

1 a) Invariance par translation selon Oz : $\vec{E}$ et V ne dépendent pas de z $\frac{1}{6}$
 $\vec{E}(r, \theta)$ et $V(r, \theta)$ et $E_z = -\text{grad} V \cdot \vec{e}_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = 0$: $\vec{E} = E_r(r, \theta) \vec{e}_r + E_\theta(r, \theta) \vec{e}_\theta$

b) La "symétrie par rapport à tout plan perpendiculaire à l'axe" équivaut à l'invariance par translation; on en déduit les mêmes conclusions qu'en a)

c) Le plan (Ox, Oz) "passe par l'axe et les axes de deux électrodes opposées" C_1 et C_4 , est un plan de symétrie (C_6 et C_2 portent (-1) , C_5 et C_3 portent (1)). Deux points

 $M(r, \theta, z)$ et $M'(r, -\theta, z)$ symétriques sont au même potentiel:

$$V(r, -\theta, z) = V(r, \theta, z) \quad \begin{cases} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \Rightarrow E_r(r, -\theta, z) = E_r(r, \theta, z) \\ E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \Rightarrow E_\theta(r, -\theta, z) = -E_\theta(r, \theta, z) \end{cases}$$

d) Un plan passant par l'axe et à égale distance des électrodes (par exemple, le plan $\theta = \frac{\pi}{6} [\pi]$) est plan d'antisymétrie; tout point M de ce plan est à égale distance de $C_1 (1)$ et $C_2 (-1)$, de $C_6 (-1)$ et $C_3 (1)$, de $C_5 (1)$ et $C_4 (-1)$: toute contribution d'un λdx est compensée par celle d'un $(-1)dx$ à même distance; $V(M)$ ne dépend donc pas de la position de ce point: le plan est équipotentiel (au potentiel nul avec le choix de I.3.), et E_r est nul sur ce plan

e) Il y a invariance du dispositif par rotation de $\frac{2\pi}{3}$; $V(r, \theta + n \frac{2\pi}{3}) = V(r, \theta)$
 $V(r, \theta)$ est une fonction périodique de θ , de période $\frac{2\pi}{3}$, donc décomposable en série de Fourier; de plus elle est paire, donc seulement des cosinus:

$$V(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r) \cos\left(n \frac{2\pi\theta}{2\pi/3}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r) \cos(n 3\theta)$$

f) On applique le théorème de Gauss à une surface cylindrique de rayon ρ , de hauteur h ; $\vec{E}$ est radial (le plan π_1 passant par M et l'axe est plan de symétrie; le plan π_2 passant par M et perpendiculaire à l'axe aussi: $\vec{E}(M)$ est selon leur intersection), et $\vec{E} \cdot \vec{e}_\rho$ ne dépend que de ρ (invariance par translation le long de l'axe et de révolution autour de l'axe): $\vec{E}(M) = E(\rho) \vec{e}_\rho$

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{n} d^2S = E(\rho) \cdot 2\pi \rho h = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \quad ; \quad \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 \rho} \vec{e}_\rho \quad ; \quad dV = -\vec{E} \cdot d\vec{M} = -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 \rho} \cdot d\rho$$

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln \rho + \text{cte}$$

g. $V(P)$ est la somme des contributions des électrodes C_1, C_3, C_5 avec λ et C_2, C_4, C_6 avec (-1) : $V(P) = -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} (\ln \rho_1 + \ln \rho_3 + \ln \rho_5) + \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} (\ln \rho_2 + \ln \rho_4 + \ln \rho_6) + \text{cte}'$
 Sur l'axe $\rho_i = \rho_j$ et $V=0$ donc $\text{cte}' = 0$

$$V(P) = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \cdot \ln \left(\frac{\rho_2 \cdot \rho_4 \cdot \rho_6}{\rho_1 \cdot \rho_3 \cdot \rho_5} \right)$$

4. $\mathcal{D}_1 = \|\vec{PC}_1\| = |\underline{z} - R|$; $\mathcal{D}_3 = \|\vec{PC}_3\| = |\underline{z} - jR|$ etc... et $|abc| = |a| \cdot |b| \cdot |c|$

Donc $\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_3 \mathcal{D}_5 = |(\underline{z} - R)(\underline{z} - jR)(\underline{z} - j^2 R)| = |\underline{z}^3 - R\underline{z}^2(1+j+j^2) + R^2\underline{z}(j+j^2+j^3) - j^3 R^3|$
 Or $1+j+j^2=0$; $j+j^2+j^3=j(1+j+j^2)=0$; $j^3 = (e^{i\frac{2\pi}{3}})^3 = e^{i2\pi} = 1$

Donc $\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_3 \mathcal{D}_5 = |\underline{z}^3 - R^3|$; $\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_4, \mathcal{D}_6$ s'obtient en changeant R en $(-R)$
 $\mathcal{D}_2 \mathcal{D}_4 \mathcal{D}_6 = |\underline{z}^3 + R^3|$

et $V(P) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left| \frac{\underline{z}^3 + R^3}{\underline{z}^3 - R^3} \right| = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left| \frac{R^3 + \underline{z}^3}{R^3 - \underline{z}^3} \right|^2$

5. $R^3 + \underline{z}^3 = R^3 + r^3 e^{i3\theta} = R^3 \left(1 + \frac{r^3}{R^3} e^{i3\theta} \right) = R^3 \left[\left(1 + \frac{r^3}{R^3} \right) \cos 3\theta + i \frac{r^3}{R^3} \sin 3\theta \right]$

$|R^3 + \underline{z}^3|^2 = R^6 \left[\left(1 + \frac{r^3}{R^3} \cos 3\theta \right)^2 + \left(\frac{r^3}{R^3} \sin 3\theta \right)^2 \right] = R^6 \left[1 + 2 \frac{r^3}{R^3} \cos 3\theta + \left(\frac{r^3}{R^3} \right)^2 \right]$

$|R^3 - \underline{z}^3|^2 = R^6 \left[1 - 2 \frac{r^3}{R^3} \cos 3\theta + \left(\frac{r^3}{R^3} \right)^2 \right]$ (on change r en $(-r)$)

$V(P) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\ln \left[1 + 2 \frac{r^3}{R^3} \cos 3\theta + \left(\frac{r^3}{R^3} \right)^2 \right] - \ln \left[1 - 2 \frac{r^3}{R^3} \cos 3\theta + \left(\frac{r^3}{R^3} \right)^2 \right] \right]$

$\left(\frac{r}{R} \right)^3$ est un infiniment petit ε ; $\left(\frac{r^3}{R^3} \right)^2$ est ε^2 ; $\ln(1+\varepsilon) \simeq \varepsilon$

d'où $V(P) \simeq \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[2 \frac{r^3}{R^3} \cos 3\theta - \left(-2 \frac{r^3}{R^3} \cos 3\theta \right) \right] = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \frac{r^3}{R^3} \cos 3\theta$

On trouve les symétries de la question 1: $V(r, \theta)$ (a et b) ; $V(r, -\theta) = V(r, \theta)$ (c)

$V(r, \frac{\pi}{6} + n \frac{2\pi}{3}) = \text{cte} (= 0)$ (d) ; $V(r, \theta + n \frac{2\pi}{3}) = V(r, \theta)$ (e)

Dans le développement en série de Fourier de (e), on trouve $a_n = 0$ si $n \neq 1$

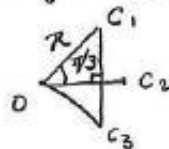
6 Le potentiel est une fonction continue; la formule obtenue en I.3.

s'applique sur la surface d'une électrode C_i : $\mathcal{D}_i > a$ et $\mathcal{D}_i \rightarrow a$

Pour C_1 : $\mathcal{D}_1 = a$; $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_6 = R$ (triangle $C_1 O C_2$ équilatéral)

$\mathcal{D}_3 = \mathcal{D}_5 = 2R \sin \frac{\pi}{3} = 2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$

$\mathcal{D}_4 = 2R$



$V(C_1) = V_0 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2R^3}{3aR^2} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2R}{3a}$

Les électrodes paires sont au potentiel $-V_0$ (antisymétrie par rapport au plan $\theta = \frac{\pi}{6}$)

7. L'unité de longueur du condensateur porte les charges 3λ et -3λ ,

et est soumis à la cddp $2V_0$: $3\lambda = C \cdot 2V_0$; $C = \frac{3\pi\epsilon_0}{\ln \frac{2R}{3a}} = 4,4 \cdot 10^{-11} \text{ F} = 44 \text{ pF m}^{-1}$

II 1. $W = -\vec{d} \cdot \vec{E} = -d_{\text{eff}} \|\vec{E}\|$

(28)

3/6

2. $\vec{E} = -\text{grad} \left(\frac{\lambda}{\pi \epsilon_0} \left(\frac{r}{R} \right)^3 \cos(3\theta) \right) = \frac{\lambda}{\pi \epsilon_0 R^3} \left[-3r^2 \cos(3\theta) \vec{e}_r + 3r^2 \sin(3\theta) \vec{e}_\theta \right]$

$\|\vec{E}\| = \frac{3r^2 \lambda}{\pi \epsilon_0 R^3}$; $W = -d_{\text{eff}} \cdot \frac{3\lambda}{\pi \epsilon_0 R^3} r^2$

3. $\vec{F} = -\text{grad} W = \frac{6d_{\text{eff}} \lambda}{\pi \epsilon_0 R^3} r \vec{e}_r = \frac{6d_{\text{eff}} \lambda}{\pi \epsilon_0 R^3} \vec{r} = -K \vec{r}$ avec $K = -\frac{6d_{\text{eff}} \lambda}{\pi \epsilon_0 R^3}$

La loi fondamentale de la dynamique s'écrit $\vec{F} = m \vec{a}$

$\vec{OP} = \vec{r} + z \vec{e}_z$; $\vec{a} = \ddot{\vec{r}} + \ddot{z} \vec{e}_z$ donc $m \ddot{\vec{r}} + m \ddot{z} \vec{e}_z = -K \vec{r} + 0 \vec{e}_z$

On obtient donc $\begin{cases} m \ddot{\vec{r}} = -K \vec{r} \\ \ddot{z} = 0 \Leftrightarrow z = v_{0z} t + z_0 \end{cases}$

Le mouvement en $\vec{r}(t)$ est périodique (mais pas le mouvement complet!) si K est positif donc $d_{\text{eff}} < 0$

Pour $d_{\text{eff}} > 0$, $\vec{r} = \vec{A} e^{\sqrt{\frac{K}{m}} t} + \vec{B} e^{-\sqrt{\frac{K}{m}} t}$ et les particules sont éjectées: $\|\vec{r}(t)\| \nearrow$

Pour $\vec{r}(t)$ périodique: $\ddot{\vec{r}} + \frac{K}{m} \vec{r} = \vec{0}$ s'écrit $\ddot{\vec{r}} + (2\pi\omega_0)^2 \vec{r} = \vec{0}$

ici ω_0 est une fréquence!!!) donc $\omega_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}}$

1. $\vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} + (2\pi\omega_0)^2 x = 0 \\ \ddot{y} + (2\pi\omega_0)^2 y = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} x &= A \cos(2\pi\omega_0 t) + B \sin(2\pi\omega_0 t) \\ y &= C \cos(2\pi\omega_0 t) + D \sin(2\pi\omega_0 t) \end{aligned}$

à $t=0$, la molécule est sur l'axe ($x(0)=y(0)=0 \Rightarrow A=C=0$), avec une

vitesse: $\begin{cases} \dot{x}(0) = B 2\pi\omega_0 = v_{0x} \\ \dot{y}(0) = D 2\pi\omega_0 = v_{0y} \end{cases}$

$\begin{cases} x(t) = \frac{v_{0x}}{2\pi\omega_0} \sin(2\pi\omega_0 t) \\ y(t) = \frac{v_{0y}}{2\pi\omega_0} \sin(2\pi\omega_0 t) \\ z(t) = v_{0z} t + z_0 \end{cases}$

5. L'hexapôle sélectionne les molécules $d_{\text{eff}} < 0$ (qui ont $\vec{r}(t)$ périodique)

qui se refocalisent lorsque $x=y=0$, donc $\sin(2\pi\omega_0 t) = 0$ $t = n \times \frac{1}{2\omega_0}$

La première refocalisation, au bout d'une demi-période ($n=1$) se fait

à $z = v_{0z} \times \frac{1}{2\omega_0} + z_0$, donc au bout de la distance $z - z_0 = v_{0z} \times \frac{1}{2\omega_0}$

6. La probabilité de trouver une molécule avec la vitesse v (à dv près)

est $dP = \frac{dN}{N}$; la vitesse la plus probable correspond à $\frac{d}{dv}(dP) = 0$

(dP maximale). L'énoncé propose $dN(v)$ en $v^3 \exp(\dots) dv$.

$\frac{d}{dv}(dP) = \frac{A}{N} \left[3v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) + v^3 \left(-\frac{2mv}{2k_B T}\right) \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) \right] dv$

$\frac{d}{dv}(dP) = 0$ pour $3v^2 + v^3 \left(-\frac{2mv}{2k_B T}\right) = 0$ donc $v = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$

La vitesse quadratique moyenne est telle que: $\frac{1}{2} m u^2 = 3 \times \frac{1}{2} k_B T$

$$u = \sqrt{\frac{3 k_B T}{m}} = 340 \text{ m.s}^{-1} \text{ à } 140 \text{ K}$$

On trouve $v_p = u$

En réalité, la distribution des vitesses proposée est fautive:

$$dN(v) = A' e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} \cdot v^2 dv$$

$\uparrow$ loi de Boltzmann $\uparrow$ dans l'espace des vitesses, le volume entre 2 sphères de rayons v et $v+dv$ est $4\pi v^2 dv$

On trouve alors $v_p \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} \neq u$

7.a) $\omega_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}}$ avec $K = -\frac{6\lambda}{\pi \epsilon_0 R^3} d_{\text{eff}}$ et $V_0 = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{2R}{3a}$

$$|K| = \frac{12 d_{\text{eff}} V_0}{R^3 \ln \frac{2R}{3a}} \quad \omega_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{12 \times 3 \cdot 10^{-30} \times 5 \cdot 10^4}{34 \times 1,66 \cdot 10^{-27} \times (2,5 \cdot 10^{-2})^3 \cdot \ln \left(\frac{20}{3}\right)}} = 165 \text{ Hz}$$

($\frac{1}{\omega_0} = 6 \text{ ms}$)

b) $z - z_0 = \frac{1}{2\omega_0} \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = 0,97 \text{ m} \neq 1 \text{ m}$ (Rem: indépendant de la masse m)

III 1. Si C est la "projection de P sur la circonférence $p = p_r$, $\vec{r} = \vec{C}P$ et

$$\vec{F} = -K \vec{r} = -K(\vec{CO} + \vec{OP}) = -K(-p_r \vec{e}_r + (p \vec{e}_r + x \vec{e}_x)) = -K[(p - p_r) \vec{e}_r + x \vec{e}_x]$$

$$\vec{OP} = p \vec{e}_r + x \vec{e}_x; \quad \vec{a} = \ddot{\vec{OP}} = (\ddot{p} - p \dot{\varphi}^2) \vec{e}_r + (2\dot{p}\dot{\varphi} + p\ddot{\varphi}) \vec{e}_\varphi + \ddot{x} \vec{e}_x; \quad m\vec{a} = \vec{F}$$

$$\begin{cases} m(\ddot{p} - p \dot{\varphi}^2) = -K(p - p_r) & (1) \\ m(2\dot{p}\dot{\varphi} + p\ddot{\varphi}) = 0 & (2) \Leftrightarrow \frac{m}{p} \frac{d}{dt}(p^2 \dot{\varphi}) = 0 \Leftrightarrow p^2 \dot{\varphi} = \text{cte} \\ m\ddot{x} = -Kx \end{cases}$$

Pour que $|x|$ n'augmente pas infiniment il faut $K > 0$ ($d_{\text{eff}} < 0$): on se limite à ce cas.

2. Par définition: $L_x = m(\vec{OP} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{e}_x = m((p \vec{e}_r + x \vec{e}_x) \wedge (\dot{p} \vec{e}_r + p \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{x} \vec{e}_x)) \cdot \vec{e}_x$
 $L_x = m p^2 \dot{\varphi}$. L'équation (2) montre que $L_x = \text{cte}$

$\vec{F}$ dérive d'une énergie potentielle: $\vec{F} = -\text{grad } E_p$

$$\begin{cases} \frac{\partial E_p}{\partial p} = +K(p - p_r) \\ \frac{1}{p} \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = 0 \\ \frac{\partial E_p}{\partial x} = +Kx \end{cases}$$

$$E_p = \frac{1}{2} K [(p - p_r)^2 + x^2] + \text{cte}$$

L'énergie cinétique est $E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m [\dot{p}^2 + (p \dot{\varphi})^2 + \dot{x}^2]$

L'énergie mécanique totale est:

$$E = E_c + E_p = \underbrace{\frac{1}{2} K (p - p_r)^2 + \frac{1}{2} m (\dot{p}^2 + (p \dot{\varphi})^2)}_{E_1 \text{ (concerne } p \text{ et } \varphi)} + \underbrace{\frac{1}{2} K x^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2}_{E_2 \text{ (concerne } x)} + \text{cte}$$

E se conserve car $\vec{F} = -\text{grad } E_p$; E_2 se conserve ($\frac{dE_2}{dt} = \dot{x}(Kx + m\ddot{x}) \stackrel{?}{=} 0$)
 donc E_1 se conserve aussi.

3. a) $p(t) = p_0$ donc $\ddot{p} = 0$ et (1) s'écrit $m p_0 \dot{\varphi}^2 = K(p_0 - p_T)$

Si $x = 0$, l'équation (3) n'intervient plus et on envisage donc les deux signes de K (mais $x = 0$ est instable pour $K < 0$!) (30)

si $K > 0$ (donc $\text{deff} < 0$), $p_0 - p_T > 0$: cercle "à l'extérieur" de $p = p_T$

si $K < 0$, $p_0 < p_T$

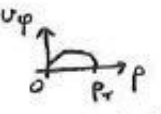
Les molécules de deff opposés tournent sur des cercles différents

b) $p_0 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{p_0} (p_0 \dot{\varphi})^2 = \frac{v_\varphi^2}{p_0}$ donc (1) s'écrit $m v_\varphi^2 = K p_0 (p_0 - p_T)$

D'après 2, $L_x = \text{cte} \Rightarrow \dot{\varphi} = \text{cte}$; on peut choisir $\dot{\varphi}$ (donc v_φ) positif (choix du sens Ox)

$$v_\varphi = \sqrt{\frac{K}{m} p_0 (p_0 - p_T)} \quad v_\varphi(0) = v_\varphi(p_T) = 0$$

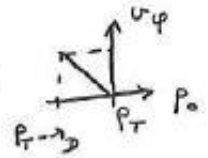
Si $K < 0$, $p_0 \in [0, p_T]$; $\frac{d \text{deff}}{d p_0} = 0$ pour $p_0 = \frac{p_T}{2}$



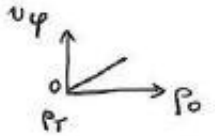
En pratique, les calculs précédents ne sont valables que pour p_0 voisin de p_T !

On prendra donc, par exemple, $p_0 \in [p_T - \lambda_D, p_T]$

$$v_\varphi(p_T - \lambda_D) = \sqrt{-\frac{K}{m} (p_T - \lambda_D) \lambda_D} \neq \sqrt{-\frac{K}{m} p_T \lambda_D} = 2\pi \omega_0 \sqrt{p_T \lambda_D} = 37 \text{ m.s}^{-1}$$



Si $K > 0$, $p_0 > p_T$ En pratique, sur l'intervalle $[p_T, p_T + \lambda_D]$

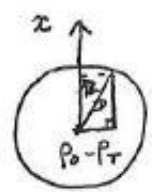


$$v_\varphi \text{ varie de } 0 \text{ à } v_\varphi(p_T + \lambda_D) = \sqrt{\frac{K}{m} (p_T + \lambda_D) \lambda_D} \neq \sqrt{\frac{K}{m} p_T \lambda_D} = 37 \text{ m.s}^{-1}$$

Conclusion: il faut $v_\varphi < v_{\varphi \text{ max}} = \sqrt{\frac{|K|}{m} p_T \lambda_D}$ (et $K > 0$ pour que $x = 0$ soit stable)

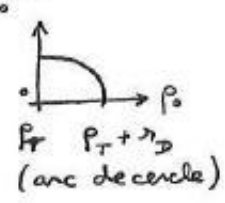
4. On se limite au cas stable $K > 0$

a) $x = \frac{v_{x0}}{2\pi\omega_0} \sin(2\pi\omega_0 t)$; $x_{\text{max}} = \frac{v_{x0}}{2\pi\omega_0}$



Il faut $x_{\text{max}} < \sqrt{(\lambda_D)^2 - (p_0 - p_T)^2}$

donc $v_{x0} < 2\pi\omega_0 \sqrt{(\lambda_D)^2 - (p_0 - p_T)^2} = v_{x0}^{\text{max}}$



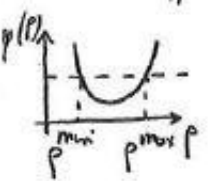
$$(v_{x0}^{\text{max}})_{\text{max}} = 2\pi\omega_0 \lambda_D = 2,6 \text{ m.s}^{-1}$$

5. Plan $x = 0$ (donc choix $K > 0$)

$$E = E_1 = \frac{1}{2} m \dot{p}^2 + \frac{1}{2} m (p \dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2} K (p - p_T)^2 + A$$

Mais $L_x = \text{cte}$ donc $p^2 \dot{\varphi} = \text{cte} = p_T^2 \times \frac{v_{\varphi 0}}{p_T}$ donc $p^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{p^2} (p^2 \dot{\varphi})^2 = \left(\frac{p_T}{p}\right)^2 v_{\varphi 0}^2$

D'où $U_{\text{eff}}(p) = \frac{1}{2} m \frac{p_T^2}{p^2} v_{\varphi 0}^2 + \frac{1}{2} K (p - p_T)^2 + A$



$$E = \text{cte} = \frac{1}{2} m \dot{p}^2 + U_{\text{eff}}(p) = \frac{1}{2} m v_{p0}^2 + U_{\text{eff}}(p_T)$$

donc $\frac{1}{2} m \dot{p}^2 = E - U_{\text{eff}}(p)$

Le mouvement n'est possible que pour $E > U_{\text{eff}}(p)$, donc pour $p \in [p^{\text{min}}, p^{\text{max}}]$

avec $U_{\text{eff}}(p^{\text{min}}) = U_{\text{eff}}(p^{\text{max}}) = E$

$$c) E = \text{cte} \quad \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} K (r - r_T)^2 = \frac{1}{2} m (v_{\varphi_0}^2 + v_{r_0}^2)$$

(31)

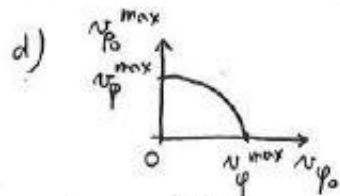
6

$$\frac{1}{2} K (r - r_T)^2 = \frac{1}{2} m (v_{\varphi_0}^2 + v_{r_0}^2 - v^2) < \frac{1}{2} K r_D^2 \quad \forall v$$

$$\text{impose } |v_{r_0}| < \sqrt{\frac{K}{m} r_D^2 - v_{\varphi_0}^2}$$

$$\text{Il faut } v_{\varphi_0} < \sqrt{\frac{K}{m} r_D^2} = v_{\varphi}^{\max}; \quad v_{\varphi}^{\max} < \sqrt{\frac{K}{m} r_T r_D} \text{ de 3. c)}$$

$$v_{\varphi}^{\max} = 2\pi \omega_0 r_D = (v_{x_0}^{\max})_{\max} = 2,6 \text{ m.s}^{-1}$$



(arc de cercle)

6. a) Le diaphragme r_D qui diaphragme le faisceau (se refocalisant)

sélectionne aussi les molécules de basse vitesse $v_{x_0} < v_{x_0}^{\max}, v_{r_0} < v_{r_0}^{\max}, v_{\varphi_0} < v_{\varphi_0}^{\max}$

b) La probabilité pour qu'une molécule soit stockée dans l'anneau, donc ait une vitesse inférieure à $v_{\max}$, est: $P = \frac{N_{v < v_{\max}}}{N}$

$$\text{avec } N_{v < v_{\max}} = \int_0^{v_{\max}} dN_v \quad \text{et } N = N_{\text{total}} = \int_0^{\infty} dN_v$$

Prendre la distribution des vitesses proposée à II 6 (on sait intégrer $v^3 e^{-dv^2}$, mais pas $v^2 e^{-dv^2} \dots$)

$$\int v^3 e^{-dv^2} dv = -\frac{1}{2d} v^2 e^{-dv^2} - \frac{1}{2d^2} e^{-dv^2} + K \quad \text{avec } d = \frac{m}{2k_B T}$$

$$\text{D'où } N = \frac{1}{2d^2}; \quad N_{v < v_{\max}} = \frac{1}{2d^2} \left[1 - e^{-dv_{\max}^2} - dv_{\max}^2 e^{-dv_{\max}^2} \right]$$

$$P = 1 - e^{-dv_{\max}^2} - dv_{\max}^2 e^{-dv_{\max}^2} = 1 - e^{-dv_{\max}^2} [1 + dv_{\max}^2]$$

$$\text{Par exemple } v_{\max}^2 = v_{r_0}^2 + v_{\varphi_0}^2 \# v_{\varphi_0}^2 = (37)^2 \text{ m}^2 \text{s}^{-2}; \quad dv_{\max}^2 = 2 \cdot 10^{-2} \ll 1; \quad e^{-dv_{\max}^2} \# 1 - dv_{\max}^2$$

$$P \# 1 - [1 - dv_{\max}^2] [1 + dv_{\max}^2] = (dv_{\max}^2)^2 = 4 \cdot 10^{-4} \ll 1$$

Très peu de molécules piégées!

Pour augmenter P , on peut diminuer (augmenter) T donc augmenter d .