

MINES PONTS PSI 2 2005

ÉCOULEMENT DE FLUIDE DANS UNE ROCHE .

Merci d'adresser vos remarques à marc.strubel@wanadoo.fr

Les vecteurs sont notés en caractères gras.

I. Etude d'un écoulement :

1. L'équation [1] traduit le principe fondamental de la dynamique au niveau local.

$\partial \mathbf{v} / \partial t$ est l'accélération locale ; $\mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{v})$ est l'accélération convective ;

$-\nabla P$ est la densité volumique des forces de pression ;

$\eta \Delta \mathbf{v}$ est la densité volumique des forces de viscosité.

L'équation de conservation de la matière s'écrit :

$$\begin{aligned} \partial \rho / \partial t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \partial \rho / \partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div}(\mathbf{v}) &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit que pour un écoulement incompressible $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$.

2. En régime stationnaire $\mathbf{v} = v(r, z) \mathbf{u}_z$.

$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \partial v / \partial z = 0$; v ne dépend donc que de r .

$$\mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{v}) = (v(r) \cdot \partial / \partial z) v(r) \cdot \mathbf{u}_z = 0.$$

3. En régime stationnaire l'équation [1] s'écrit :

$$-\nabla P + \eta \Delta \mathbf{v} = 0$$

soit en projetant :

$$\partial P / \partial r = 0 ; \partial P / \partial \theta = 0 ; \partial P / \partial z = (\eta / r) d/dr (r \cdot dv(r)/dr)$$

P ne dépend donc ni de r ni de θ , mais seulement de z .

Dans l'équation projetée sur Oz le premier membre ne dépend que de z , tandis que le second ne dépend que de r ; $\partial P / \partial z$ est une constante.

4. Par intégration, on calcule :

$$v(r) = (dP/dz) (r^2/4\eta) + A \ln r + B$$

Pour que $v(0)$ soit finie, on doit avoir $A = 0$.

Sur la paroi de la conduite par continuité de la vitesse

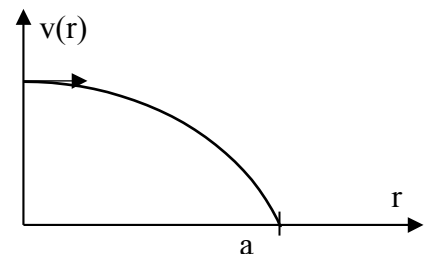
on doit avoir $v(a) = 0$; on en déduit

$$B = -(dP/dz) (a^2/4\eta), \text{ puis le résultat.}$$

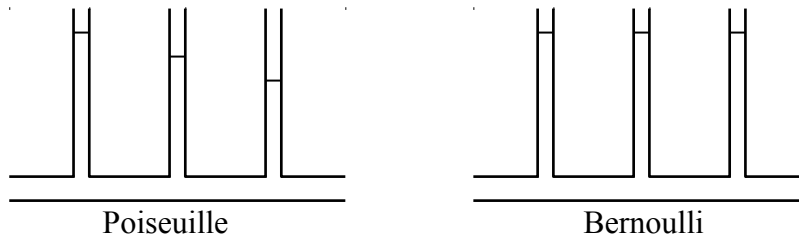
$$5. \quad Q_P = \iint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \iint v(r) \cdot r \cdot dr \cdot d\theta = (dP/dz) (\pi a^4/8\eta)$$

$$\text{Soit } K = -\pi a^4/8\eta.$$

Pour un écoulement dans le sens positif ($v > 0$) on doit avoir $dP/dz < 0$.



6. En régime stationnaire $dP/dz = \text{cte}$, donc P décroît linéairement.
 Pour un fluide parfait ($\eta=0$), on aurait $dP/dz = 0$; P serait uniforme.



7. Il faut comparer a et $\eta/\rho v$.

Si $a \ll \eta/\rho v$ le nombre de Reynolds $Re \ll 1$; la viscosité domine : écoulement de Poiseuille ;
 si $a \gg \eta/\rho v$ le nombre de Reynolds $Re \gg 1$; la convection domine : écoulement de Bernoulli.

II. Porosité d'une roche réservoir :

8. La pression dans le sol augmente avec la profondeur, et défavorise l'existence de cavités ; la porosité décroît donc avec la profondeur.

9. La poussée d'Archimède est la résultante des forces de pression exercées par un fluide sur un corps immergé dans ce fluide.

Dans le premier temps : $m_1 g = m_{\text{nacelle}} g - P_{\text{ArchiNacelle}}$

Dans le second temps : $m_2 g = m_{\text{nacelle}} g + m g - P_{\text{ArchiNacelle}} - \mu_{\text{Hg}} V_T \cdot g$

On en déduit $V_T = (m + m_1 - m_2) / \mu_{\text{Hg}}$ Equ 9A.

Pour l'expérience avec fil le schéma serait identique au second schéma avec des masses m'_1 et m'_2 .

Dans le premier temps : $m'_1 g = m_{\text{échantillon}} g$

Dans le second temps : $m'_2 g = m_{\text{échantillon}} g - \mu_{\text{Hg}} V_T \cdot g$

On en déduit $V_T = (m'_1 - m'_2) / \mu_{\text{Hg}}$ Equ 9B.

V_T ne dépend plus de m car la méthode a changé (?).

10. Comme pour la précédente expérience on a ici : $V_S = (m_3 - m_4) / \mu_{\text{solv}}$ Equ 10.

On a alors $\phi = 1 - \mu_{\text{Hg}} (m_3 - m_4) / \mu_{\text{solv}} (m + m_1 - m_2) = 1 - \mu_{\text{Hg}} (m_3 - m_4) / \mu_{\text{solv}} (m'_1 - m'_2)$.

Dans la mesure de V_S , les pores obstrués sont comptabilisés car ils ne sont pas envahis par le solvant ; on mesure ϕ_u .

III. Perméabilité d'une roche :

11. $[k] = \text{m}^2$.

12. En négligeant l'aire des interstices $A = N\pi a^2$.

Les débits s'ajoutant $Q = N(dP/dz) (\pi a^4/8\eta) = (dP/dz) (A^2/8N\pi\eta)$
d'où $k = A^2/8N\pi$ qui tend vers 0 lorsque N tend vers l'infini.

13. On ne néglige plus l'aire des interstices :

On a ici : $\phi = N\pi a^2/A$

La loi de Darcy s'écrit $Q = (dP/dz) (Ak/\eta) = (dP/dz) N\pi a^2 k / \eta \phi$.

Par identification avec la loi de Poiseuille : $k = \phi a^2/8$.

Dans la configuration proposée $\phi = V_P / V_T = S_P / S_T = (\pi a^2)/(a^2\sqrt{3} - 3\pi a^2/6) = \underline{0,95}$.

14. $\phi = S_P / S_T$

Pour $S_T = 1 \text{ m}^2$, $S_P = N\pi(1/2M)^2 = M^2\pi/4M^2 = \pi/4$, d'où $\phi = \pi/4 = \underline{0,785}$ indépendant de N.

15. $Q = Ak (P_2 - P_1) / \eta l$

16. $Q_{\text{parallèle}} = Q_1 + Q_2 = (eh_1k_1/\eta + eh_2k_2/\eta)(dP/dz) = e(h_1+h_2) k_{\text{parallèle}}/\eta(dP/dz)$,

d'où $k_{\text{parallèle}} = (h_1k_1 + h_2k_2) / (h_1+h_2)$.

Pour l'association série :

$Q = (Ak_1/\eta)(P(l_1)-P(0)) / l_1$

$Q = (Ak_2/\eta)(P(l_1+l_2)-P(l_1)) / l_2$

d'où $k_{\text{série}} = k_1k_2(l_1+l_2) / (k_1l_2+k_2l_1)$.

17. On suppose que la distribution est invariante par translation d'axe Oz .

Elle est également invariante par rotation d'angle θ donc : $\mathbf{v} = v(r) \mathbf{u}_r$.

$\text{div} \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \partial(r.v(r))/\partial r = 0 \Rightarrow v(r) = C/r$ avec $C = \text{cte}$.

On en déduit $Q = \iint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \iint v(r).r.d\theta.dz = 2\pi h C = \text{cte}$.

Par intégration de la loi de Darcy : $P_e - P_i = (\eta Q/2\pi h k) \ln(R_e/R_i)$.

18. Application : $Q = (P_G - P_i) 2\pi h k / \eta \ln(R/a)$.

19. $\phi_M = V_P/V_T = S_P/S_T = A_r/A$.

$$A_r = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{\pi^2}{4\nu} \right)^p A_0 = A_0 \frac{1}{1 - \pi^2/4\nu} \text{ avec } A_0 = \pi R_0^2.$$

$$A = \pi R_{\infty}^2 \text{ avec } R_{\infty} = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2\nu} \right)^p r_0 = r_0 \frac{1}{1 - \pi/2\nu}$$

On en déduit $\boxed{\phi_M = \frac{(1 - \pi/2v)^2}{1 - \pi^2/4v}}$; pour $v=5$ on calcule $\phi_M = 0,93$.

20. Attention erreur d'énoncé : la définition de ϵ donnée ici n'est pas cohérente avec la précédente ; on a en fait $\epsilon = (\pi/2v)^p$, d'où $\text{Ln}\epsilon = p.\text{Ln}(\pi/2v)$

$$N_p = 2.v^p \Rightarrow \text{Ln}(N_p) = \text{Ln}2 + p.\text{Ln}v$$

On en déduit $D_c(v) = -\text{Ln}(v) / \text{Ln}(\pi/2v)$.

Remarque : on retrouve bien les valeurs données par la courbe.

En ajoutant les débits donnés par la loi de Poiseuille :

$$Q = \frac{\pi}{8\eta} \frac{dP}{dz} \sum_{p=0}^{\infty} v^p \cdot \left(\frac{\pi}{2v}\right)^{4p} r_0^4 = \frac{\pi r_0^4}{8\eta} \frac{dP}{dz} \frac{1}{1 - (\pi^4/2^4 v^3)}$$

Par identification avec la loi de Darcy : $k = \frac{\pi r_0^4}{8A} \frac{1}{1 - (\pi^4/2^4 v^3)}$

Or $A = A_r / \phi = A_0 / \phi(1 - \pi^2/4v)$, d'où

D'où $\boxed{k = \frac{\phi r_0^2}{8} \frac{1 - \pi^2/4v}{1 - (\pi^4/2^4 v^3)}}$

Pour $D_c \approx 1,4$ on a $v \approx 5$; avec $\phi = 0,93$ on calcule $k = 0,5.r_0^2/8$.

A la question 13 on avait $k = 0,95.a^2/8$; les ordres de grandeurs sont similaires ; il faudrait comparer a avec un rayon moyen r_m .

IV. Essai de puits :

21. $Q = A.V_{fil} = (dP/dz) (Ak/\eta)$

On raisonne sur un écoulement unidimensionnel, soit $\mathbf{V}_{fil} = V_{fil}\mathbf{u}_z$ et $\nabla P = (dP/dz) \mathbf{u}_z$.

On obtient vectoriellement $\mathbf{V}_{fil} = -k/\eta \nabla P$.

La vitesse de filtration est la vitesse moyenne sur l'aire A , en considérant que sur les parties solides $v = 0$; ce n'est pas la vitesse moyenne du fluide, qu'il faudrait calculer sur A_r .

22. On fait un bilan de matière sur une portion de cylindre de section A , sachant que le fluide traverse l'aire ϕA .

En considérant un écoulement unidimensionnel :

$$dM = q_m(z,t).dt - q_m(z+dz,t).dt \text{ où } q_m \text{ est le débit massique, soit } q_m = \rho.A.V_{fil} \\ = -(\partial q_m / \partial z).dz.dt = -A.(\partial(\rho V_{fil}) / \partial z).dz.dt$$

Or $M = \iiint \rho.dV = \rho.A_r.dz = \rho.\phi.A.dz$ d'où $dM = M(t+dt) - M(t) = \phi.\frac{\partial \rho}{\partial t}.A.dz.dt$

On en déduit $-\frac{\partial(\rho V_{\text{fil}})}{\partial z} = \phi \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t}$, qui se généralise sous la forme $-\text{div}(\rho \vec{V}_{\text{fil}}) = \phi \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t}$

Remarque : une autre méthode plus rapide consiste à écrire l'équation de continuité avec une vitesse moyenne sur la section A égale à V_{fil}/ϕ .

23. En linéarisant autour du point (P_0, ρ_0) , on a $\chi_T = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P} \Big|_T \simeq \frac{1}{\rho_0} \frac{\rho - \rho_0}{P - P_0}$.

On en déduit : $\rho = \rho_0 [1 + \chi_T (P - P_0)]$

On doit avoir : $\chi_T \cdot \delta P \ll 1$.

24. D'après la question 22 $\text{div}(\rho \vec{V}_{\text{fil}}) = -\phi \rho_0 \chi_T (\partial P / \partial t)$

D'après la question 21 $\text{div}(\rho \vec{V}_{\text{fil}}) = -\text{div}((\rho k / \eta) \nabla P) = -\nabla(\rho k / \eta) \cdot \nabla P - (\rho k / \eta) \cdot \Delta P$

$$= (\rho_0 \chi_T k / \eta) \cdot (\nabla P)^2 - (\rho_0 k / \eta) \cdot \Delta P - (\rho_0 \chi_T k (P - P_0) / \eta) \cdot \Delta P$$

Si l'on ne conserve dans le second membre que le terme d'ordre le plus bas, on néglige $\chi_T (P - P_0)$ devant 1 (question 23) et on doit de plus avoir :

$$\chi_T (\nabla P)^2 \ll \Delta P$$

On a alors : $K = k / (\eta \phi \chi_T)$; $[K] = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$; K est une diffusivité.

25. $K = 10^{-2} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

26. Le régime doit être quasi stationnaire, soit $V_{\text{fil}} \ll K \sqrt{A}$.