l'équation différentielle donnée dans l'énoncé mais qui a les mêmes solutions. Penchons nous donc encore d'un peu !}$$

$$\text{d'où } e(z) = e_n + A e^{-x/l_c} + B e^{x/l_c}$$

$$\text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} e(z) = e_n \quad \text{d'où } B = 0$$

$$\text{et } e(z) = 0 = e_n + A \quad \text{d'où } A = -e_n$$

$$\boxed{e(z) = e_n (1 - e^{-x/l_c})}$$

$l_c$  est la distance caractéristique de variation de  $e(z)$ .  
 $l_c(l_c) \approx 6376 e_n$

CI4) pour  $x \approx 3l_c$   $e(z) \approx e_n$  donc si  $L \gg 3l_c$  la condition est vérifiée soit  $\frac{L}{l_c} \ll 1$

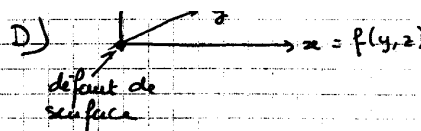
Si cette condition est remplie le volume de la plaque est  $\Delta V \approx L^2 e_n$

$$\theta_E = \pi/180 \quad e_n \approx \frac{\pi}{180} \times 3 \cdot 10^{-3} \quad \text{et } L = \sqrt{\frac{V}{e_n}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 10^{-3}}{3\pi \cdot 10^{-5}}} \approx 34 \mu\text{m}$$

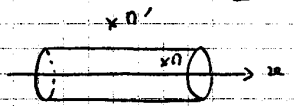
$$\boxed{L = 8 \mu\text{m}} \rightarrow \text{plaque très étendue}$$

$$\theta_E = \pi \quad e_n = \sqrt{\frac{2\gamma_{tn}}{\mu g} (1 - (-1))} = \frac{2\gamma_{tn}}{\mu g} \quad L = \sqrt{\frac{6 \cdot 10^{-3}}{2 \times 3 \cdot 10^{-5}}} = 6 \text{ mm}$$

$$\boxed{L = 1 \text{ m}} \rightarrow \text{plaque peu étendue}$$

D)   $x = f(y, z)$   $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Phi_0$  en un point de défaut de rayon  $r_0$   
 $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$  sans défaut

DI] Maxwell-Gauss:  $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  Maxwell-Faraday:  $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$  donc  $\vec{E} = -\text{grad } V$   
 d'où  $\text{div}(-\text{grad } V) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$  et  $\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$  Equation de Poisson

DI]   $x$   $n$  et à l'intérieur du fil:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho(n)}{\epsilon_0}$$

si  $n$  est à l'extérieur du fil  $\rho(n) = 0$

et  $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$

Le fil étant infini, il est invariant par translation selon  $z$  donc  $V(x, y, z) = V(y, z)$ , la potentielle ne dépend pas de  $z$ .

d'où pour n à l'intérieur du fil:  $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0}$   
 pour n à l'extérieur du fil:  $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$

on remarque que ces équations sont analogues à celles de l'élasticité:

$f(y, z) \leftrightarrow V(y, z)$   
 $\Phi(y, z) \leftrightarrow -\frac{\rho(y, z)}{\epsilon_0}$

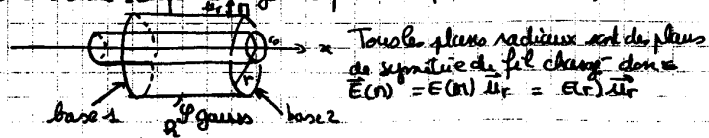
avec pour n à l'intérieur du fil ou du défaut:  $\Phi(y, z) = \Phi_0$   
 $\rho(y, z) = \rho_0$   
 et pour n à l'extérieur du défaut:  $\Phi(y, z) = 0$   
 $\rho(y, z) = 0$

on peut poser  $\Phi(y, z) = -\frac{k}{\epsilon_0} g(y, z)$

k constante dimensionnée [k] =  $\frac{[\Phi]}{[\frac{\rho}{\epsilon_0}]} = \frac{\frac{m}{m^2}}{[\text{div } \vec{E}]} = \frac{m^{-1}}{V \cdot m^{-2}} = m^{-1} V \cdot m^2$   
 $[k] = m \cdot V^{-1}$

DII] Théorème de Gauss:  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$

Prendons une surface de Gauss passant par n ( $r > r_0$ )



$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{surf. latérale}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{Base 1}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{Base 2}} \vec{E} \cdot d\vec{S}$   
 $= E(r) \int_{\text{surf. latérale}} dS = E(r) 2\pi r h$

$Q_{\text{int}} = \int_0^h \rho_0 2\pi r dr$  d'où  $E(r) \neq 1/r = \frac{\rho_0 2\pi r_0^2}{\epsilon_0}$

$\vec{E}(r) = \frac{\rho_0 r_0^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{r} \vec{u}_r$  et  $\vec{E}(y, z) = \frac{\rho_0 r_0^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{y^2 + z^2}} \vec{u}_r$

Sachant que  $\vec{E} = -\text{grad } V$   $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{\rho_0 r_0^2}{2\epsilon_0} \frac{dr}{r}$

d'où  $V(r) = -\frac{\rho_0 r_0^2}{2\epsilon_0} \ln r + \text{const}$

avec  $V(r_0) = -\frac{\rho_0 r_0^2}{2\epsilon_0} \ln r_0 + \text{const} = 0$  d'où  $\text{const} = \frac{\rho_0 r_0^2}{2\epsilon_0} \ln r_0$

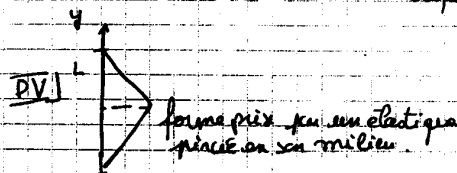
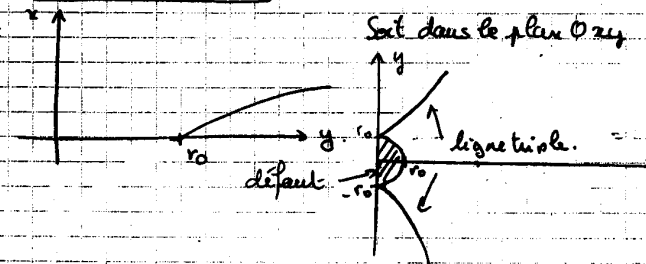
et  $V(r) = -\frac{\rho_0 r_0^2}{2\epsilon_0} \ln \frac{r}{r_0}$  d'où  $V(y, z) = -\frac{\rho_0 r_0^2}{2\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{r_0}$

D. IV] A partir de l'analogie  $f(y, z) \leftrightarrow V(y, z)$  avec  $\Phi_0 = -\frac{k}{\epsilon_0} \rho_0$

on en déduit que  $\Phi(y, z) = \frac{\Phi_0}{k} \frac{r_0^2}{2} \ln \left( \frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{r_0} \right) = x$

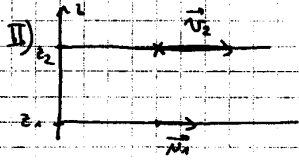
et en  $z = 0$   $x = \frac{\Phi_0 r_0^2}{k} \frac{1}{2} \ln \left( \frac{|y|}{r_0} \right)$  pour  $|y| > r_0$

on en déduit



→ la ligne triple se comporte comme un élastique!

E) I) (E) = équation de Navier-Stokes  $\mu \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right] = -\text{grad } p + \vec{\mu} \vec{g} + \eta \Delta \vec{v}$



1) L'écoulement est stationnaire  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$

d'autre part  $\vec{v} = v(z) \vec{u}_x$

d'où  $(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = v \frac{\partial}{\partial z} v \vec{u}_x$

et  $(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = v \frac{\partial}{\partial z} (v(z) \vec{u}_x) = v \frac{\partial v}{\partial z} \vec{u}_x = \vec{0}$

or  $\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \vec{0}$  donc l'accélération du fluide est nulle.

2) par hypothèse on néglige la pesanteur donc  $\vec{\mu} \vec{g} \approx \vec{0}$  et on considère le champ de pression uniforme  $\text{grad } p = \vec{0}$ , l'équation de Navier-Stokes devient  $\eta \Delta \vec{v} = \vec{0}$

Soit  $\frac{d^2 v}{dz^2} = 0$  d'où  $v(z) = Az + B$

avec  $v(z_1) = v_1 = Az_1 + B$  et  $v(z_2) = v_2 = Az_2 + B$

d'où  $A = \frac{v_2 - v_1}{z_2 - z_1}$  et  $B = v_1 - \left( \frac{v_2 - v_1}{z_2 - z_1} \right) z_1$

d'où  $v(z) = v_1 + \left( \frac{v_2 - v_1}{z_2 - z_1} \right) (z - z_1)$  c.q.f.d.

3) Si on fait l'hypothèse que  $v_2 > v_1$  alors la plaque supérieure "entraîne" le fluide et la plaque inférieure "freine".

Les forces de cisaillement exercées par la plaque sur le fluide.

soit  $d\vec{F}_2 = \eta \left( \frac{dv}{dz} \right)_{(z_2)} dS \vec{u}_x = \eta \left( \frac{v_2 - v_1}{z_2 - z_1} \right) dS \vec{u}_x$

et  $d\vec{F}_1 = -\eta \left( \frac{dv}{dz} \right)_{(z_1)} dS \vec{u}_x = -\eta \left( \frac{v_2 - v_1}{z_2 - z_1} \right) dS \vec{u}_x$

4) La puissance des forces de viscosité et  $d\mathcal{P} = d\vec{F}_1 \cdot \vec{v}_1 + d\vec{F}_2 \cdot \vec{v}_2$

$d\mathcal{P}_{ext} = \eta \left( \frac{v_2 - v_1}{z_2 - z_1} \right) dS (-v_1 + v_2) = \eta \frac{(v_2 - v_1)^2}{z_2 - z_1} dS$

$d\mathcal{P}_{ext} = \eta \frac{(v_1 + v_2)^2}{z_2 - z_1} dS$

5) L'énergie cinétique du système forme ne varie pas dans le temps car la vitesse ne dépend que de  $z$ , donc  $\frac{d\mathcal{E}^k}{dt} = \mathcal{P}_{int} + \mathcal{P}_{ext} = 0$

on en déduit que  $d\mathcal{P}_{int} = -d\mathcal{P}_{ext} = -\eta \frac{(v_1 - v_2)^2}{z_2 - z_1} dS$

soit  $v_2 = v(z_2) = v(z) + \frac{dv}{dz} dz$  et  $v_1 = v(z)$   $z_2 = z + dz$   
 $= v(z) + \frac{dv}{dz} dz$   $z_1 = z$

d'où  $d\mathcal{P}_{int} = -\eta \left( \frac{dv}{dz} \right)^2 dz dS = -\eta \left( \frac{dv}{dz} \right)^2 dz dS$   
 $= -\eta \left( \frac{dv}{dz} \right)^2 dz dS$  c.q.f.d.

Le signe négatif est justifié car les forces de viscosité et des forces dissipatives.

III. 1)  $\mathcal{P}_{int} = \int d\mathcal{P}_{int} = -\eta \left( \frac{dv}{dz} \right)^2 \int dz = -\eta \left( \frac{dv}{dz} \right)^2 V = -\eta \frac{(dv)^2}{dz^2} V$

2) La somme des puissances étant nulle  $\mathcal{P}_{int} + \mathcal{P}_{ext} = 0$

$-\eta \frac{(dv)^2}{dz^2} V + \eta \frac{(dv)^2}{dz^2} V = 0$

soit  $\frac{dv}{dz} = \frac{\pi \rho^3 \Theta_D^3}{V \eta} = 0$   $\frac{dv}{dz} = \frac{\pi \rho^3 \Theta_D^3}{V} v = 0$

3)  $V = \frac{\pi \rho(t) \Theta_D(t)}{3}$   $\frac{dv}{dt} = \frac{\pi \rho^3 \Theta_D^3}{V} \frac{3^4 V^4}{\pi^4 \rho^{12}} = 0$   
 $\frac{dv}{dt} = \frac{V^3}{\pi^3} \frac{81 v^4}{\rho^9} = 0$

d'où  $\int \frac{dv}{v^4} = \frac{V^3}{\pi^3} 81 v^4 dt$

$\frac{1}{3} (v^{-3} - v_0^{-3}) = \frac{V^3}{\pi^3} 81 v^4 t$

$v^{10} = v_0^{10} + 810 \frac{V^3}{\pi^3} v^4 t$

$v(t) = \frac{1}{d} t^d$  on en déduit  $d = 1/10$