

CENTRALE PSI PHYSIQUE I 2005

Préliminaires:

1) Dans l'approximation des milieux continus, on définit une particule de fluide comme un élément de masse de fluide de dimension « mésoscopique », i.e. à la fois grande devant l'échelle microscopique et petite devant les dimensions macroscopiques.

Cela permet ici de considérer les grandeurs associées au trafic comme des fonctions de la variable x , ces grandeurs correspondent en fait à une moyenne sur une dimension L' , grande par rapport à la distance L séparant deux véhicules mais petite par rapport aux échelles spatiales étudiées.

2a) veh m^{-1}

2b) $n_{\max} = 1/L_0$

3a) veh s^{-1}

3b) Soit δN le nombre de voiture traversant la section de la route situé à l'abscisse x entre t et $t+dt$: ce sont les voitures comprises dans le "cylindre" de longueur $v dt$.

$$\delta N = n(x,t) v(x,t) dt$$

Or $j(x,t) = \delta N / dt$ d'où le résultat.

Diffusion de particules, mécanique des fluides, conduction électrique....

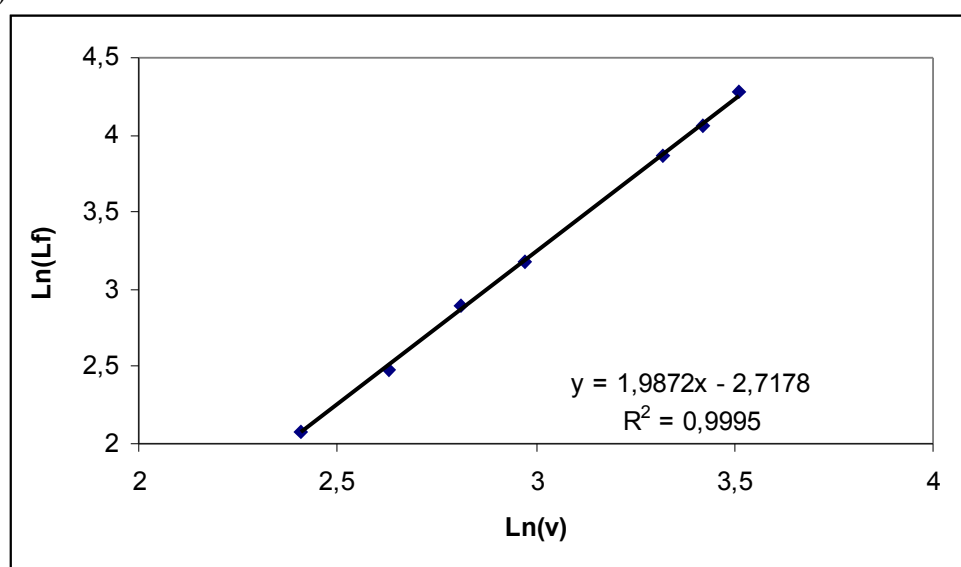
Partie I

IA1a) Le premier terme est la distance de freinage.

Pour avoir l'expression de C , on applique le théorème de l'énergie cinétique à la voiture entre le moment où la voiture va à la vitesse v et le moment où elle est arrêtée:

$\frac{1}{2} M v^2 = f M g L_f$ d'où $L_f = \frac{v^2}{2g}$ est bien proportionnelle à la vitesse au carré. On identifie alors $C = \frac{1}{2g}$

b) On trace, par exemple, $\ln(\text{distance de freinage})$ en fonction de $\ln(\text{vitesse en mètre par seconde})$



La pente est bien proche de 2.

L'ordonnée à l'origine est $\ln(1/2 f g) = -2,7$ soit $f \approx 0,77$ qui est la aussi une valeur raisonnable.

c) Second terme: distance parcourue pendant le temps de réaction

Troisième terme: simplement la longueur d'une voiture.

En tout: L (distance séparant deux devants de voitures consécutives) est la somme: de la longueur d'une voiture, de la distance parcourue pendant le temps de réaction (avant que le conducteur agisse) et de la distance de freinage.

d) On écrit donc $L_i(\text{en mètre}) = v(\text{km h}^{-1})/2 = v(\text{m s}^{-1}) \cdot 3,6/2 = 1,8 v(\text{m s}^{-1}) = v \tau_1$ (par définition)

Finalement $\tau_1 = 1,8 \text{ s}$.

IA2a) $n = \dots$. En effet, L = distance entre deux avants de voiture. Sur une distance D , il y a donc $N = D/L$ voitures, d'où une concentration de $n = N/D = 1/L$

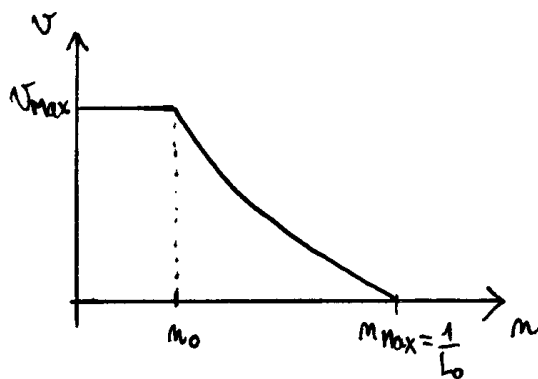
Or $L(v) = \tau_d v + L_0$ d'où $v(n) = \dots$ puis $j(n) = n v(n) = \dots$

b) A faibles concentrations les voitures ne peuvent pas aller aussi vite qu'elles veulent pour ajuster la distance de sécurité, car la vitesse est limitée à $v_{\max}$. Or avec ce modèle, v tend vers l'infini quand n tend vers 0.

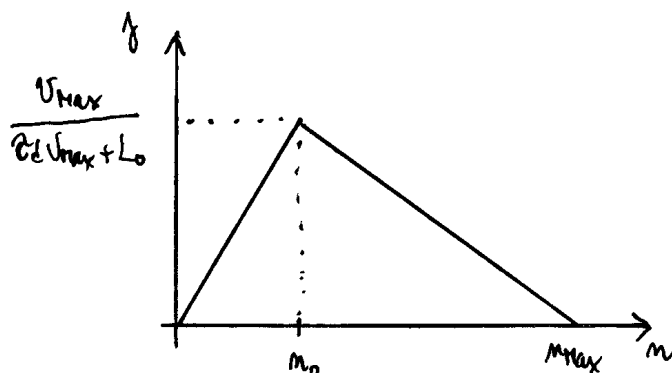
c) n_0 est définie pour $v = v_{\max}$ donc $n_0 = \dots$

d) pour $n < n_0$, $j(n) = n v_{\max}$.

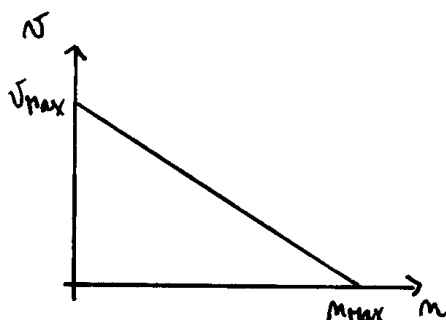
e)



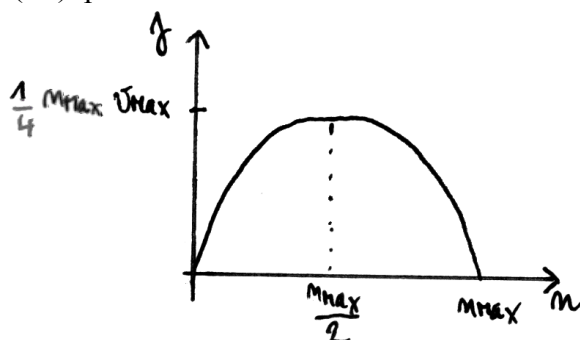
f)



IB1) $v(n \rightarrow 0) = v_{\max}$ et $v(n \rightarrow n_{\max}) = 0$ on ne circule plus quand toutes les voitures se touchent.



IB2) $j(n) = n v(n) = v_{\max} n (1 - \frac{n}{n_{\max}})$ parabole...sommet en $n_s = \frac{n_{\max}}{2}$ et alors $v_s = \frac{v_{\max}}{2}$ et $j_s = \frac{1}{4} n_{\max} v_{\max}$



IC1)

Modèle A: $n_c = n_0$ et $j_c = v_{\max} / \tau_d \cdot v_{\max} + L_0$, la vitesse vaut alors $v_{\max}$

Modèle B: $n_c = n_{\max}/2$ et $j_c = 1/4 n_{\max} v_{\max}$, la vitesse vaut alors $v_{\max}/2$

Circulation fluide: $n < n_c$ et circulation congestionnée: $n > n_c$

A un débit donné, existe deux possibilités: soit beaucoup de voitures passent lentement, soit peu de voitures passent vite.

IC2a) Ca ressemble plus à un triangle qu'à une parabole; donc on garde le modèle A.

IC2b) Graphiquement: $n_c = 0,08 \text{ veh m}^{-1}$; $j_c = 3\,800 \text{ veh h}^{-1}$. La mesure de la pente donne $v_{\max}$: on trouve alors $v_{\max} \approx 56 \text{ km h}^{-1}$ qui est bien proche de $50 \text{ km h}^{-1} = 13,9 \text{ ms}^{-1}$ la vitesse limite autorisée en ville.

IC2c) La courbe $j(n)$ s'annule pour $n_{\max}=0.43$ veh/m. On en déduit $L_0=1/n_{\max}=2,3$ m. C'est une valeur très faible puisque une petite voiture 4 places (twingo par exemple) mesure déjà environ 2,80 m de long. Les mesures expérimentales incluent donc sûrement les deux roues.

IC2d) On voit sur la formule du I A 2) a) que $j(n=0)=1/\tau_d$. Une mesure graphique donne $j(0)=4630$ veh/h= $1,29$ veh/s. D'où $\tau_d=0,8$ s < $\tau_i=1,8$ s donc les conducteurs (imprudents) ne respectent pas (du tout) les distances de sécurité.

Partie II

IIA1a) vitesse de phase =

IIA1b) $v=$

IIA1c) En un point M du diagramme fondamental, la vitesse est donnée par la pente de la droite passant par O et par M.

IIA2a) Faisons un bilan de matière (=voitures) sur un tronçon dx de la route entre t et $t+dt$.

Bilan: $\delta N=(n(x, t+dt)-n(x,t)) dx \approx dx dt$

Causes (flux entrant et sortant): $\delta N=(j(x,t)-j(x+dx,t)) dt \approx - dx dt$

Egalité des deux expressions donne bien l'équation de conservation de la matière:

$$+ = 0$$

IIA2b) Diffusion de particules, équation de continuité (MK fluide), conservation de la charge...

IIA3a) Supposons que la voiture située derrière l'imite instantanément. Dans ce cas, la distance entre les voitures ne varie pas et donc la concentration n reste la même. Puisque la vitesse v des voitures a varié, le débit $j=nv$ varie également bien que $n=cst$. Ceci est incompatible avec la courbe $j(n)$. Conclusion : la voiture située derrière ne l'imite pas immédiatement pour respecter les distances de sécurité.

Si la voiture de devant freine, il apparaît donc une bosse de concentration. Si elle accélère, il s'agit d'un creux de concentration.

Puisque la voiture située derrière l'imite avec un certain retard, cette perturbation va se propager à une vitesse finie en remontant la file.

IIA3b) A partir de l'équation de conservation de la matière on écrit que $= \frac{dj}{dn}$

D'où $\frac{dj}{dn} + = 0$

c en $m s^{-1}$.

Il s'agit de la pente en un point M à la courbe du diagramme fondamental.

IIA3c) On remplace $f(x-ct)$ dans l'équation précédente et on vérifie que ça marche...

Un profil de concentration se propage à c et sans se déformer.

IIA3d) $=$ pour une variable eulérienne. C'est la variation de la variable ψ en suivant le mouvement.

$=0$ signifie donc que le champ scalaire ψ reste constant au cours du déplacement.

Si ce déplacement se fait à la vitesse v , on peut écrire : $\frac{Dn}{Dt} = \frac{\partial n}{\partial t} + v \frac{\partial n}{\partial x}$

Par rapport à IIA3b) il faut donc se déplacer à la vitesse $v=c$ (algébrique) pour avoir une concentration constante.

IIA3e) $V_G = c$ c'est la vitesse de l'enveloppe d'un paquet d'onde (signal composé de plusieurs ondes sinusoïdales de fréquences proches).

Puisque c correspond à la vitesse de propagation des perturbations, on peut l'identifier à la vitesse de groupe

IIA3f) La courbe étant en cloche quand j est croissant $c > 0$ et quand j est décroissant $c < 0$.

IIA3g) Modèle A: $c = -$

Modèle B: $c = v_{\text{Max}} (1 - 2)$

Il y a dispersion si c dépend de n ie dans le modèle B.

IIA3h) Modèle A: même allure décalée de $\Delta x = c \Delta t$.

Modèle B: $c < 0$. Pour ce qui suit, on raisonne sur la norme de la vitesse. Pour n grand c est plus grand d'après le calcul précédent, donc le bas du profil va se déplacer moins vite que le haut: Cela tend vers un raidissement du profil amenant à une discontinuité de concentration.



IIA4) On réalise un bilan de matière entre t et $t + \Delta t$, on considère une surface de contrôle comme un pavé à cheval sur la discontinuité:

Il rentre par la gauche: $j_1 \Delta t$

Il sort par la droite: $j_2 \Delta t$

Il varie dans le volume de contrôle: $U (n_1 - n_2) \Delta t$

Au total: $U (n_1 - n_2) \Delta t = j_1 \Delta t - j_2 \Delta t$

D'où: $U =$

IIA4b) On se place dans le référentiel lié au front de concentration, et on choisit une surface de contrôle toujours fixe dans le référentiel d'étude:

la variation de voiture dans le volume est nulle cette fois-ci.

Il rentre par la gauche: $n_1 (v_1 - U) \Delta t$

Il sort par la droite: $n_2 (v_2 - U) \Delta t$

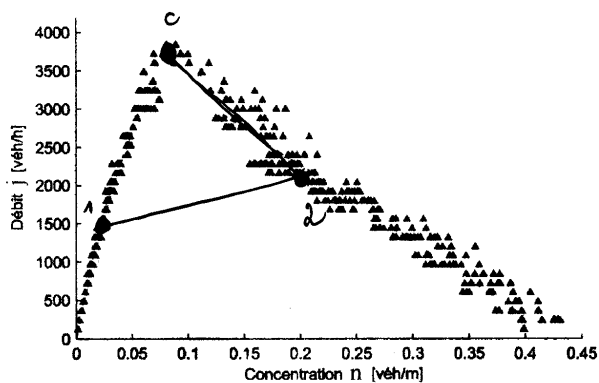
Donc $n_1 (v_1 - U) \Delta t - n_2 (v_2 - U) \Delta t = 0$

Comme $j_1 = n_1 v_1$ et $j_2 = n_2 v_2$ alors

$j_1 - j_2 + U (n_2 - n_1) = 0$ d'où le résultat.

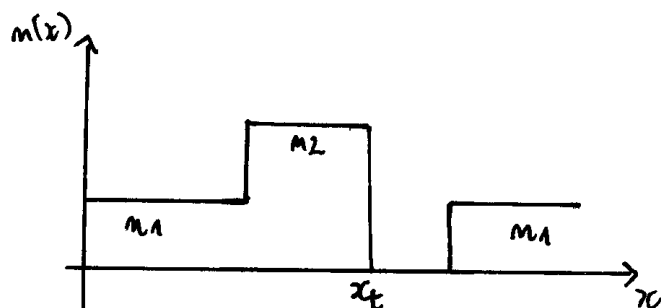
IIA4c) C'est la pente du segment reliant les points 1 et 2 du diagramme fondamental.

IIB1a) Voir graphe joint: Trafic fluide (0,025; 1500)



IIB1b) On cherche le point tel que le rapport j/n fasse 10 km h^{-1} : (0,22; 2200). Trafic congestionné

IIB1c)



IIB1d) $U_{12} = 3,6 \text{ km h}^{-1}$

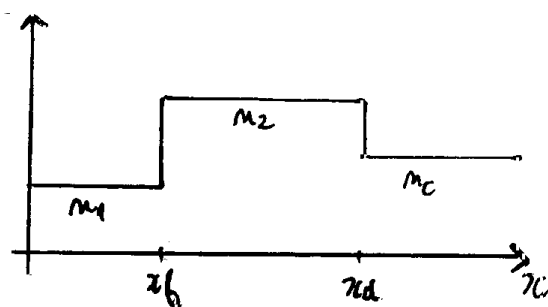
IIB1e) $v_B = 10 - 3,6 = 6,4 \text{ km h}^{-1}$

$t_{\text{trac}} = 3/10 \text{ h} = 18 \text{ min}$

$L_B = 6,4 * 3/10 = 1,9 \text{ km}$

IIB1f) Avec une concentration de $0,22 \text{ véh m}^{-1}$, il y a $1,9 * 0,22 = 420$ véhicules derrière le tracteur. Il s'agit d'un bouchon assez conséquent !

IIB2a)



IIB2b) $U_{2C} = -11 \text{ km h}^{-1}$

IIB2c) $V_{\text{dim}} = 11 + 3,6 = 14,6 \text{ km h}^{-1}$

IIB2d) $t_{\text{disp}} = 1,9/14,6 = 0,13 \text{ h} = 8 \text{ min.}$

Partie III

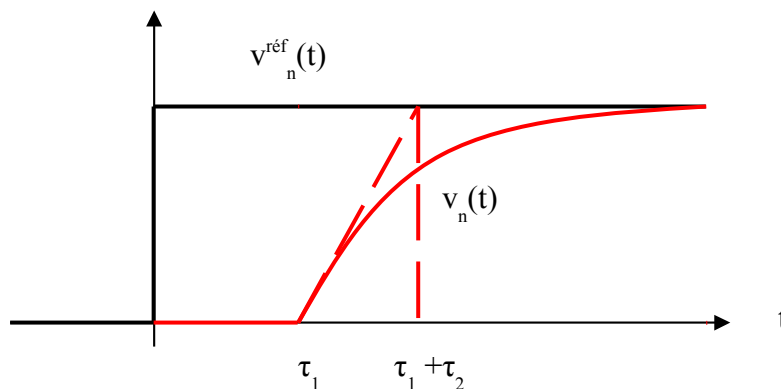
III A 1)

- a) pour $t < 0$, $v_n(t) = 0$, donc $\frac{dv_n}{dt} = 0$: On a bien $0 + 0 = 0$ puisque $v_n^{ref}(t - \tau_1) = 0$.
- b) Si $0 < t < \tau_1$, $t - \tau_1$ reste négatif, donc $v_n^{ref}(t - \tau_1)$ reste nulle. Il en est donc de même pour $v_n(t)$.
- c) Si $t > \tau_1$, $v_n^{ref}(t - \tau_1) = V_0 = \text{cste}$. La solution générale de l'équation différentielle est :
- $$v_n(t) = \lambda \exp(-t / \tau_2) + V_0$$

Or la vitesse est continue d'où

$$\lambda \exp(-\tau_1 / \tau_2) + V_0 = v_n(\tau_1) = 0. \text{ Finalement, } v_n(t) = V_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{t - \tau_1}{\tau_2}\right) \right]$$

- d) D'où l'allure des graphes :



Le temps τ_2 s'introduit facilement en traçant la tangente de l'exponentielle à son origine.

- e) Le temps τ_1 a déjà été introduit à la partie I. C'est le temps que le conducteur met pour réagir au changement de vitesse de la voiture situé devant elle (il s'agit du cumul du temps que met l'information issue des yeux pour aller jusqu'au cerveau, du temps que met le cerveau à prendre une décision et du temps que met la réponse de ce dernier pour atteindre les pieds ! C'est donc un temps physiologique.

Le temps τ_2 correspond quant à lui au temps que met la voiture pour effectuer l'opération d'accélération ou de freinage afin d'atteindre la vitesse voulue. C'est donc un temps mécanique.

III A 2)

- a) En régime sinusoïdale établi, $v_n(t)$ s'écrit $V_n \exp(j\omega t)$, où V_n est une constante complexe. On injecte cette forme dans l'équation :

$$(j\omega\tau_2 + 1)V_n \exp(j\omega t) = V_0 \exp(j\omega(t - \tau_1))$$

$$\text{d'où : } \underline{v_n}(t) = \frac{V_0 \exp(j\omega(t - \tau_1))}{1 + j\omega\tau_2}$$

On en déduit immédiatement : $\underline{H}^{ref}(\omega) = \frac{\exp(-j\omega\tau_1)}{1 + j\omega\tau_2}$

b) La fonction de transfert d'un filtre passe-bas d'ordre 1 de pulsation de coupure $1/\tau$ s'écrit :

$$\underline{H}_{PB}(\omega) = \frac{H_0}{1 + j\omega\tau}$$

Comme $\omega\tau_1 \ll 1$ et $\omega\tau_2 \ll 1$, on peut effectuer un DL à l'ordre 1 en ω :

$$\frac{1}{\underline{H}^{ref}(\omega)} = (1 + j\omega\tau_2) \exp(j\omega\tau_1) \approx (1 + j\omega\tau_2)(1 + j\omega\tau_1) \approx 1 + j\omega(\tau_1 + \tau_2)$$

Puisque $\frac{1}{\underline{H}_{PB}(\omega)} = \frac{1}{H_0}(1 + j\omega\tau)$, l'identification nous donne $\tau = \tau_1 + \tau_2$ et $H_0 = 1$.

c) On a donc en régime sinusoïdal forcé : $(1 + j\omega\tau)v_n(t) = \underline{v}_n^{ref}(t)$.

On revient en régime temporel quelconque en effectuant la transformation $j\omega \rightarrow d/dt$.
D'où l'équation différentielle :

$$\tau \frac{dv_n}{dt} + v_n(t) = v_n^{ref}(t).$$

III A 3)

a) on a : $D_n(t) = G_n G_{n+1} - L_0 = O_{n+1} G_{n+1} - O_n G_n + O_n O_{n+1} - L_0 = \xi_{n+1}(t) - \xi_n(t)$ puisque $O_n O_{n+1} = L_0$.

b) Puisque $v_n^{ref}(t) = D_n(t)/\tau_d$, on a donc : $\xi_{n+1}(t) - \xi_n(t) = \tau_d v_n^{ref}(t) = \tau_d \left[\tau \frac{dv_n}{dt} + v_n(t) \right]$,

expression que l'on dérive par rapport au temps :

$$v_{n+1}(t) - v_n(t) = \tau_d \left[\tau \frac{d^2 v_n}{dt^2} + \frac{dv_n}{dt} \right], \text{ d'où le résultat de l'énoncé.}$$

III A 4)

a) En régime sinusoïdal forcé et en notation complexe, d/dt revient à multiplier par $j\omega$.
D'où :

$$-\tau\tau_d\omega^2 \underline{v}_n + j\tau_d\omega \underline{v}_n + \underline{v}_n = \underline{v}_{n+1}$$

Ainsi : $\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + j\tau_d\omega - \tau\tau_d\omega^2}$

b) On a : $|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \tau\tau_d\omega^2)^2 + \tau_d^2\omega^2}}$

et $\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\tau_d\omega}{1 - \tau\tau_d\omega^2}\right)$ si $\omega < \omega_1$ et $\varphi(\omega) = \pi - \arctan\left(\frac{\tau_d\omega}{1 - \tau\tau_d\omega^2}\right)$ si $\omega > \omega_1$.

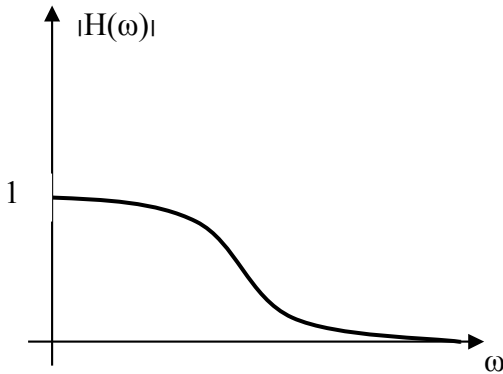
c) $|H(\omega)| = 1$ équivaut à $(1 - \tau\tau_d\omega^2)^2 + \tau_d^2\omega^2 = 1$ c'est-à-dire $\tau^2\tau_d^2\omega^4 + \tau_d(\tau_d - 2\tau)\omega^2 = 0$

Puisque $\omega \neq 0$, on a : $\omega^2 = \frac{2\tau - \tau_d}{\tau^2\tau_d}$. Une solution existe si $\tau > \frac{\tau_d}{2}$ et vaut $\omega_1 = \frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{2\tau}{\tau_d} - 1}$

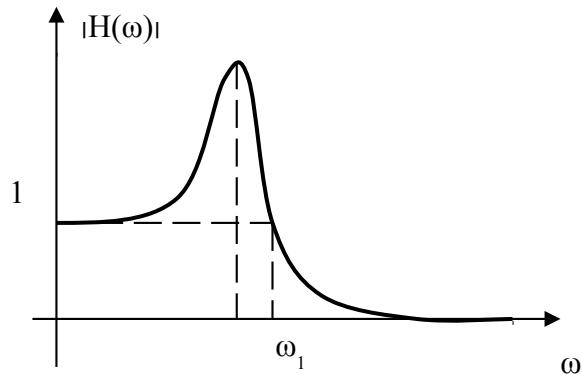
d) On peut écrire : $|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{f(\omega)}}$ avec $f(\omega) = (1 - \tau\tau_d\omega^2)^2 + \tau_d^2\omega^2$. Alors $|H(\omega)|$ possède un extremum si et seulement si $f(\omega)$ en possède un. $\frac{df}{d\omega} = 2\omega(\tau_d^2 - 2\tau\tau_d(1 - \tau\tau_d\omega^2)) = 0$ a pour solution 0 et $\omega_{\max} = \frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{\tau}{\tau_d} - \frac{1}{2}}$ si $\tau > \frac{\tau_d}{2}$.

e) On voit que $\omega_{\max} = \frac{\omega_1}{\sqrt{2}}$

f) si $\tau \leq \frac{\tau_d}{2}$:



si $\tau > \frac{\tau_d}{2}$:



III B 1) $\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\tau_d\omega}{1 - \tau\tau_d\omega^2}\right)$ est une fonction impaire en ω : le terme d'ordre 2 est donc nul. Le terme d'ordre 1 est tout simplement : $\varphi(\omega) \approx -\tau_d\omega$

III B 2)

a) Il s'agit d'une onde progressive sinusoïdale.

b) $\underline{v}_n(t) = \frac{d\xi_n}{dt} = j\omega\xi_0 \exp(j(\omega t - knL_0))$.

c) On a donc : $\frac{v_n(t)}{v_{n+1}(t)} = \exp(+jkL_0) = \underline{H}(\omega)$ puisque l'on est en régime sinusoïdal.

C'est-à-dire : $\exp(jk'L_0) \exp(-k''L_0) = |\underline{H}(\omega)| \exp[j\varphi(\omega)]$.

On identifie module et argument, d'où : $k'L_0 = \varphi(\omega)$ et $k''L_0 = -\ln(|\underline{H}(\omega)|)$.

Ainsi, on a bien $k' = -\omega\tau_d/L_0$ et par ailleurs $k''L_0 = -\ln\left(1 + \tau_d\left(\tau - \frac{\tau_d}{2}\right)\omega^2\right) \approx -\tau_d\left(\tau - \frac{\tau_d}{2}\right)\omega^2$ en

continuant le DL à l'ordre 2 en ω . Au bilan : $k'' = \frac{\tau_d}{L_0}\left(\frac{\tau_d}{2} - \tau\right)\omega^2$.

Rem: La discussion de la stabilité pouvait aussi se faire à partir du signe de k'' .

- d) La vitesse de phase de l'onde vaut $v_\phi = \frac{\omega}{k'} = -\frac{L_0}{\tau_d}$. On retrouve le même résultat qu'en II A 3) g) pour le modèle A. C'est tout à fait normal car d'une part, les deux modélisations (discrète et continue) sont parties du même modèle de la distance de sécurité. D'autre part, $\tau_d \omega \ll 1$ implique que $k' L_0 \ll 1$. Avec $k' = 2\pi/\lambda$, l'approximation s'écrit $\lambda \gg L_0$, qui correspond justement à la condition de validité du modèle continu, qui donne bien ainsi le même résultat que le modèle discret.

III C 1)

- a) La vitesse de la voiture n+1 s'écrit en complexe: $v_{n+1}(t) = V_c + V_0 \exp(j\omega t)$
 Celle de la voiture n s'écrit alors : $v_n(t) = \underline{H}(0)V_c + \underline{H}(\omega)V_0 \exp(j\omega t)$
 Puisque $\underline{H}(0)=1$, la vitesse en notation réelle vaut : $v_n(t) = V_c + |\underline{H}(\omega)|V_0 \cos(\omega t + \varphi(\omega))$
- b) On voit que $|\underline{H}(\omega)| \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 1$: à très faible fréquence, la voiture n suit exactement le même mouvement que la voiture n+1 qui la précède, afin d'avoir toujours la même distance de sécurité.
 Par ailleurs, $|\underline{H}(\omega)| \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} 0$: à très haute fréquence, le conducteur n'a pas le temps de suivre les mouvements trop rapides de la voiture de devant.
- c) Les oscillations s'amplifient si $|\underline{H}(\omega)| < 1$. C'est-à-dire, d'après la partie A, à condition que $\tau > \frac{\tau_d}{2}$ et $\omega < \omega_1$.
- d) Considérons un flot uniforme de voitures. Une perturbation quelle qu'elle soit peut être décomposée en somme de sinusoïdes (décomposition de Fourier). Si τ est inférieur à $\tau_d/2$, toutes les sinusoïdes, et donc la perturbation, vont être atténuées. Si, par contre, τ est supérieur à $\tau_d/2$, les sinusoïdes dont la pulsation est inférieure à ω_1 vont s'amplifier : le flot est donc instable.
- e) L'amplification est la plus grande quand $|\underline{H}(\omega)|$ est maximal, c'est-à-dire, pour $\omega = \omega_{\max}$.

$$\text{D'où } T_{\text{acc}} = \frac{2\pi}{\omega_{\max}} = 2\pi \frac{\tau}{\sqrt{\frac{\tau}{\tau_d} - \frac{1}{2}}}$$

III C 2)

- a) $\tau_d/2 = 0.45 \text{ s} < \tau$: Les accordéons apparaissent.
- b) $T_{\text{acc}} = 11 \text{ s}$. La période des oscillations est de l'ordre de la dizaine de secondes. Il faudrait donc améliorer le modèle pour obtenir des résultats plus proche de la réalité.
- (1)

III D 1)

- a) La somme des coefficients vaut $K(1+q+q^2+\dots) = \frac{K}{1-q}$. Pour que cette somme soit égale à l'unité, il faut donc que $K=1-q$.
- b) Il faut que $q=0$: Tous les coefficients vont être nuls sauf le premier.
- c) $K(1+q+\dots+q^{N-1}) = K \frac{1-q^N}{1-q} = 1-q^N = 0.9$ d'où $q = \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{N}}$

III D 2)

- a) On dérive $v_n^{\text{réf}}(t) = \frac{K}{\tau_d} \left[\sum_{i=0}^{+\infty} q^i D_{n+i}(t) \right]$, sachant que $D_{n+i}(t) = \xi_{n+i+1}(t) - \xi_{n+i}(t)$:

$$\frac{dv_n^{ref}}{dt} = \frac{K}{\tau_d} \left[\sum_{i=0}^{+\infty} q^i (v_{n+i+1}(t) - v_{n+i}(t)) \right]$$

b) On dérive $\tau \frac{dv_n}{dt} + v_n(t) = v_n^{ref}(t)$. Cela donne :

$$\tau \frac{d^2 v_n}{dt^2} + \frac{dv_n}{dt} = \frac{K}{\tau_d} \left[\sum_{i=0}^{+\infty} q^i (v_{n+i+1}(t) - v_{n+i}(t)) \right]$$

On injecte $v_n(t) = V_0 \exp(j(\omega t - knL_0))$ et l'on obtient :

$$(-\tau \tau_d \omega^2 + j \tau_d \omega) V_0 \exp(j(\omega t - knL_0)) = (1-q) \left[\sum_{i=0}^{+\infty} q^i (\exp(-j(i+1)kL_0) - \exp(-j i k L_0)) \right]$$

$$V_0 \exp(j(\omega t - knL_0))$$

$$\text{i.e. } -\tau \tau_d \omega^2 + j \tau_d \omega = (1-q) (\exp(-jkL_0) - 1) \left[\sum_{i=0}^{+\infty} (q \exp(-jkL_0))^i \right] = (1-q) \frac{\exp(-jkL_0) - 1}{1 - q \exp(-jkL_0)}$$

La série ne converge que si $|q \exp(-jkL_0)| < 1$, i.e. si $|H_q(\omega)| < q$

$$\text{i.e. } (-\tau \tau_d \omega^2 + j \tau_d \omega) (1 - q \exp(-jkL_0)) = (1-q) (\exp(-jkL_0) - 1)$$

$$\text{on a donc bien } H_q(\omega) = \frac{1}{\exp(-jkL_0)} = \frac{1 - q + q(j \tau_d \omega - \tau \tau_d \omega^2)}{1 - q + j \tau_d \omega - \tau \tau_d \omega^2}$$

III D 3)

- On observe que le maximum de $|H_q(\omega)|$ diminue au fur et à mesure que q augmente (et donc que N augmente). Le flot de voitures devient donc de moins en moins instable. Pour q supérieur à environ à 0.8, on voit que $|H_q(\omega)|$ est tout le temps inférieur à 1 : le flot est donc devenu stable. Ainsi l'anticipation des conducteurs permet d'éviter la formation de bouchons en accordéon, ce qui était intuitivement prévisible.
- Il y a une partie des courbes (dans la partie haute fréquence) où $|H_q(\omega)| < q$ et donc qui n'est pas valable. Mais pour ces parties, $|H_q(\omega)| > 1$ puisque $q < 1$: le flot est donc stable pour toutes ces pulsations. Ainsi, le raisonnement de a) sur la stabilité n'est pas modifié

III D 4)

- Le phénomène d'accordéon ne se produit pas si $|H_q(\omega)|$ reste inférieur à 1 quelque soit ω ,

$$\text{c'est-à-dire si } \omega_1 \text{ n'existe pas, i.e. } \tau < \frac{\tau_d}{2} \left(\frac{1+q}{1-q} \right)$$

$$\text{b) } T_{acc} \approx \sqrt{2} \frac{2\pi}{\omega_1}, \text{ d'où : } T_{acc} = \frac{2\pi \tau}{\sqrt{\frac{\tau}{\tau_d} \left(\frac{1-q}{1+q} \right) - \frac{1}{2}}}$$

$$\text{c) } q = (1/10)^{1/7} \approx 0,72$$

- $\tau_d = 0,9$ s : $\frac{\tau_d}{2} \left(\frac{1+q}{1-q} \right) = 2,8$ s $< \tau$: donc le phénomène d'accordéon se produit, avec une période temporelle $T_{acc} = 115$ s, c'est-à-dire une période de l'ordre de deux minutes.

- ii) $\tau_d = 1,8 \text{ s}$: $\frac{\tau_d}{2} \left(\frac{1+q}{1-q} \right) = 5,5 \text{ s} > \tau$: le phénomène n'a aucune chance de se produire.

Conclusion : le modèle est meilleur et il montre que si les conducteurs respectaient mieux les distances de sécurité, cela éviterait les phénomènes d'accordéon.