

I.1 - $\text{div } \vec{E} = 0 \quad \text{curl } \vec{B} = 0$
 $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ dans le vide
 ($\rho = 0 \quad \vec{J} = \vec{0}$ ici)

I.2 - $\text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = \text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E}$
 --- cours --- $\Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$
 $\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$ avec $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ (1)

I.3a - $\vec{E}(M, t) = E_0 \exp[i(kz - \omega t)] \vec{e}_x$ (2)
 planaire selon $\vec{e}_x$, se propageant selon $+\vec{u}_z$

On injecte 2 dans 1. On peut utiliser les équivalents des opérateurs ici

$$\frac{\partial}{\partial t} \sim -i\omega \quad \Delta \vec{E} \left| \begin{array}{l} \Delta E_x \\ \Delta E_y \\ \Delta E_z \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right|$$

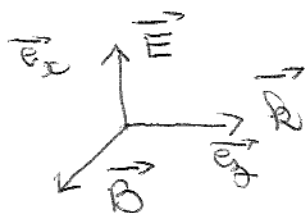
(1) devient $-k^2 - \frac{1}{c^2}(-\omega^2) = 0 \Rightarrow$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad k = \pm \frac{\omega}{c}$$

Pour une OPPH (uniquement) : $\vec{B} = \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}}{c} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$

Rappel : $\text{rot } \vec{E} = \nabla \wedge \vec{E} = i k \wedge \vec{E}$
 $= -i\omega \vec{B} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$

$\vec{B} = \text{Re}(\vec{B})$ ici car $k \in \mathbb{R}$



$(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ forme un trièdre direct.

$$\vec{B} = \frac{\text{Re}(\vec{k} \wedge \vec{E} e^{i(kz - \omega t)})}{\omega} = \frac{RE}{\omega} \vec{e}_y = \frac{E}{c} \vec{e}_y$$

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y$$

I3b

$W m^{-2}$

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

Def du cours

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \left\langle \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right\rangle \text{ on } \vec{E}, \vec{B} \text{ reels}$$

$$\text{ou } \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right)$$

Méthode #1 $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E} (\vec{R} \wedge \vec{E}')}{\mu_0 \omega}$

$$= \frac{(\vec{E} \vec{E}) \vec{R}}{\mu_0 \omega} - \frac{(\vec{R} \cdot \vec{E}) \vec{E}'}{\mu_0 \omega} = \frac{\vec{E}^2 \vec{R}}{\mu_0 \omega} = \frac{\vec{E}^2 \vec{u}_z}{\mu_0 c}$$

$\vec{E} \perp \vec{R}$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\langle E_0^2 \cos^2(\omega t - R_0) \rangle}{\mu_0 c} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \vec{u}_z$$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2} \vec{u}_z$$

Méthode #2 on rotation complexe

$$\begin{aligned} \langle \vec{\Pi} \rangle &= \frac{1}{2} \text{Re} \left(E_0 e^{j(R_0 - \omega t)} \vec{e}_x \wedge \frac{E_0}{c} e^{-j(R_0 - \omega t)} \times \frac{1}{\mu_0} \right) \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{E_0^2}{\mu_0 c} \right) = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \quad \text{idem.} \end{aligned}$$

I3c

$$\langle P \rangle = \left\langle \iint \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} \right\rangle = \iint \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S} = \langle \vec{\Pi} \rangle S$$

$$\langle P \rangle = \frac{E_0^2 S}{2\mu_0 c}$$

$$j_L = \frac{\langle P \rangle}{S} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2}$$

sans surprise...

I3d

$$E_0 = \sqrt{2 j_L \times \frac{1}{\epsilon_0 c}}$$

$$\text{AN: } E_0 = 550 \text{ kV.m}^{-1}$$

II. Faixceau Gaussien

$$\vec{E}(r, t) = \underline{E}(r, z) \exp(i(kz - \omega t)) \vec{e}_z \quad \text{L'onde se propage selon } z \uparrow$$

$$\text{on } \underline{E}(r, z) = E_0 \frac{z_0}{z^2 + z_0^2} \exp\left(-ik \frac{r^2}{2(z + iz_0)}\right)$$

! L'onde n'est pas plane. En effet, $z = dte$ (dans $kz - \omega t$)
 L'amplitude $\underline{E}$ dépend également de r : elle n'est pas constante dans le plan $\perp$ à la direction de propagation $\vec{e}_z$

II.1.a

$$\begin{aligned} |E(r, z)|^2 &= E_0^2 \frac{z_0^2}{z^2 + z_0^2} \left| \exp\left[-\frac{ik}{2} \frac{r^2 (z - iz_0)}{z^2 + z_0^2}\right] \right|^2 \\ &= E_0^2 \frac{z_0^2}{z^2 + z_0^2} \left| \exp\left[-\frac{kr^2 z_0}{2(z^2 + z_0^2)}\right] \right|^2 \left| \exp\left[\frac{ikzr^2}{2(z^2 + z_0^2)}\right] \right|^2 \\ &= E_0^2 \frac{z_0^2}{z^2 + z_0^2} \exp\left[\frac{-2kr^2 z_0}{2(z^2 + z_0^2)}\right] \end{aligned}$$

On identifie $\frac{2(z^2 + z_0^2)}{R z_0} = \omega^2(z) \Rightarrow \frac{2z_0}{R} \cdot \frac{z^2 + z_0^2}{z_0^2} = \frac{2z_0}{R} \left(1 + \frac{z^2}{z_0^2}\right) = \omega^2(z)$

$$\left[\omega^2(z) = \omega_0^2 \left(1 + \frac{z^2}{z_0^2}\right) \right] \text{ ici}$$

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{2z_0}{R}}$$

On identifie $E_0^2 \frac{z_0}{z^2 + z_0^2} = A^2 \Rightarrow \boxed{A^2 = E_0^2 \frac{1}{1 + \frac{z^2}{z_0^2}}}$

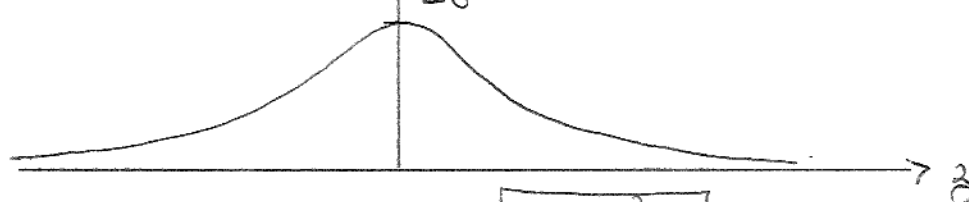
On a bien $A(z) \omega(z)$

$$A(z) \omega(z) = E_0 \frac{1}{1 + \frac{z^2}{z_0^2}} \times \omega_0 \times \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_0^2}}$$

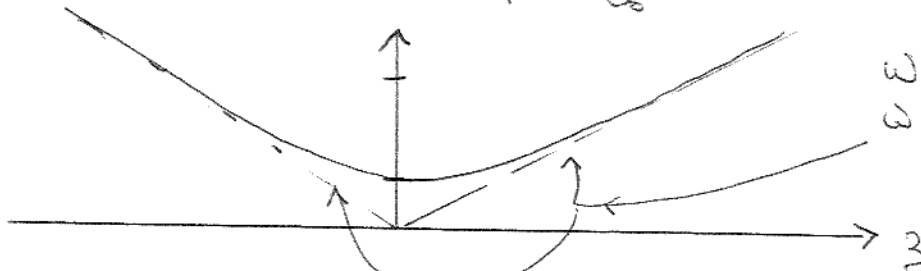
$$\boxed{A(z) \omega(z) = \omega_0}$$

CQFD

II.1.b On rappelle $A(z) = \frac{E_0}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{z_0^2}}}$



$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_0^2}}$



$w \approx w_0$ si $z \ll z_0$
 $w \approx \frac{w_0}{z_0} z$ si $z \gg z_0$

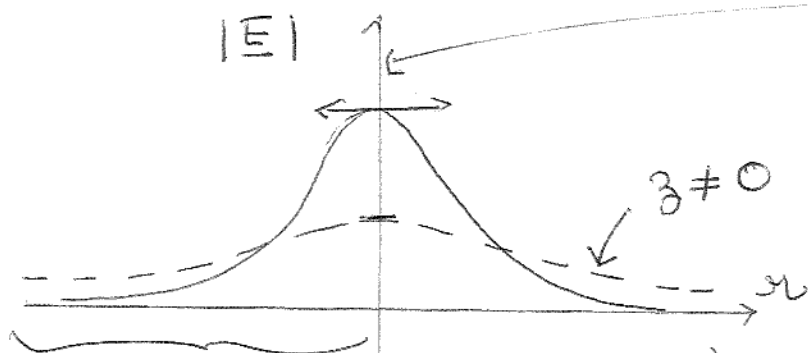
II.1.c On fixe z . $|E|_{z=0} = A^2_{z=0} \exp\left(-\frac{2r^2}{w_0^2}\right)$

$= E_0^2 \exp\left(-\frac{2r^2}{w_0^2}\right)$

$|E|_{z=0} = E_0 \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2}\right)$

noter que $\frac{d|E|}{dr} = -2r E_0 \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2}\right)$

$= 0$ en $r=0$



$r < 0$ n'a aucun intérêt en coordonnées cylindriques.

La largeur est plus large mais E moins intense au centre.

$w(z)$ est la largeur caractéristique du faisceau en z

II 2a Méthode déjà rencontrée.

#1 On lit $\left| \frac{\partial \underline{E}}{\partial r} \right|$ comme $\frac{|\underline{E}|}{L^*}$ L^* une distance caractéristique selon $\vec{e}_r$

Soit $\frac{|\underline{E}|}{L^*} \ll \frac{|\underline{E}|}{\lambda}$ ou encore $L^* \gg \lambda$

$$\Rightarrow \left| \frac{\partial \underline{E}}{\partial r} \right| \ll \frac{|\underline{E}|}{\lambda} \approx \frac{|\underline{E}| k}{1} \Rightarrow \left| \frac{\partial \underline{E}}{\partial r} \right| \ll k |\underline{E}|$$

en OdG

#2

Même raisonnement

$$\left| \frac{\partial \underline{E}}{\partial z} \right| \ll \frac{|\underline{E}|}{\lambda} \ll |\underline{E}| k$$

II 2b On choisit $\text{rot } \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$ plus facile à intégrer que MA.

Si, avec notre convention $e^{i(kz - \omega t)}$, on a $\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = -i\omega \underline{B}$

$$\Rightarrow \text{rot } \underline{E} = +i\omega \underline{B} \quad \text{et} \quad \underline{E} = E(r, z) \exp[i(kz - \omega t)] \vec{e}_x$$

$$\triangle \underline{E} \text{ n'est pas une onde plane} \Rightarrow \underline{B} = \frac{\underline{E} \wedge \vec{e}_x}{\omega}$$

Le formulaire donne $\text{rot}(f \underline{A}) = f \text{rot } \underline{A} + \text{grad } f \wedge \underline{A}$

et $\text{grad } f = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$ en cylindriques.

en II 2a on a montré (ou admis ...) $\left| \frac{\partial \underline{E}}{\partial r} \right| \ll k |\underline{E}|$
 $\left| \frac{\partial \underline{E}}{\partial z} \right| \ll k |\underline{E}|$

Par ailleurs $\left| \frac{\partial \underline{E}}{\partial \theta} \right| = 0$

On arrive à identifier f à $E(r, z)$ et $\underline{A} = \exp[i(kz - \omega t)] \vec{e}_x$

Dans ce cas :

$$\text{rot } \underline{A} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \exp[i(kz - \omega t)] & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial z} \exp[i(kz - \omega t)] \vec{e}_\theta = i k \exp[i(kz - \omega t)] \vec{e}_\theta$$

en coordonnées

$$\text{rot } \vec{A} = E(r, z) \cdot iR \exp i(Rz - \omega t) \vec{e}_y + \begin{vmatrix} \frac{\partial E}{\partial r} & \exp i(Rz - \omega t) \\ 0 & 0 \\ \frac{\partial E}{\partial z} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= E(r, z) iR \exp i(Rz - \omega t) \vec{e}_y + \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{\partial E}{\partial z} \times \exp i(Rz - \omega t) \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{or } \left| \frac{\partial E}{\partial z} \right| \ll |R E| \text{ en } \textcircled{\text{II 2a}}$$

on a finalement: $\text{rot } \vec{E} \simeq iR E(r, z) \exp i(Rz - \omega t) \vec{e}_y$

et $\text{rot } \vec{E} = +i\omega \vec{B} \Rightarrow \vec{B} = \frac{R}{\omega} E(r, z) \exp i(Rz - \omega t) \vec{e}_y$

$$\vec{B} = \frac{E}{c} \exp i(Rz - \omega t) \vec{e}_y \quad \text{on se retrouve dans la même forme que pour les OPP.}$$

$\textcircled{\text{II 3a}} \quad \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right)$ donnée à la fin de l'exercice.

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{1}{\mu_0 c} E \vec{e}_x \wedge E^* \vec{e}_y \right) = \frac{1}{2\mu_0 c} |E|^2 \vec{e}_z$$

$$j(r, z) = |\langle \vec{\Pi} \rangle| = \frac{|E|^2}{2\mu_0 c}$$

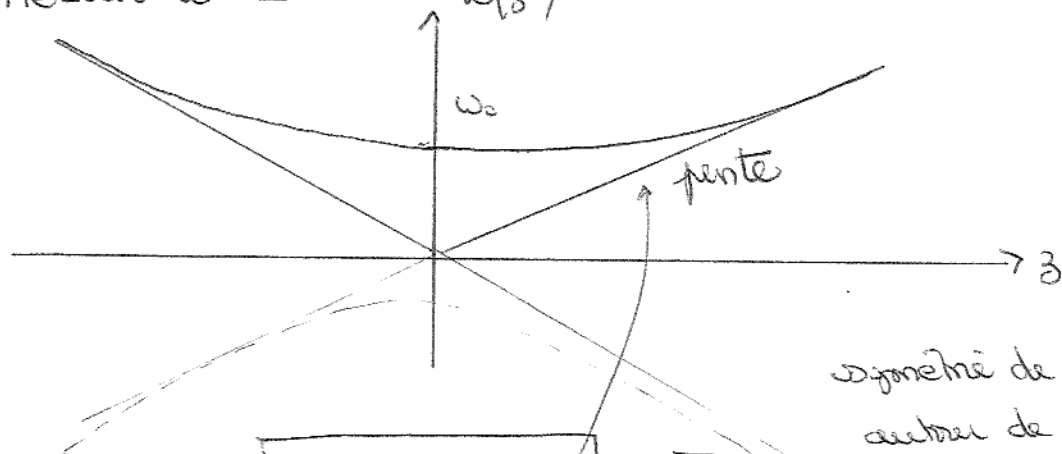
$\textcircled{\text{II 3b}}$ On se rappelle $|E|(r, z) = A^2(z) \exp \left(-\frac{2r^2}{w^2(z)} \right)$

z est fixé ici.

$$j = j_{\text{max}}(z) \times \frac{1}{e^2} \quad \text{si } |E|^2 \text{ est } \frac{|E|_{\text{max}}^2}{e^2}(z, 0)$$

i.e. si $\boxed{r = R = w(z)}$

II 3.c Retour à II.1.b $\omega(\beta)$



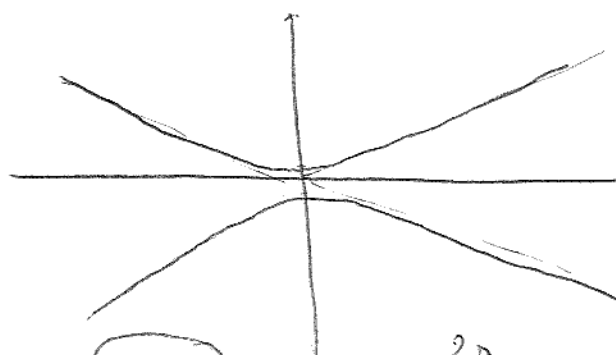
symétrie de relation
autour de $O\beta$.

Si $\beta_0 \ll \beta \Rightarrow$

$$\omega(\beta) \approx \omega_0 \frac{\beta}{\beta_0}$$

$$\beta = \frac{\omega_0}{\beta_0}$$

Une de bin



Gnes.

On a établi en (II 1a)

$$\omega_0^2 = \frac{2\beta_0}{R} \Leftrightarrow$$

$$\beta = \sqrt{\frac{2\beta_0}{\pi\beta_0^2}}$$

$$\beta_0 = \frac{\pi\omega_0^2}{2} \Leftrightarrow \left(= \frac{2\beta_0}{2\pi} \right)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{2}{\pi\beta_0}}$$

II 3d

AN:

$$\beta_0 \approx 0,8m$$

$$\beta = 6,15^{-3} rad = 0,34^\circ = 2'$$

III - Absorption du LASER dans un milieu matériel

III.1 PFD à $1\bar{e}$: $\left[m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{m}{\tau} \vec{v} - e \vec{E} \right] \quad (\text{RSF})$
 (Eq)

$$[\tau] = \tau$$

III.2 $\vec{v} = \vec{V} e^{i p(-i\omega t)}$

a) (Eq) s'écrit : $-m i\omega \vec{V} = -\frac{m}{\tau} \vec{V} - e \vec{E}_0$

$$\Leftrightarrow \vec{V} = -\frac{e \vec{E}_0}{m \left(\frac{1}{\tau} - i\omega \right)} = -\frac{e \tau}{m} \frac{1}{1 - i\omega \tau} \vec{E}_0$$

b) $\vec{j} \triangleq -e N \vec{v} = \frac{N e^2 \tau}{m} \frac{1}{1 - i\omega \tau} \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$

$$\vec{j} = \frac{\sigma_0}{(1 - i\omega \tau)} \vec{E}_0 e^{-i\omega t} = \frac{\sigma_0}{(1 - i\omega \tau)} \vec{E}$$

en remarquant que $\sigma_0 = \frac{N e^2 \tau}{m}$ pour $\vec{v} = \vec{c} \vec{E}$

$$\vec{j} = \frac{\sigma_0}{(1 - i\omega \tau)} \vec{E}$$

$$\vec{j} = \underline{\sigma}(i\omega) \vec{E}$$

$$\underline{\sigma} = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega \tau} \quad \text{conductivité complexe.}$$

BF $\longrightarrow \sigma_0$ ($\vec{j}$ et $\vec{E}$ en phase)

HF $\longrightarrow \frac{\sigma_0}{-i\omega \tau}$ (en quadrature, voir en TD)
 $\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = 0$

$$\underline{\vec{E}}(r,t) = \underline{f}(z) e^{-i\omega t} \underline{\vec{e}}_x \quad \text{maintenant.}$$

$$\textcircled{\text{III 3a}} \quad \begin{cases} \text{div } \underline{\vec{E}} = 0 & (\rho=0) & \text{rot } \underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} \\ \text{div } \underline{\vec{B}} = 0 & & \text{rot } \underline{\vec{B}} = \mu_0 \underline{\vec{j}} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} \end{cases}$$

($\exists \underline{\vec{j}}$ ici, bien que $\rho=0$ en moyenne.)

$$\text{rot } \underline{\vec{B}} = \mu_0 \left(\underline{\vec{j}} + \epsilon_0 \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} \right) \quad \text{d'après } \textcircled{\text{III 2b}}$$

$$\text{rot}(\text{rot } \underline{\vec{E}}) = \text{grad}(\text{div } \underline{\vec{E}}) - \Delta \underline{\vec{E}}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \underline{\vec{B}} = -\Delta \underline{\vec{E}} \quad \Rightarrow \quad \Delta \underline{\vec{E}} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = \underline{\vec{0}} \quad (E)$$

$$\textcircled{\text{III 3b}} \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{\vec{E}} = (-i\omega)^2 \underline{\vec{E}} = -\omega^2 \underline{\vec{E}}$$

$\underline{\vec{E}}$ est perpendiculaire selon $\underline{\vec{e}}_x$. On projette (E) sur $\underline{\vec{e}}_x$

$$\Delta E_x - \mu_0 \sigma \frac{\partial E_x}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \underline{f}(z)}{dz^2} e^{-i\omega t} - \mu_0 \sigma \times (-i\omega) \underline{f}(z) e^{-i\omega t} + \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \underline{f}(z) e^{-i\omega t} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{f}''(z) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} \right) \left(1 + i \frac{\mu_0 \sigma \omega}{\omega^2} \times c^2 \right) \underline{f}(z) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{f}''(z) + \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + i \frac{\mu_0 c^2}{\omega} \sigma \right) \underline{f}(z) = 0$$

$$\left(\text{et } \underline{\sigma} = \frac{\sigma_0}{1-i\omega\tau} = \frac{Ne^2\tau}{m} \times \frac{1}{(1-i\omega\tau)} \right)$$

$$\Rightarrow \underline{f}''(z) + \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + i \frac{\mu_0 c^2}{\omega\tau} \frac{Ne^2\tau^2}{m} \times \frac{1}{1-i\omega\tau} \right) \underline{f}(z) = 0 \quad \left(\times \frac{\tau}{i\tau} \right)$$

$$\text{on lit : } \tau^2 \times \frac{Ne^2\mu_0 c^2}{m} = \tau^2 \omega_p^2$$

$$\boxed{\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2\mu_0 c^2}{m}} = \sqrt{\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m}}} \quad \text{soit.}$$

III 3c

$$\omega_p = 2,4 \cdot 10^{16} \text{ rad s}^{-1}$$

III 3d

$$\underline{d}''(z) + \underline{n}^2 \frac{V^2}{c^2} \underline{d}(z) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{d}''(z) + k^2 \underline{d}(z) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{d}(z) = A e^{i k (n' + i n'') z} + B e^{-i k (n' + i n'') z}$$

$$= A e^{i(k n' z - \omega t) - k n'' z} + B e^{i(k n' z + \omega t) - k n'' z}$$

$B = 0$ car divergence

$$\underline{d}(z) = A e^{i(k n' z - \omega t)} e^{-k n'' z}$$

et $\underline{E}(z, t) = A_0 e^{i(k n' z - \omega t) - k n'' z}$

III 3e

loud ... $\omega_p = 2,4 \cdot 10^5 \text{ rad s}^{-1}$; $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = 1,8 \cdot 10^{15} \text{ rad s}^{-1}$

$\epsilon = 8 \cdot 10^{-15} \text{ s}$

$$\Rightarrow g_m(\underline{n}^2) = \frac{\omega_p^2 \epsilon}{\omega(1 + \omega^2 \epsilon^2)} \quad (= 2 \text{ m}^2 \text{ m}^{-1})$$

$$\Rightarrow |\underline{n}^2| = \frac{g_m(\underline{n}^2)}{2 \text{ m}^2 \text{ m}^{-1}}$$

AN : $|\underline{n}^2| = 0,46$

III 4

$$\underline{B} = \frac{\underline{B} \wedge \underline{E}}{\omega} = \underline{n} \frac{E}{c} \underline{e}_y \quad \text{ici}$$

$$\langle \underline{\pi} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{\underline{E} \wedge \underline{B}^*}{\mu_0} \right) = \frac{1}{2\mu_0 c} \text{Re} (\underline{E} \underline{e}_x \wedge \underline{E}^* \underline{e}_y)$$

$$= \frac{V E^2}{2\mu_0 c} \underbrace{\text{Re}(\underline{n}^2)}_{=1} \underline{e}_z$$

$$\langle \underline{\pi} \rangle = \frac{|A_0|^2}{2\mu_0 c} e^{-2k n'' z} \times \underline{n}^2 \underline{e}_z$$

$$\langle P \rangle = \langle \Pi \rangle S = \frac{|A_0|^2 m' S}{2\mu_0 c} e^{-2kn''z}$$

Soit

$$P_0 = \frac{|A_0|^2 m' S}{2\mu_0 c} \quad \text{et} \quad \alpha = 2kn''$$

III 5.6

$$\alpha = \frac{4\pi}{\lambda} m'' = 1,6 \cdot 10^8 \text{ m}^{-1}$$

$$\text{Soit } \frac{1}{\alpha} \approx 10 \text{ nm en CdTe.} \quad (\text{très faible})$$