

I) Mécanique gravitationnelle * Équations du mouvement

1) Mécanique newtonienne $\vec{L} = \vec{OP} \wedge m \vec{v} = r \vec{e}_r \wedge m(\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta) = m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_\theta$

et $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{OP} \wedge \vec{F}$; pour une force centrale $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \rightarrow \vec{L}$ est un vecteur constant et $m r^2 \dot{\theta} = L$ est constant.

Formule de Binet pour l'accélération: on cherche l'équation de la trajectoire sous la forme $u = \frac{1}{r(\theta)}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OP}}{dt} = \frac{d(r \vec{e}_r)}{d\theta} \times \dot{\theta} = \left(\frac{L}{m}\right) \dot{\theta} \left(-\frac{u'}{u^2} \vec{e}_r + \frac{1}{u} \vec{e}_\theta\right) = \left(\frac{L}{m}\right) (-u' \vec{e}_r + u \vec{e}_\theta)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\theta} \times \frac{d\vec{v}}{d\theta} = \left(\frac{L}{m}\right)^2 u^2 \left(-u'' \vec{e}_r - u \vec{e}_r\right) \rightarrow \boxed{\vec{a} = -\left(\frac{L}{m}\right)^2 u^2 (u'' + u) \vec{e}_r}$$

2) Cadre relativiste

$$\frac{F_R}{F_N} = 3 \frac{L^2}{m^2 c^2} u^2 = 3 \left(\frac{r \dot{\theta}}{c}\right)^2$$

Terme perturbateur sera très petit devant le terme newtonien si la vitesse orbitale est petite devant la vitesse de la lumière dans le vide.

3) "Équation du mouvement du photon" on a $m=0$ et $L \neq 0 \rightarrow G M_s \left(\frac{m}{L}\right)^2 = 0$

il reste $u'' + u = 3 \frac{G M_s}{c^2} u^2$

* Déviation de la ligne de visée d'une étoile

4) Absence de gravitation A priori la trajectoire est rectiligne

l'équation s'écrit $u'' + u = 0$ puisque $G=0 \rightarrow u_0(\theta) = A \cos \theta + B \sin \theta$

or $u_0(\frac{\pi}{2}) = 0 \rightarrow B = 0$ $u_0(0) = \frac{1}{R_s} \rightarrow A = \frac{1}{R_s}$

$$u_0(\theta) = \frac{1}{R_s} \cos \theta \quad r_0(\theta) = \frac{R_s}{\cos \theta}$$

En coordonnées cartésiennes $r_0 \cos \theta = \boxed{R_s = x}$ soit en coordonnées réduites $\boxed{x = 1}$

5) Avec gravitation, approche perturbative

on pose $Z = R_s u \rightarrow u'' = \frac{1}{R_s} Z''$ [E.P.] s'écrit $\boxed{Z'' + Z = \frac{3 G M_s}{c^2 R_s} Z^2 = K Z^2}$

$K = \frac{3 G M_s}{c^2 R_s} = 6,35 \cdot 10^{-6}$ On a $K > 0$ et $K \ll 1$

On cherche une solution de la forme $Z(\theta) = \cos \theta + K Z_1(\theta) \rightarrow Z'' = -\cos \theta + K Z_1''$

$\rightarrow Z_1'' + Z_1 = Z^2 = \cos^2 \theta$ à l'ordre zéro on a $K \rightarrow Z_1'' + Z_1 \approx \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2}$

Solution particulière $Z_1 = \frac{1}{2} + B_2 \cos 2\theta \rightarrow Z_1'' = -4 B_2 \cos 2\theta \rightarrow B_2 = -\frac{1}{6}$ $\boxed{Z_1 = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2\theta}{6}}$

A priori, il faut ajouter la solution générale de l'équation homogène...

6) Directions asymptotiques de la trajectoire elles correspondent aux solutions de

l'équation $Z(\theta) = 0 \rightarrow \cos \theta + K \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2\theta}{6}\right) = 0$. θ est voisin de $\pm \frac{\pi}{2}$. Posons $\theta = \pm \frac{\pi}{2} + \theta_1$.

On obtient $\theta_1 = \pm \frac{2K}{3} \rightarrow \boxed{\theta = \pm \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2K}{3}\right)}$

Equation cartésienne: $Z = \frac{R_S}{r} = \cos \theta + K \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2\theta}{6} \right)$ or $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

d'où $X = \frac{r \cos \theta}{R_S} = 1 - K \sqrt{x^2 + y^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) \rightarrow \boxed{X = 1 - K \frac{x^2 + 2y^2}{3\sqrt{x^2 + y^2}}}$

(109)

si x et $y \rightarrow \infty$ et $\frac{y}{x} \rightarrow$ limite finie, on peut écrire $1 = \frac{1}{X} - K \frac{1 + 2(Y/X)^2}{3\sqrt{1 + (Y/X)^2}}$ (ligne de X)
 $\frac{1}{X} \rightarrow 0$ donc (ligne de X) < 0 . On attend $(Y/X) \gg 1$ ($\theta \approx \frac{\pi}{2}$) donc la limite l satisfait à $3l = 2Kl^2$
 Il vient $\lim |Y/X| = l = \frac{3}{2K}$ ce qui équivaut au résultat précédent.

7) Déviation d'un rayon lumineux. Loin du soleil ($X \gg 1, Y \gg 1$) la trajectoire se confond avec l'une ou l'autre des asymptotes. Angle des 2 asymptotes est $\alpha = 2\theta_0 = \frac{4K}{3} = 8,47 \cdot 10^{-6} \text{ rad} = 1,75''$

II) Mouvement képlérien en relativité générale * solution perturbative

8) Homogénéité dimensionnelle de l'équation [ED2]

$$B = G M_S \left(\frac{m}{L} \right)^2 = \left(\frac{G M_S}{r^2} \right) \frac{1}{(\dot{\theta})^2} = \frac{\text{Accélération}}{(\text{Vitesse})^2} \Rightarrow m^{-1} \text{ est l'unité de } B \text{ comme } u \text{ et } u''$$

$$E = 3 \left(\frac{G M_S m}{L c} \right)^2 = 3 \left[\left(\frac{G M_S}{r^2} \right) \frac{r}{(\dot{\theta})^2} \right]^2 \text{ homogène à } \left[\frac{\text{Accélération} \times \text{longueur}}{(\text{Vitesse})^2} \right]^2 \text{ sans dimension} \rightarrow \frac{E u^2}{B} \text{ s'exprime en } m^{-1}$$

9) Approche perturbative quand $E \ll 1$ $u(\theta) = u^{(0)}(\theta) + E u^{(1)}(\theta)$

À l'ordre 0 en E , [ED2] s'écrit $u'' + u = B \rightarrow u^{(0)}(\theta) = B + A^0 \cos(\theta - \theta_0)$

Le choix de la direction de l'axe des x permet d'écrire $\boxed{u^{(0)}(\theta) = B + A \cos \theta}$

10) Correction d'ordre 1 [ED2] s'écrit $E \frac{d^2 u^{(1)}}{d\theta^2} + E u^{(1)} = \frac{E u^2}{B} \approx \frac{E u^{(0)2}}{B}$

$$\rightarrow \boxed{\frac{d^2 u^{(1)}}{d\theta^2} + u^{(1)} = B + \frac{1}{2} \frac{A^2}{B} + \frac{1}{2} \frac{A^2}{B} \cos 2\theta + 2A \cos \theta}$$

11) Solution particulière de l'équation non homogène Terme résonnant $2A \cos \theta$.

On vérifie que pour $u^{(1)} = A \theta \sin \theta$, on a bien $\frac{d^2 u^{(1)}}{d\theta^2} + u^{(1)} = 2A \cos \theta$

solution admissible tant que $|E u^{(1)}| \ll u^{(0)}$ (On suppose $A > 0$) alors $E A \theta \ll |B \pm A|$

Pour ellipse $A \ll B$

$$\text{Il faut donc } \boxed{E \theta \ll \left(\frac{B}{A} - 1 \right)}$$

* avant du périhélie

12) direction du périhélie u est maximum au périhélie. Si on néglige $\frac{A}{B}$ devant θ , alors on peut

écrire $u(\theta) \approx B + A (\cos \theta + E \theta \sin \theta) \approx B + A \cos(\theta - E\theta)$ avec l'hypothèse $E \theta \ll 1$

$u(\theta)$ maximum pour $\theta - E\theta = 2n\pi \rightarrow \theta_n = \frac{2n\pi}{1-E} \approx 2n\pi(1+E)$ car $E \ll 1$.

13) Déplacement du périhélie Entre 2 périhélie successifs $\Delta\theta = 2\pi(1+E)$ d'où un déplacement de la direction $\Delta\theta_p = 2\pi E$

14) Cas de Mercure $\varepsilon = 8,03 \cdot 10^{-9}$ $\frac{\dot{\omega}}{T} = \frac{2\pi E}{T} = 5,7 \cdot 10^{-9} \text{ rad/j} = 2,1 \cdot 10^{-4} \text{ rad/ann}$
 $\frac{\dot{\omega}}{T} = 45'' \text{ par siècle.}$

105

III) Plasma dilué * Indice du plasma.

15) Equilibre mécanique du gaz électronique $\text{grad } p = \mu \vec{g} \rightarrow \frac{dp}{dr} = \mu g(r)$

avec $g(r) = -\frac{GM}{r^2}$ d'où l'équation [E] $\boxed{\frac{dp}{dr} = -\frac{GMm_e}{r^2} \frac{N(r)}{N_0}}$

16) Résolution de [E] $\frac{dN}{N} = -\left(\frac{GMm_e}{k_B T E}\right) \frac{dr}{r^2} = -a \frac{dr}{r^2} \rightarrow \ln \frac{N}{N_0} = a\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$
 d'où $\boxed{N(r) = N_0 \exp\left[a\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)\right]}$ On constate que $N(r) \rightarrow N_0 e^{-a/r_0} \neq 0$

17) Cas d'une étoile très chaude $a \ll r_0$ $N(r) \approx N_0\left(1 + \frac{a}{r} - \frac{a}{r_0}\right)$

l'énoncé demande de négliger $\frac{a}{r_0}$ devant 1 ($r > r_0 \Rightarrow \frac{a}{r} < \frac{a}{r_0}$ néanmoins) $\rightarrow N(r) \approx N_0\left(1 + \frac{a}{r}\right)$

La condition $a \ll r_0$ s'écrit $\boxed{T_E \gg \frac{GMm_e}{k_B r_0}}$ Avec $r_0 = R_s \rightarrow T_E \gg 1,26 \cdot 10^6 \text{ K.}$

en prenant $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

18) Modèle de Thomson équation du mouvement d'un électron dans le champ décrit:

$m_e \frac{d^2 x}{dt^2} = -e E_0 e^{i(\omega t - kx)}$ (x est donc la grandeur complexe associée à l'abscisse de l'électron)

la solution forcée a une amplitude x_0 qui vérifie $-m_e \omega^2 x_0 = -e E_0 \rightarrow x_0 = -\frac{e E_0}{m_e \omega^2}$

Pour la vitesse, $\underline{v_0} = i\omega x_0 = -\frac{ie E_0}{m_e \omega}$ d'où la densité de courant $\boxed{\underline{I_0} = Ne \underline{v_0} = -\frac{iNe^2 E_0}{m_e \omega}}$

Equation de propagation de champ électrique:

$\text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = \text{grad}(\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E}$ $\text{div } \vec{E} = \rho/\epsilon_0 = 0$ pour un plasma neutre.

$-\Delta \vec{E} = \text{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\mu_0 \left(\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}\right) \rightarrow \boxed{\Delta \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}}$

En projection sur Ox : $\Delta E_x - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial J_x}{\partial t}$

$\rightarrow -k^2 E_0 + \epsilon_0 \mu_0 \omega^2 E_0 = \mu_0 i\omega \underline{I_0} = \mu_0 \frac{Ne^2 E_0}{m_e \omega} \rightarrow k^2 = \epsilon_0 \mu_0 (\omega^2 - \omega_p^2)$ où $\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m_e \epsilon_0}$

vitesse de phase $\boxed{v_g = \frac{\omega}{k} = \omega c / (\omega^2 - \omega_p^2)^{1/2}}$ $\boxed{n^2(\omega) = \left(\frac{c}{v_g}\right)^2 = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$

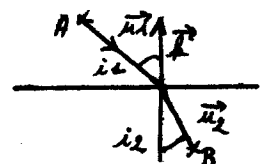
* Mécanique du photon.

19) Cas d'un milieu homogène on a $\text{grad } n = \vec{0} \rightarrow \frac{d(n \hat{u})}{ds} = n \frac{d(\hat{u})}{ds} = \vec{0}$

et donc $\hat{u} = \hat{u}_0$ la tangente à la trajectoire a une direction fixe $\rightarrow$ c'est une droite

20) Réfraction sur un dioptré plan

$d(n \hat{u}) = (\text{grad } n) ds$ $\int_A^B d(n \hat{u}) = n_2 \hat{u}_2 - n_1 \hat{u}_1$



En modélisant la discontinuité de n par une variation rapide dans la direction $\hat{u}$, $\text{grad } n = \frac{dn}{dz} \hat{u}$

et $\int_A (\vec{g} \cdot d\vec{m}) d\vec{s}$ est un vecteur parallèle à $\vec{B} \rightarrow (m_2 \vec{u}_2 - m_1 \vec{u}_1) \wedge \vec{B} = 0$
 $\rightarrow m_1 \vec{u}_1 \wedge \vec{B} = m_2 \vec{u}_2 \wedge \vec{B}$

106

$(\vec{u}_1 \wedge \vec{B})$ est colinéaire à la normale $\vec{N}$ au plan d'incidence et $\vec{u}_2$ orthogonal à $\vec{N}$ donc le rayon réfracté est dans le plan d'incidence et en projection sur $\vec{N}$, on a $m_1 \sin i_1 = m_2 \sin i_2$.

21) Changement de variable $dl = \frac{ds}{n}$ l a la dimension d'une longueur

$$\vec{u} = \frac{d\vec{OM}}{dt} \rightarrow n \vec{u} = \frac{d\vec{OM}}{dl} \rightarrow \frac{d}{ds}(n \vec{u}) = \frac{d}{n dl} \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right) = \frac{1}{n} \frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2}$$

d'où l'équation [DP] $\boxed{\frac{d^2 \vec{OM}}{dl^2} = n(\vec{g} \cdot \vec{u}) \vec{u} = \frac{1}{2} \vec{g} \cdot \vec{u} n^2}$

22) Valeur newtonienne On pose $l = ct$

n ne dépendant que de r , $\vec{g} \cdot \vec{u} (n^2)$ est un champ de vecteur central $\vec{g} \cdot \vec{u} (n^2) = \frac{dn^2}{dr} \hat{r}$

le terme de droite est homogène à l'inverse d'une longueur

l'équation [DP] peut s'écrire $\frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} = \frac{c^2}{2} \vec{g} \cdot \vec{u} (n^2)$ le terme de droite est homogène à une accélération.

n est fonction croissante de $r \rightarrow$ "force" répulsive

23) Trajectoire dans le plasma

$$\frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} = \frac{c^2}{2} \vec{g} \cdot \vec{u} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{a}{r} \right) \right) = \frac{c^2}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{a}{r^2} \hat{r} \rightarrow \text{Trajectoire hyperbolique}$$

24) Manipulation de l'équation [DP] on peut définir $m = \frac{h\nu}{c^2}$ pour le photon.

[DP] peut s'écrire $\frac{h\nu}{c^2} \frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} = \frac{h\nu}{c^2} \vec{g} \cdot \vec{u} (n^2)$ terme de droite est homogène à une force. $\frac{h\nu}{c^2}$ est homogène à une masse.

IV) Retour sur la déviation de la lumière

25) Facteur de réduction $d = \frac{v_T}{v_S} = 1 - \frac{GM_S}{R_S c^2} = \boxed{1 - \frac{P_S}{2R_S} = d}$ $P_S = 2,96 \text{ km}$
 $P_T \approx 9 \text{ mm}$

26) Dilatation du temps A la distance r , $d(r) = \frac{v(r)}{v_S} = \frac{1 - P_S/2r}{1 - P_S/2R_S}$

$n(r) = \frac{c}{v(r)}$ c'est la vitesse de la lumière à la distance r du Soleil.
 c est la vitesse dans le vide (pas d'effet gravitationnel) $n = \frac{ds}{dt} \times \frac{dt'}{ds}$

$$dt' = \frac{ds}{v(r)} dt = \frac{dt}{1 - P_S/2r} \text{ et } \frac{ds}{dt'} = \frac{ds}{dt} \rightarrow \boxed{n = \left(\frac{1}{1 - P_S/2r} \right)^2 \approx 1 + P_S/r}$$

27) Déviation d'un rayon lumineux

Étant donné la symétrie sphérique, l'invariant le long du rayon lumineux est $n r \sin \theta$ (formule de Bouguer) mais θ est l'angle entre rayon vecteur et tangente au rayon.

Je ne comprends pas la relation $D = \theta(\infty) - \theta(-\infty)$. Si on note α l'angle habituel des coordonnées polaires alors $\tan \theta = r \frac{d\alpha}{dr} \rightarrow d\alpha = \frac{\tan \theta}{r} dr$ et $D = 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\tan \theta}{r} dr - \pi$

avec $\tan^2 \theta \approx \frac{P_S^2}{(r + P_S)^2 - R_S^2}$