

Partie I

- **IA.** La particule est soumise à la seule force $\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$. Par application du théorème de la puissance cinétique dans R , $\frac{dE_c}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = 0$. L'énergie cinétique est une constante du mouvement.

- **IB** La seconde loi de Newton dans R s'écrit:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{v} \wedge (B \vec{e}_z)$$

En projetant sur l'axe (Oz)

$$\frac{dv_L}{dt} = 0$$

D'où $\vec{v}_L = v_L \vec{e}_z$ est constant.

D'après IA, $v^2 = v_L^2 + v_z^2$ est constant, donc $v_L = \sqrt{v^2 - v_z^2}$ est constant.

- **IC1.** $m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{v} \wedge (B \vec{e}_z)$. D'où:

$$(1) \quad m \frac{dv_x}{dt} = q v_y B \Rightarrow \ddot{v}_x + \omega^2 v_x = 0$$

$$(2) \quad m \frac{dv_y}{dt} = -q v_x B \Rightarrow \ddot{v}_y + \omega^2 v_y = 0$$

Avec les conditions initiales: $v_x = v_{\perp 0} \cos(\omega t) + \alpha \sin(\omega t)$ et $v_y = \beta \sin(\omega t)$

(1) $\Rightarrow \alpha = 0$ (2) $\Rightarrow \beta = -v_{\perp 0}$. On en déduit

$$v_x = v_{\perp 0} \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad v_y = -v_{\perp 0} \sin(\omega t)$$

- **IC2.** Par intégration par rapport au temps et compte-tenu des conditions initiales:

$$x = \frac{v_{\perp 0}}{\omega} \sin(\omega t) \quad \text{et} \quad y = \frac{v_{\perp 0}}{\omega} (-1 + \cos(\omega t))$$

- **IC3.** La trajectoire de la particule est un cercle d'équation cartésienne

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = a^2$$

de rayon a , de centre C de coordonnées x_c et y_c tels que:

$$x_c = 0, \quad y_c = -\frac{v_{\perp 0}}{\omega}, \quad a = \left| \frac{v_{\perp 0}}{\omega} \right|$$

Ce cercle est décrit à la vitesse angulaire $|\omega|$ soit une période

$$T_1 = \frac{2\pi}{|\omega|}$$

• **IC4.**

itbpF6.6054in3.6729in0inFigure

• **IC5.** Pour l'électron,

$$v = 1,4 \cdot 10^8 m/s$$

La valeur de v est élevée (de l'ordre de $c/2$)

On obtient avec $v_{\perp 0} = \sqrt{\frac{10}{11}}v$,

$$a = 1,5 \cdot 10^3 m, \quad T_1 = 7,1 \cdot 10^{-5} s$$

Pour un proton

$$v = 1,0 \cdot 10^7 m/s$$

..

$$a = 2,0 \cdot 10^5 m, \quad T_1 = 1,3 \cdot 10^{-1} s$$

• **IC6.** En comptant le courant positif dans le sens horaire: , $i = \frac{|q|}{T} = q \frac{\omega}{2\pi}$

$$\vec{\mu} = i \vec{S} = -q \frac{\omega}{2\pi} \pi a^2 \vec{e}_z = -q \frac{\omega}{2} \left(\frac{v_{\perp 0}}{\omega} \right)^2 \vec{e}_z = -\frac{E_{c\perp}}{B} \vec{e}_z$$

D'où

$$\mu = \frac{E_{c\perp}}{B}$$

Avec $\Phi = B\pi a^2$,

$$\mu = \frac{q^2 \Phi}{2\pi m}$$

• **ID1.** La trajectoire de la particule est une hélice d'axe parallèle à (z) passant par le point C, de pas constant $b = v_L T_1$, de rayon a . Il s'agit d'une hélice droite pour une particule de charge négative, d'une hélice gauche pour une particule de charge positive.

$\vec{B}$ étant parallèle à l'axe (z), les tubes de champ sont des cylindres d'axe (z). La particule décrit une hélice portée par un tel cylindre de rayon a: sa trajectoire s'enroule sur ce cylindre.

• **ID2.**

$$b = v_L T_1 = v_L \frac{2\pi}{|\omega|}$$

Avec $a = \left| \frac{v_{\perp 0}}{\omega} \right|$, on obtient $b = \frac{2\pi}{\sqrt{10}}a$, soit

$$b = 1,98a$$

Partie II

- **IIA1.** Si $\vec{B}$ présente une symétrie de révolution autour de l'axe (Oz) , les plans contenant l'axe (Oz) sont des plans de symétrie pour $\vec{B}$, donc

$$B_\theta = 0.$$

- **IIA2.** Considérons un petit cylindre de rayon ρ , d'axe (Oz) limité par plans de côtes z et $z+dz$. $\vec{B}$ est à flux conservatif, donc le flux de $\vec{B}$ à travers le petit cylindre est nul:

$$(B_z(z+dz) - B_z(z))\pi\rho^2 + 2\pi\rho dz B_\rho = 0$$

D'où avec un développement à l'ordre un:

$$B_\rho = -\frac{1}{2}\rho \frac{dB_z}{dz}$$

- **IIB1.** $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

Si $\vec{v} = \vec{v}_\perp + v_L \vec{e}_z$, pour une particule chargée négativement et d'après son sens de parcours, la composante $F_z = -qB_\rho v_\perp = \frac{q}{2}a \frac{dB_z}{dz} v_\perp = \frac{q}{2} \frac{v_\perp}{|\omega|} \frac{dB_z}{dz} v_\perp$
soit

$$F_z = -\frac{mv_\perp^2}{2B_z} \frac{dB_z}{dz}$$

Pour une particule chargée positivement, le sens de parcours est opposé $F_z = qB_\rho v_\perp$ et on retrouve la même expression.

- **IIB2.** D'après IC6 $\mu = \frac{E_{c\perp}}{B_z}$. En utilisant B1:

$$\begin{aligned} \frac{d\mu}{dt} &= \frac{1}{B_z} \frac{dE_{c\perp}}{dt} - \frac{1}{B_z^2} E_{c\perp} \frac{dB_z}{dz} \frac{dz}{dt} = \frac{1}{B_z} \left(\frac{dE_{c\perp}}{dt} + E_{c\perp} v_L \left(\frac{2F_z}{mv_\perp^2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{B_z} \left(\frac{dE_{c\perp}}{dt} + v_L F_z \right) = \frac{1}{B_z} \frac{dE_c}{dt} = 0 \end{aligned}$$

Comme $\mu = \frac{q^2 \Phi}{2\pi m}$ (en généralisant le résultat de la première partie), Φ est une constante du mouvement.

La surface de révolution autour de Oz , engendrée par les "cercles-trajectoires" lors du déplacement de la particule définit un tube de champ. En effet, si on considère une surface fermée de dimension h selon l'axe (z) , engendrée par des "cercles-trajectoires" et fermée par les disques s'appuyant sur les deux cercles trajectoires extrêmes, le flux de $\vec{B}$ à travers cette surface fermée est nul. Par ailleurs Φ est constant donc les flux à travers les disques extrêmes se compensent: le flux à travers la paroi latérale est donc nul quel que soit h .

Donc la particule s'enroule bien sur un tube de champ de $\vec{B}$

- **IIB3.**

$$E_c = \frac{1}{2}m(v_L^2 + v_\perp^2) = \frac{1}{2}mv_L^2 + \mu B_z$$

- **IIB4.** De la question précédente, on déduit

$$E_c \geq \mu B_z$$

E_c et μ étant des constantes du mouvement, la particule ne peut pénétrer dans une zone où $B_z > B_{\max}$ avec

$$B_{\max} = \frac{E_c}{\mu}$$

- **IIC1.** De O à M_1 l'intensité du champ $B_z(z)$ augmente, puisque la section du tube de champ diminue et que le flux de $\vec{B}$ sur une section du tube de champ est constante. De même de O à M'_1 l'intensité du champ $B_z(z)$ augmente. L'intensité B_0 du champ en O est minimum.
- **IIC2.** Selon l'allure des lignes de champ, l'intensité de B augmente avec $|z|$. L'intensité du champ étant une fonction continue, la valeur B_{max} est atteinte en deux points, l'un M_0 entre O et M_1 et l'autre M'_0 entre O et M'_1 . Pour $|z| > z_0$, l'intensité de B_z est supérieure à B_{max} . La particule est donc confinée dans la région $|z| \leq z_0$.

$$E_c = \frac{1}{2}mv_L^2 + \frac{1}{2}mv_\perp^2 = \frac{1}{2}mv_L^2 + \mu B_z$$

D'où

$$\frac{dz}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E_c - \mu B_z)}$$

$$dt = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dz}{\sqrt{E_c - \mu B_z}} \text{ pour } B_z \neq \frac{E_c}{\mu}$$

Soit

$$dt = \pm \sqrt{\frac{m}{2\mu}} \frac{dz}{\sqrt{B_{max} - B_z}}$$

. La période T_2 du mouvement correspond à deux allers-retours depuis 0 jusqu'en $|z| = z_0$. D'où:

$$T_2 = 4\sqrt{\frac{m}{2\mu}} \int_0^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{B_{max} - B_z}}$$

Partie III

- **IIIA.** Une ligne de champ est contenue dans un plan vertical (ψ donné). Dans ce plan l'équation de la ligne de champ s'obtient en exprimant que $\vec{dl}$ est parallèle à $\vec{B}$, soit:

$$B_\varphi dr - B_r r d\varphi = 0 \Leftrightarrow \sin(\varphi) dr = 2 \cos(\varphi) r d\varphi \Rightarrow \frac{dr}{r} = 2 \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)} \text{ pour } r, \sin(\varphi) \neq 0$$

Soit, en intégrant $\ln(r) = 2 \ln|\sin(\varphi)| + \ln(r_0)$. D'où

$$r = r_0 \sin^2(\varphi)$$

- **IIIB.** itbpFU6.2837in2.2286in0inAllure des lignes de champFigure

r_0 est la distance à l'origine du point d'intersection de la ligne de champ avec le plan équatorial. C'est la plus grande distance à l'origine pour l'ensemble des points de cette ligne de champ.

- **IIIC.** $B = \frac{\mu_0 M_T}{4\pi r^3} (4 \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi))^{\frac{1}{2}} = \frac{\mu_0 M_T}{4\pi r_0^3} \frac{(3 \cos^2(\varphi) + 1)^{\frac{1}{2}}}{\sin^6(\varphi)} = B_0 f(\varphi)$ avec $B_0 = \frac{\mu_0 M_T}{4\pi r_0^3}$ et $f(\varphi) = \frac{(3 \cos^2(\varphi) + 1)^{\frac{1}{2}}}{\sin^6(\varphi)}$

- **IIID.** $f(\varphi)$ est minimale pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$ et $B_{min} = B_0$

- **IIIE.** $\cos(\pi - \varphi) = -\cos(\varphi)$ et $\sin(\pi - \varphi) = \sin(\varphi)$. Donc $f(\pi - \varphi) = f(\varphi)$

- **IIIF.** La coordonnée sphérique φ varie de 0 à π

- **IIIG1.** L'énergie potentielle

$$E_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}_h$$

est minimale pour la position d'équilibre stable. Cet équilibre s'obtient donc pour une position de $\vec{M}$ parallèle à $\vec{B}_h$ et de même sens, soit $\alpha = 0$.

- **IIIG2.** Par application du théorème du moment cinétique, $J\ddot{\alpha}\vec{u}_Z = \vec{M} \wedge \vec{B}_h$, soit

$$J\ddot{\alpha} + MB_h \sin \alpha = 0$$

- **IIIG3.** Dans la limite des petites oscillations: $J\ddot{\alpha} + MB_h \alpha = 0$. La période τ_0 de cet oscillateur harmonique est

$$\tau_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{MB_h}}$$

- **IIIG4.** $\tau_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{M(B_h+B_e)}}$ et $\tau_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{M(B_e-B_h)}}$. D'où $\frac{\tau_1}{\tau_2} = \sqrt{\frac{B_e-B_h}{B_h+B_e}}$ et

$$B_h = B_e \frac{1 - \left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\right)^2}{1 + \left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\right)^2}$$

- **IIIG5.** $B_h = 24\mu T$

$$M_T = B_h R_T^3 \frac{4\pi}{\mu_0 \sin(50)} \Rightarrow M_T = 8,3 \cdot 10^{22} A.m^2$$

$$B_h \text{ varie entre } 0 \text{ (aux pôles magnétiques) et } \frac{1}{\sin(50)} B_h(P) = 32\mu T$$

Partie IV

- **IVA.** En négligeant la courbure des lignes de champ et en gardant les notations de la partie II, $T_2 = 4\sqrt{\frac{m}{2\mu}} \int_0^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{B_{\max} - B_z}}$ devient en remplaçant B_z par B_φ et dz par ds avec $ds^2 = (dr)^2 + (rd\varphi)^2 = r_0^2(2\sin(\varphi)\cos(\varphi)d\varphi)^2 + r_0^2(\sin^2(\varphi)d\varphi)^2 = r_0^2\sin^2(\varphi)(1 + 4\cos^2(\varphi))d\varphi^2$

D'où avec $\frac{\pi}{2} < \varphi_0 < \pi$

$$T_2 = 4\sqrt{\frac{m}{2\mu}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi_0} \frac{ds}{\sqrt{B_{\max} - B(\varphi)}}$$

avec

$$ds = r_0 \sin(\varphi) \sqrt{1 + 4\cos^2(\varphi)} d\varphi$$

et

$$B(\varphi) = B_\varphi$$

- **IVB.**

$$B(\varphi) = B_{\min} f(\varphi)$$

d'après IIIC.

Faisons un changement de variable en posant $x = \cos(\varphi)$. Si φ_0 reste voisin de $\frac{\pi}{2}$, x reste proche de 0. et négatif.

$ds = -r_0\sqrt{1+4x^2}dx$ et $f(\varphi) = \frac{\sqrt{1+3x^2}}{(1-x^2)^{3/2}} = 1 + \frac{3}{2}x^2 + 3x^4 + o(x^2) = 1 + \frac{9}{2}x^2 + o(x^2)$. D'où $B = B_0(1 + \frac{9}{2}x^2)$ à l'ordre deux en x .

Pour $\varphi = \varphi_0$, $x = x_0$ et $T_2 = 4r_0\sqrt{\frac{m}{2\mu}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi_0} \frac{\sin(\varphi)\sqrt{1+4\cos^2(\varphi)}d\varphi}{\sqrt{B_{\max}-B(\varphi)}} = -4r_0\sqrt{\frac{m}{2\mu}} \int_0^{x_0} F(x)dx$

avec $F(x) = \frac{\sqrt{1+4x^2}}{\sqrt{B_{\max}-B(\varphi)}} \simeq \frac{1}{\sqrt{B_0\frac{9}{2}(x_0^2-x^2)}}$

D'où

$$T_2 = 4r_0\sqrt{\frac{m}{9\mu B_0}} \int_0^{|x_0|} \frac{1}{\sqrt{x_0^2-x^2}}dx = \frac{2\pi}{3}r_0\sqrt{\frac{m}{\mu B_0}}$$

D'où

$$\gamma = \frac{2\pi}{3}$$

coefficient sans dimension. On pouvait le prévoir par homogénéité: en effet $[\mu B_0] \equiv A.m^2.Tesla \equiv kg.m^2.s^{-2}$. D'où

$$r_0\sqrt{\frac{m}{\mu B_0}} \equiv m(m^{-2}.s^2)^{\frac{1}{2}} \equiv s$$

$$\gamma = 2,09$$

• **IVC1.** $B_{\min} = B(r = 4R_T, \varphi = \frac{\pi}{2}) = \frac{\mu_0 M_T}{4\pi(4R_T)^3}$

$$B_{\min} = 0,49\mu T$$

• **IVC2.** $B_{\max} = \frac{E_c}{\mu}$. Or E_c et μ sont des constantes du mouvement. D'après IC6, $\mu = \frac{E_{c\perp}}{B}$.

Dans le plan équatorial, $\frac{E_c}{\mu} = \frac{E_c B(\varphi=\frac{\pi}{2})}{E_{c\perp}} = \frac{11}{10}B(\varphi = \frac{\pi}{2})$. D'où $B_{\max} = \frac{11}{10}B_{\min}$ et $B_{\max} = 0,54\mu T$

Or $B = B_{\min}f(\varphi)$. D'après la représentation graphique de $f(\varphi)$ au voisinage de $\frac{\pi}{2}$, il apparaît que la valeur $\frac{11}{10}B_{\min}$ est atteinte pour des valeurs de φ proches de $\frac{\pi}{2}$

itbphF235.8125pt235.8125pt0ptFigure

En utilisant le développement limité de B obtenu en IVB. $B = B_{\min}(1 + \frac{9}{2}x^2) = B_{\min}(1 + \frac{9}{2}\cos^2(\varphi)^2)$. D'où $\frac{11}{10} = 1 + \frac{9}{2}\cos^2(\varphi_0)$ et

$$\varphi_0 = 98,6^\circ$$

• **IVC3.** $T_2 = \frac{2\pi}{3}r_0\sqrt{\frac{m}{\mu B_0}} = \frac{2\pi}{3}r_0\sqrt{\frac{mB_{\max}}{E_c B_{\min}}}$

$$T_2 = \frac{8\pi}{3}R_T\sqrt{\frac{11}{10}}\sqrt{\frac{m}{E_c}}$$

Pour un électron de $55keV$, $T_2 = 0,57s$ et pour un proton d'énergie $0,55MeV$, $T_2 = 7,7s$.

Pour le proton, le modèle donne le même ordre de grandeur que la mesure. En revanche il y a un facteur 5 de différence pour l'électron. Cela peut peut-être s'expliquer par les corrections relativistes à apporter (Cf IC5)

- **IVD.** Les particules chargées très énergétiques piégées dans les ceintures de Van Allen ont une action néfaste sur l'équipage (les vols habités en orbite autour de la terre se font à des altitudes bien plus faibles de quelques centaines de km) mais également sur les instruments embarqués (électronique,...)

Anne Henriët

Lycée Artaud. Marseille