

CCP PSI Physique 1

Problème A : Fabrication de films photographiques par mouillage dynamique

A.1 Tension superficielle

1.1.	L'interface porte une énergie E positive et proportionnelle au nombre de molécules situées en surface. Or, le nombre de molécules en surface est proportionnel à l'aire A donc l'énergie E est proportionnelle à l'aire A : $E = \gamma A$, où γ est la tension superficielle du liquide ($\gamma > 0$).		
1.2.	Par analyse dimensionnelle, $[\gamma] = \frac{[E]}{[S]}$. L'unité est $J \cdot m^2$ ou $N \cdot m$ ou $Pa \cdot m$ ou $kg \cdot s^{-2}$.		
	L'ordre de grandeur est de 10^2 . La valeur de l'eau est donnée dans l'énoncé.		

A.2 Loi de Laplace

A.2.1	Si le rayon de la goutte augmente de dr , la surface augmente de $dS = d(4\pi r^2) dr = (8\pi R) dr$ donc l'énergie augmente de $dE = \gamma(8\pi R) dr$.		
A.2.2.	Le volume élémentaire balayé par la surface de la goutte est $\delta V = 4\pi R^2 \times dr$. Soit P_1 la pression interne à la goutte et P_0 celle de l'extérieur. La résultante des forces de pression est proportionnelle à la différence de pression $\Delta P = P_1 - P_0$. Le travail des forces de pression sur la surface sphérique est $\delta W_{\text{pression}} = \Delta P \times \delta V = \Delta P \times 4\pi R^2 \times dr$.		
A.2.3	L'égalité entre le travail des forces de pression et l'accroissement d'énergie de la surface conduit à : $\Delta P = 2 \frac{\gamma}{R}$. Le coefficient α vaut $\alpha = 2$.		
A.2.4	Numériquement, la surpression pour une goutte d'eau de $100 \mu m$ de rayon vaut $\Delta P \sim 1,5 \cdot 10^3 \text{ Pa}$ (15 mbar).		

A.3 Hydrodynamique pour le mouillage

A.3.1 Equations générales

A.3.1.a	Si le fluide est incompressible, le champ de vitesse est à divergence nulle $\text{div}(\vec{v}) = 0$.		
A.3.2.b	Les trois équations aux dérivées partielles auxquelles satisfont les composantes u et w sont : $\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\rho g - \frac{\partial P}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$ $\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \eta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$ $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$		

A.3.2 Approximation de lubrification

A.3.2.a	Nous avons montré que $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{U}{L_0} + \frac{W}{h} = 0 \Rightarrow W \ll U$. On peut donc négliger la vitesse transversale.		
----------------	--	--	--

	Ainsi, nous avons $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ et donc $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$.		
	Le nombre de Reynolds étant très petit devant 1, on néglige donc l'inertie du fluide. En reprenant les équations aux dérivées partielles obtenues précédemment, il suffit d'éliminer le terme $\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}$ et les termes en dérivées u par rapport à x , nous obtenons ainsi les équations demandées, à savoir : $\eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g$ et $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$		
A.3.2.b	Dans le film, $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$, donc la pression est constante dans l'épaisseur. La pression dans la lame est fixée par la loi de Laplace $P = P_0 + \frac{\gamma}{R} = P_0 - \gamma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$		

A.3.3 Dépôt sur une plaque tirée d'un liquide mouillant

A.3.3.a	Le liquide au contact de la plaque est entraîné par cette dernière donc $u(0) = V$.		
	Il n'y a pas de cisaillement à la surface libre d'un liquide, donc $\frac{\partial u}{\partial y}(y=e) = 0$.		
A.3.3.b	On a $\eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \rho g$, équation qui s'intègre en : $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\rho g}{\eta} y + cste \Rightarrow u = \frac{\rho g}{2\eta} y^2 + cste \times y + cste_2$		
	Avec les conditions aux limites trouvées dans la question précédente, il vient alors $u = \frac{\rho g}{2\eta} y^2 - \frac{\rho g e}{\eta} y + V$		
	Le débit volumique par unité de longueur de la plaque est $Q = \int_0^e u(y) dy = eV - \frac{\rho g}{3\eta} e^3$		
A.3.3.c	Le débit linéique est maximal, donc $\frac{\partial Q}{\partial e} = 0 \Rightarrow V = \frac{\rho g}{\eta} e^2$. L'épaisseur du film est alors donnée par $e = \sqrt{\frac{\eta V}{\rho g}} = \kappa^{-1} \cdot C_a^{1/2}$. C'est la loi de Derjaguin.		
A.3.3.d	Le nombre de Reynolds est $R_e = \frac{\rho e V}{\eta}$. Avec la loi de Landau, il vient $R_e = \frac{C_a^{5/3}}{\Lambda}$.		
A.3.3.e	Application numérique: $R_e = 1 \Rightarrow C_a = 7 \cdot 10^{-4} \Rightarrow V = 5 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$		

A.4 Drainage des films

A.4.1	A vitesse nulle, en reprenant le résultat de la question A.3.3.b et en changeant le signe car le fluide s'écoule vers le bas maintenant, il vient $Q = \frac{\rho g}{3\eta} e^3$.		
A.4.2	Isolons une tranche de fluide limitée par les plans d'abscisse x et $x+dx$. Ecrivons la conservation de la masse de cette tranche : masse à $t+dt$ = masse à t + variation de masse. Or la masse du fluide est égale à la masse volumique (constante)		

	multipliée par le volume. Il suffit d'effectuer un bilan de volume. Volume à $t+dt$: $h(t+dt) \times dx$ Volume à t : $h(t) \times dx$ Variation de volume = volume entrant – volume sortant = $Q(x) \times dt - Q(x+dx) \times dt$. Il vient alors : $\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$. En reprenant $Q = \frac{\rho g}{3\eta} e^3$, il vient $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\rho g}{\eta} h^2 \frac{\partial h}{\partial x}$. D'où le résultat demandé : $\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\rho g}{\eta} h^2 \frac{\partial h}{\partial x}$.		
A.4.3	On cherche une solution sous la forme $h(x,t) = Ax^\alpha t^\beta$. En reportant cette expression dans l'équation obtenue juste avant, on arrive à l'égalité $A\beta x^\alpha t^{\beta-1} = -\frac{\rho g}{\eta} A^3 \alpha x^{3\alpha-1} t^{3\beta}$. D'où le système $\begin{cases} \beta - 1 = 3\beta \\ \alpha = 3\alpha - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -1/2 \\ \alpha = 1/2 \end{cases}$. On en déduit alors A : $A = \sqrt{\frac{\eta}{\rho g}}$. Donc la hauteur h, en $x=L$, vérifie $h = \sqrt{\frac{\eta L}{\rho g t}} = e$. Soit $L(t) = e^2 \frac{\rho g}{\eta} t$.		
	la vitesse de progression de l'extension est donc	$V(t) = \frac{dL}{dt} = \frac{e^2 \rho g}{\eta}$	
A.4.4	A la question A.3.3.d, on a vu que l'épaisseur du film vérifiait la loi de Landau : l'épaisseur varie en $t^{2/3}$. A la question précédente, on a vu que la vitesse de drainage variait comme e^2, donc comme $t^{4/3}$. Pour obtenir un film d'assez bonne épaisseur, il faut tirer assez vite, mais il faut que le film draine au minimum, c'est-à-dire qu'il ne faut pas tirer trop vite, car la vitesse de drainage augmente en $V^{4/3}$. Il faut donc trouver un compromis pour la vitesse de retrait.		

Fin du corrigé du problème A

Problème B : Etude d'un plasma

B.1 Préambule

B.1.1	1 mole de H_2 occupe le volume molaire $V_M = 24,4\ell$ sous une pression de 1 bar et à 25°C. De fait, $n_{H_2} = Na / (1000 \cdot V_M) = 2,46 \cdot 10^{25}$ atomes/m³ De fait, la molécule étant formée de 2 atomes, $n_{H_2} = 2 Na / (1000 \cdot V_M) = 4,92 \cdot 10^{25}$ atomes/m³.		
B.1.2	Nous avons un électron par atome d'hydrogène d'où la proportion d'atomes déliées $n_e = \alpha n_p$ Application numérique : $n_e = 4,92 \cdot 10^{22}$ atomes/m³		
B.1.3	L'ordre de grandeur des rapports des masses $m_p/m_e \sim 2000$. La valeur exacte est 1836		

B.2 Densité de charge

B.2.1.	Le nombre d'électrons compris entre x et $x+\Delta x$ est $\Delta N_e = n_e \Delta V$		
B.2.2	$\Delta V' = S(x + \Delta x + \xi(x + \Delta x, t) - x - \xi(x, t)) = S\left(\Delta x + \frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta x\right) = \Delta V \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)$		

B.2.3	$n'_e(x,t) = \frac{\Delta N_e}{\Delta V'} = \frac{\Delta N_e}{\Delta V \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)} \approx \frac{\Delta N_e}{\Delta V} \left(1 - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = n_c \left(1 - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)$ en faisant un développement limité au 1^{er} ordre.		
B.2.4	La densité de charges totales est la somme des densités protons et d'électrons: $\rho_{total} = \rho'_e + \rho_p = -en'_e + en_p$ $\rho_{tot} = -en_c \left(1 - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) + en_c = en_c \frac{\partial \xi}{\partial x}$		
B.2.5	Le terme $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ est lié à la compression des charges sous l'effet de l'onde. Le terme $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ représente la vitesse locale de déplacement des charges sous l'effet de l'onde.		
B.2.6	En appliquant la relation de Maxwell-Gauss, $div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ à $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$, nous obtenons $div(\vec{E}) = div(-\overrightarrow{grad}(V)) = \Delta V = -\rho(x,t)/\epsilon_0$		
B.2.7	Nous obtenons l'équation de Poisson : $\Delta V + \rho(x,t)/\epsilon_0 = 0$		
B.2.8	L'ébranlement se faisant selon une seule direction (x), nous nous ramenons à une équation à une dimension. Avec $\rho(x,t) = e \cdot n_c \cdot \partial \xi / \partial x$, nous en déduisons $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{e \cdot n_c}{\epsilon_0} \frac{\partial \xi}{\partial x}$		

B.3 Fréquence plasma

B.3.1.	Dans un référentiel R galiléen, un électron e de masse m est soumis à la force électrique $\vec{F} = q \vec{E} = -q \overrightarrow{grad} V$ Par projection suivant Ox, $F(x,t) = e \frac{dV(x,t)}{dx}$		
B.3.2	En intégrant la relation B.2.8, $\frac{dV(x,t)}{dx} = -\frac{e \cdot n_c}{\epsilon_0} \xi(x,t) + cte$ Comme ξ est nul en l'absence de champ, cette constante est nulle. D'où, $F(x,t) = -\frac{e^2 \cdot n_c}{\epsilon_0} \xi(x,t)$		
B.3.3	En appliquant la relation fondamentale de la dynamique, nous obtenons $m_e \frac{d^2 \xi(x,t)}{dt^2} = -\frac{e^2 \cdot n_c}{\epsilon_0} \xi(x,t)$: Nous obtenons l'équation d'un oscillateur harmonique.		
B.3.4	La solution est du type $\xi(x,t) = \xi_0 \cos(\omega_{pe} t + \varphi) = A \cos(\omega_{pe} t + \varphi) + B \sin(\omega_{pe} t)$		
	Avec $\omega_{pe} = \sqrt{\frac{e^2 \cdot n_c}{m_e \cdot \epsilon_0}}$		
B.3.5	L'application numérique donne $\omega_{pe} = 4,14 \cdot 10^{10} \text{ rad} \cdot s^{-1}$		
B.3.6	Par analogie, seule la masse est modifiée soit $\omega_{pp} = \sqrt{\frac{e^2 \cdot n_c}{m_p \cdot \epsilon_0}}$		

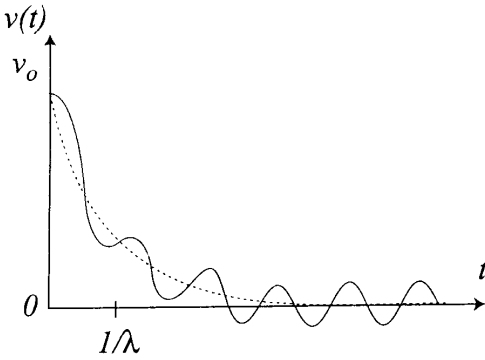
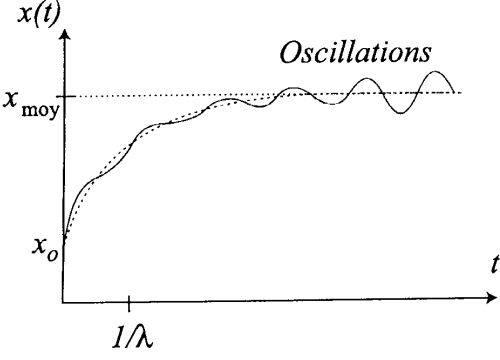
	L'application numérique donne	$\omega_{pe} = 9,26 \cdot 10^8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$		
B.3.7	D'où la rapport des pulsations propres vérifie :	$\frac{\omega_{pe}}{\omega_{pe}} = \sqrt{\frac{m_p}{m_e}} = 44,7$		
	Les résonances sont bien découplées.			

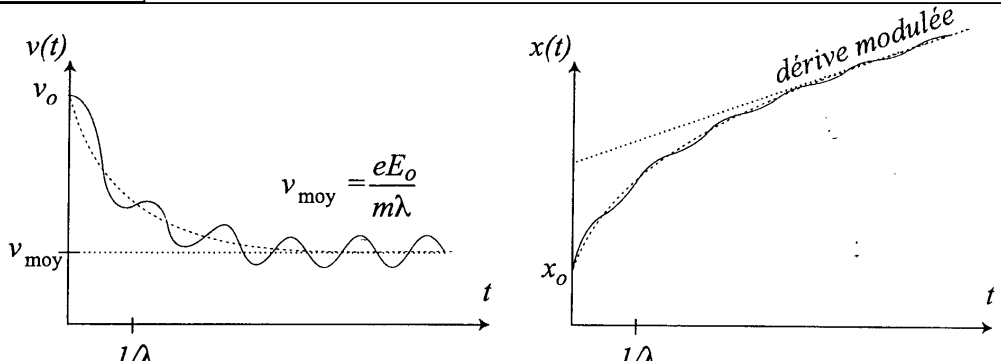
B.4 Courants Plasma

B.4.1	D'après le principe fondamental de la dynamique, nous avons : $m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}$ Le champ étant sinusoïdal, nous utilisons la notation complexe. D'où en intégrant, $\vec{v} = \frac{-e}{m_e} \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{-e}{m_e} \frac{1}{i\omega} \vec{E} = i\omega \left(\frac{e}{m_e} \frac{1}{\omega^2} \right) \vec{E}$		
B.4.2	Or, $\vec{j} = -e \cdot n_e \cdot \vec{v}$ d'où $\vec{j} = -e \cdot n_e \cdot i\omega \left(\frac{e}{m_e} \frac{1}{\omega^2} \right) \vec{E} = -i\omega \epsilon_0 \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \vec{E}$		
B.4.3	Le déphasage est l'argument du complexe : $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ ou quadrature retard. Le circuit à un comportement du type capacitif.		
B.4.4	Par analogie, nous obtenons pour les ions : $\vec{J}_p = -n_e \cdot i\omega \left(\frac{e^2}{m_e} \frac{1}{\omega^2} \right) \vec{E} = \frac{m_e}{m_p} \vec{J}_e$		
	Ce courant est négligeable du fait du rapport des masses.		
B.4.5	Par définition, le courant de déplacement généré est $\vec{J}_D = \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$ D'où, $\vec{J}_D = i\epsilon_0 \omega \vec{E}$		
B.4.6	Le déphasage est l'argument du complexe : $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ou quadrature avance. Le circuit à un comportement du type inductif.		
B.4.7	Le courant total est donc $\vec{j}_e + \vec{J}_D = i\epsilon_0 \omega \vec{E} - i\omega \epsilon_0 \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \vec{E} = i\omega \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right) \vec{E}$ $\vec{J}_{tot} = i\omega \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right) \vec{E}$		

B.5. Plasma à pression ambiante

B.5.1	$\lambda > 0$ car il s'agit d'un amortissement. Nous avons $\vec{F} = \lambda m \vec{v}$ d'où $[F] = [\lambda][m][v]$ soit $[\lambda] = \frac{[F]}{[m][v]} = [MLT^{-2}][M]^{-1} [L]T^{-1}]^{-1} = T^{-1}$		
B.5.2	L'équation différentielle vérifiée par les électrons est $m \frac{dv}{dt} = -\lambda m v - e E_\omega e^{i\omega t}$		
B.5.3	Nous obtenons une équation différentielle du 1 ^{er} ordre avec second membre. La solution homogène est : $v_h(t) = A \exp(-\lambda t)$. Le second membre étant sinusoïdal, la solution particulière est donnée par la méthode des complexes : $m(i\omega + \lambda) \underline{v}_p = -e E_\omega e^{i\omega t}$ alors		

	$\underline{v}_p = -\frac{eE_\omega}{m(i\omega + \lambda)} e^{i\omega t} = v_p e^{i(\omega t + \varphi)}$. On prenant le module et l'argument $v_p(t) = -\frac{eE_\omega}{m\sqrt{\omega^2 + \lambda^2}} \cos(\omega t + \varphi)$ La solution générale est $v(t) = A \exp(-\lambda t) - \frac{eE_\omega}{m\sqrt{\omega^2 + \lambda^2}} \cos(\omega t + \varphi)$ Compte tenu des conditions initiales, $v(0) = v_0$, il vient $A = v_0 + \frac{eE_\omega}{m\sqrt{\omega^2 + \lambda^2}} \cos \varphi$ La solution complète est $v(t) = \left(v_0 + \frac{eE_\omega \lambda}{m\omega^2 + \lambda^2} \right) \exp(-\lambda t) - \frac{eE_\omega}{m\sqrt{\omega^2 + \lambda^2}} \cos(\omega t + \varphi)$		
B.5.4	On a une perte de mémoire de la vitesse initiale du fait de la friction, sur un temps caractéristique correspondant à $1/\lambda$.		
B.5.5	Au delà de ce temps, les électrons viennent osciller autour d'une position d'équilibre :   Figure 3 : Évolution de la vitesse et de la position d'un électron au cours du temps sous l'influence d'un champ extérieur $E = E_\omega \cdot e^{i\omega t}$.		
B.5.6	L'équation différentielle vérifiée par les électrons est : $m \frac{dv}{dt} = -\lambda m v - eE_0 - eE_\omega e^{i\omega t}$		
B.5.7	Nous obtenons une équation différentielle du 1^{er} ordre avec 2 seconds membres. La solution homogène est : $v_h(t) = A \exp(-\lambda t)$. Pour le second membre sinusoïdal, la solution particulière est donnée par la méthode des complexes : $m(i\omega + \lambda) \underline{v}_{p1} = -eE_\omega e^{i\omega t}$ alors $\underline{v}_{p1} = -\frac{eE_\omega}{m(i\omega + \lambda)} e^{i\omega t} = v_p e^{i(\omega t + \varphi)}$. On prenant le module et l'argument $v_{p1}(t) = -\frac{eE_\omega}{m\sqrt{\omega^2 + \lambda^2}} \cos(\omega t + \varphi)$ Pour le second membre constant, $v_{p2} = -\frac{eE_0}{\lambda m}$. La solution générale est $v(t) = A \exp(-\lambda t) - \frac{eE_0}{\lambda m} - \frac{eE_\omega}{m\sqrt{\omega^2 + \lambda^2}} \cos(\omega t + \varphi)$		
B.5.8	Compte tenu des conditions initiales, $v(0) = v_0$, il vient		

	$A = v_0 + \frac{eE_0}{\lambda m} + \frac{eE_\omega}{m\sqrt{\omega^2 + \lambda^2}} \cos \varphi$ La solution complète est $v(t) = \left(v_0 + \frac{eE_\omega \lambda}{m\omega^2 + \lambda^2} + \frac{eE_0}{\lambda m} \right) \exp(-\lambda t) - \frac{eE_0}{\lambda m} - \frac{eE_\omega}{m\sqrt{\omega^2 + \lambda^2}} \cos(\omega t + \varphi)$		
B.5.9	Tout comme dans B.5.4, on a une perte de mémoire de la vitesse initiale du fait de la friction sur un temps caractéristique correspondant à $1/\lambda$.		
B.5.10	Comme on le voit sur la figure ci dessous, le terme E_0 induit une dérive qui est régulièrement modulée au delà du temps $1/\lambda$ autour d'une vitesse moyenne		
	$\vec{v}_{moy} = -\frac{e\vec{E}_0}{m\lambda}$. (figure donnée pour $\vec{E}_0 = -E_0 \vec{e}_x$)		
	 Figure 4 : Évolution de la vitesse et de la position d'un électron au cours du temps sous l'influence d'un champ extérieur $E = E_0 + E_\omega \cdot e^{i\omega t}$.		

B.6 Torche à Plasma

B.6.1	Volume balayé par seconde : $V_{ut} = V_d \cdot l \cdot ep$ AN $V_{ut} = 0,01 \text{ cm}^3/\text{s}$ Le nombre d'atomes correspondant $N_{Fe} = Vol \cdot Na \cdot \rho_{Fe} / m_{at}(Fe) = 8,36 \cdot 10^{20} \text{ at} / \text{s}$		
B.6.2	Le courant est alors $I = N_{Fe} e = 133 \text{ A}$		
B.6.3	La puissance de découpe est : $P = 20 \cdot \text{eV} \cdot N_{Fe}$ L'application numérique donne : $P = 2675 \text{ W}$		
B.6.4	C'est la puissance d'un gros radiateur en plus concentré ... On a ici une puissance surface de 26000 W/cm^2 alors que pour un radiateur de 2 kW , on a en général une puissance d'environ 1 m^2 soit une puissance surfacique de $0,2 \text{ W/cm}^2$. Le courant aussi est nettement plus fort ; le radiateur de 200 W sous 220 V consomme un courant d'environ 9 A		

Fin du corrigé du problème B