

Concours X-2005 PSI

Modélisation

1 Le ciment

1.1 Caractérisation du ciment

1.1.1 surface massique

La surface spécifique étant la surface par unité de volume, et la surface massique celle par unité de masse : $S_M = \frac{S_S}{\rho}$

On a, pour N sphères : $S = 4N\pi r^2$ la masse étant $m = \frac{4N\pi\rho r^3}{3}$. Donc $S_M = \frac{3}{\rho r}$

Pour rendre le béton plus réactif, il faut diminuer r , donc rendre le broyage plus efficace.

1.1.2 Méthode Blaine

1.1.2.1 Equation de Carman-Kozény Le rayon hydraulique est défini par $m = \frac{v}{S}$

où S est la surface totale des canaux. Par ailleurs $S = M \times S_M$ donc $m = \frac{v}{MS_M}$

$p = \frac{v}{V_A} = \frac{v}{A.L}$ en exploitant les définitions. Donc $v = pA.L$

Par ailleurs : $v = aL_e$, donc $a = \frac{pA.L}{L_e}$. Donc $Q = \frac{p^3 LA^3 \Delta P}{\mu M^2 S_M^2 h}$

Ceci ne suffit pas, car il faut calculer M : $M = \rho(V_a - v) = \rho V_a(1 - p) = \rho A.L(1 - p)$.

On a donc finalement : $Q = \frac{p^3 A \Delta P}{\mu \rho^2 (1-p)^2 L S_M^2 h}$

1.1.2.2 Perméamètre de Blaine a) La hauteur h de liquide au-dessus de la position d'équilibre est $h = z/2$. Elle correspond à une pression à la base de la cellule $P = P_0 - \rho_\ell g h$ soit une différence de pression $P - P_0 = -\rho_\ell g h = -\varpi_\ell z/2$

Le débit de gaz (vers le bas) est alors $Q = \frac{kA}{\mu L} \frac{\varpi_\ell z}{2}$. L'air étant incompressible dans ces conditions d'après le texte, il y a descente du fluide d'une quantité $|dh|$ telle que $|sdh| = -sdz/2 = |Qdt|$ soit : $\frac{dz}{dt} = -2\frac{Q}{s} = -\frac{kA}{\mu L} \frac{\varpi_\ell z}{s} = -\lambda z$ donc $\frac{dz}{dt} = -\lambda z$ avec $\lambda = \frac{kA}{\mu L} \frac{\varpi_\ell}{s}$ ce

qui conduit immédiatement à $z = z_0 e^{-\lambda t}$

On a donc : $h_1 = z_0 e^{-\lambda t_1}/2$ et $h_2 = z_0 e^{-\lambda t_2}/2$ soit : $\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{h_1}{h_2}\right) = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$

$\Delta P_m = \frac{1}{\Delta t} \varpi_\ell \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} z_0 e^{-\lambda t} dz = \frac{z_0}{2\lambda \Delta t} \varpi_\ell (e^{-\lambda t_1} - e^{-\lambda t_2}) = \frac{\varpi_\ell}{\lambda} \frac{h_1 - h_2}{\Delta t} = \frac{\varpi_\ell}{\lambda} \frac{\Delta h}{\Delta t}$

$\Delta P_m = \frac{\varpi_\ell}{\lambda} \frac{h_1 - h_2}{t_1 - t_2}$

b) $Q_m = -\frac{kA\Delta P_m}{\mu L}$ car la seule grandeur dépendant du temps est ΔP . Donc

$$Q_m = -\frac{kA\varpi_\ell}{\mu L\lambda} \frac{h_1 - h_2}{t_1 - t_2} = \frac{s(h_1 - h_2)}{\Delta t}, \text{ ce qui paraît assez logique.}$$

De la comparaison de la loi de Darcy, et de celle trouvée plus haut, on tire : $k = \frac{p^3}{\rho^2(1-p)^2 h S_M^2}$

et $\lambda = \frac{kA\varpi_\ell}{\mu L s} = \frac{p^3 A \varpi_\ell}{\mu \rho^2 (1-p)^2 h L S_M^2} = \frac{\ln(\frac{h_1}{h_2})}{\Delta t}$ donc $S_M = \sqrt{\frac{p^3 A \varpi_\ell \Delta t}{\mu \rho^2 (1-p)^2 h L \ln(\frac{z_1}{z_2})}} = K_B \frac{\sqrt{p^3 \Delta t}}{\rho(1-p)}$

Application pratique : pour trouver p on utilise $p = \frac{v}{V_a} = 1 - \frac{V}{V_a} = 1 - \frac{M}{\rho V_a} = 0,503$.
Donc $\rho(1-p) = \frac{M}{V_a}$ et $S_M = K_B \frac{V_a}{M} \sqrt{(1 - \frac{M}{\rho V_a})^3 \Delta t} = 3,3 m^2 kg^{-1}$ On en déduit le rayon des grains par $r = \frac{3}{\rho S_M} = 287 \mu m$.

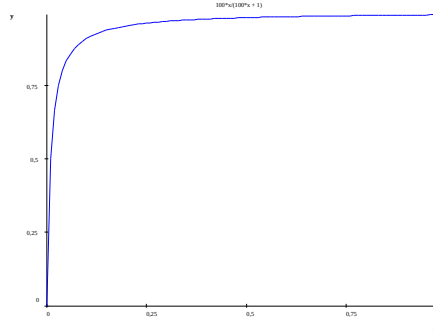
1.1.3 Méthode BET

On a toujours $P < P_0$ pour un gaz qui n'est pas en équilibre avec sa vapeur.

1.1.3.1 Adsorption en couche monomoléculaire a) On a, d'après le texte :

$$\frac{V}{V_m} = \frac{S_1}{S_0 + S_1} = \frac{Cx}{1 + Cx}$$

b) voir courbe jointe :



1.1.3.2 Absorption en couches multimoléculaires a) D'après le texte, la vitesse d'adsorption de la i^{eme} couche est $v_{ai} = a_{i-1} P S_{i-1}$ en supposant que la constante de proportionnalité dépende de la couche.

La vitesse de désorption est, de même : $v_{di} = b_i S_i \exp(\frac{-E_i}{R_{gp} T})$ A l'équilibre, les deux sont égales, et donc :

$$a_{i-1} P S_{i-1} = b_i S_i \exp(\frac{-E_i}{R_{gp} T})$$

b) avec les hypothèses du texte : $\frac{b_i}{a_{i-1}} = \frac{P}{x} \cdot \exp(\frac{-E_L}{R_{gp} T}) = P_0 \exp(\frac{-E_L}{R_{gp} T})$ pour $i > 1$ soit

$$g = P_0 \exp(\frac{-E_L}{R_{gp} T})$$

De plus, pour la première couche : $a_0 P S_0 = b_1 S_1 \exp(\frac{-E_1}{R_{gp} T}) = b_1 C x S_0 \exp(\frac{-E_1}{R_{gp} T}) = a_0 x P_0 S_0$ On en déduit :

$$C = \frac{a_0}{b_1} \exp(\frac{-E_1}{R_{gp} T})$$

c) On a $S_1 = C x S_0$ et $S_p = x^{p-1} S_1 = C x^p S_0$ Soit $\Sigma_n = S_0 + \dots + S_n = C S_0 \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

Cette série converge vers $\boxed{\Sigma_{\infty} = \frac{CS_0}{1-x}}$

d) Le volume adsorbé est proportionnel à la surface d'adsorption. $V_n = V_0(S_1 + 2S_2 + 3S_3 + \dots + nS_n) = V_0S_1(1 + 2x + \dots + nx^{n-1}) = V_0CxS_0 \frac{d}{dx}(x + x^2 + \dots + x^n)$ $V_n = V_0CxS_0 \frac{d}{dx}(\frac{1-x^{n+1}}{1-x})$ d'après le modèle proposé. (Attention ! V_0 n'a pas les dimensions d'un volume mais d'un volume par unité de surface, c'est-à-dire une longueur)

$$V_n = V_0CxS_0 \frac{1+nx^{n+1}-(n+1)x^n}{(1-x)^2}$$

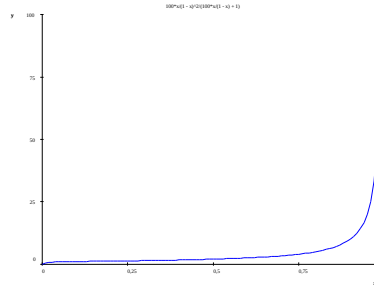
Il reste à prouver que V_n reste borné si $n \rightarrow \infty$: En effet $x^{n+1} < x^n$ si $0 \leq x < 1$

Donc $V_0CxS_0 \frac{1-x^{n+1}}{1-x^2} < V_n < V_0CxS_0 \frac{1-x^n}{1-x^2}$ en remplaçant tantôt x^{n+1} par x^n pour majorer ou x^n par x^{n+1} pour minorer. Ces deux encadrants tendent bien vers $\frac{V_0CxS_0}{1-x^2}$ comme prévu

si $n \rightarrow \infty$ et $\boxed{V_{\infty} = \frac{V_0CxS_0}{1-x^2}}$

e) Dans la même optique : $V_m = V_0(S_0 + S_1 + S_2 + \dots + S_{\infty}) = V_0S_0(1 + \frac{Cx}{1-x})$ Donc $\frac{V_n}{V_m} = \frac{Cx}{1+\frac{Cx}{1-x}} \frac{d}{dx}(\frac{1-x^{n+1}}{1-x})$ qui converge vers $\frac{V_{\infty}}{V_m} = \frac{Cx}{1+\frac{Cx}{1-x}} \times \frac{1}{(1-x)^2}$

On obtient la courbe ci-dessous :



f) On déduit de l'expression précédente : $\frac{V(1-x)}{x} = \frac{V_m C}{(1-x) + Cx} = \frac{1}{y}$ soit : $y = \frac{1}{V_m C} + x \frac{C-1}{V_m C}$ ce qui est bien de la forme $y = \alpha x + \beta$ avec $\alpha = \frac{C-1}{V_m C}$ et $\beta = \frac{1}{V_m C}$ soit $\boxed{C = 1 + \frac{\alpha}{\beta}}$ et

$$\boxed{V_m = \frac{1}{\alpha + \beta}}$$

Par ailleurs, le nombre de molécules d'adsorbant est $N_A \frac{V_m}{v_m}$ (pour une couche monomoléculaire) la surface occupée est $\boxed{S_{MBET} = A_m N_A \frac{V_m}{v_m}}$

Application : par lecture de la courbe,

-si $x = x_1 = 0,05$ $y = y_1 = 0,043$

-si $x = x_2 = 0,20$ $y = y_2 = 0,15$

$$\alpha = 0,71g.cm^{-3} \quad \beta = 0,0098g.cm^{-3} \quad C = 73,8 \quad V_m = 1,38cm^3g^{-1} = 1,38 \times 10^{-3}m^3.kg^{-1} \quad S_{MBET} = 6020m^2.kg^{-1} \quad r = \frac{3}{\rho S_M} = 0,18\mu m$$

Commentaire : il s'agit donc d'une poudre très fine, servant à remplir les interstices de façon à obtenir un "nouveau béton", de grain exceptionnellement fin, utilisé dans la décoration.

1.1.4 Analyse granulométrique laser

a) On peut mesurer l'angle α produisant le premier zéro d'intensité, donc d'amplitude diffractée. On a alors $r \approx \frac{2\lambda}{\pi \sin \alpha}$

b) Soit $g_1(t, \alpha)$ l'onde diffractée par le trou source de rayon r et $g_2(t, \alpha)$ l'onde diffractée par un écran totalement transparent dont le disque de rayon r serait masqué. D'après le principe d'Huygens Fresnel, un écran totalement transparent aurait le même effet que l'ensemble des deux et produirait l'onde plane $g_0(t, \alpha) = Ae^{j(\omega t - \varphi(r))} \delta(\alpha)$ nulle partout, sauf pour α . Donc $g_0(t, \alpha) = g_1(t, \alpha) + g_2(t, \alpha)$ et $g_2(t, \alpha) = -g_1(t, \alpha)$ pour $\alpha \neq 0$.

Ceci implique $I_2(\alpha) = k|g_2(t, \alpha)|^2 = I_1(\alpha)$. La figure de diffraction est donc la même, et la méthode de mesure aussi.

c) S'il y a plusieurs grains de même taille, et suffisamment éloignés par rapport à la distance de cohérence, les intensités diffractées s'ajoutent, et, comme celles-ci ne dépendent que de r, λ et α , l'intensité diffractée totale est simplement multipliée par le nombre de sources diffractantes.

d) Si les grains sont en plusieurs classes granulométriques, l'intensité diffractée est la somme des intensités soit : $I(\alpha) = \sum_j N_j s_j \left[\frac{J_1\left(\frac{2\pi r_j}{\lambda} \sin(\alpha)\right)}{\frac{2\pi r_j}{\lambda} \sin(\alpha)} \right]^2$ N_j étant le nombre de centres diffractants et s_j leur section. Or $N_j = \frac{V_j}{v_j} = V p_j \frac{3}{4\pi r_j^3}$ Donc $I(\alpha) = 3V \sum_j \frac{p_j}{r_j} \left[\frac{J_1\left(\frac{2\pi r_j}{\lambda} \sin(\alpha)\right)}{\frac{2\pi r_j}{\lambda} \sin(\alpha)} \right]^2$

On pourra retrouver les p_j à condition que les fonctions $f(\alpha, r) = J_1^2\left(\frac{2\pi r}{\lambda} \sin(\alpha)\right)$ possèdent des propriétés d'orthogonalité telles que $\int_0^{2\pi} f(a, r_1) f(\alpha, r_2) g(\alpha) d\alpha = \delta(r_2 - r_1)$ le symbole δ valant 1 si son argument est nul et zéro en cas contraire.

e) Le nombre de particules de diamètre d_j est $N_j = \frac{6V p_j}{\pi d_j^3}$ la surface totale associée est $S_j = \pi d_j^2 N_j = \frac{6V p_j}{d_j}$ la surface totale massique est $S_M = \frac{1}{\rho V} \sum_j S_j = \frac{6}{\rho} \sum_j \frac{p_j}{d_j} = 378 m^2$.

1.2 Hydratation du ciment

a) $\frac{V_{cum}(d)}{V_c} = \int_0^d k d\theta = kd$. On obtient donc une relation linéaire.

On devrait donc observer une proportion constante de chaque espèce, ce qui est (en très gros), le cas, malgré d'importantes fluctuations.

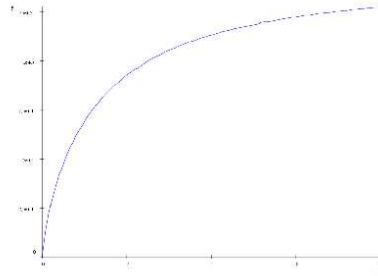
La fraction de ciment ayant réagi est de $f_r = 100\%$ pour $d < d_0$ avec $d_0 = 40 \mu m$.

Pour les grains plus gros, le volume n'ayant pas réagi est la sphère de diamètre $(d - d_0)$, de volume $\frac{1}{6}\pi(d - d_0)^3$, ce qui représente une fraction $f_{nr} = \frac{(d-d_0)^3}{d^3}$, et une fraction $f_r(d) = 1 - f_{nr}$. On a donc globalement : $f_{r_{total}} = \int_0^{d_0} k d\theta + \int_{d_0}^{d_{max}} k(1 - (1 - \frac{d_0}{d})^3) d\theta$ Or $k = \frac{1}{d_{max}}$, donc $f_{r_{max}} = \frac{3d_0}{2d_{max}} + 3\frac{d_0}{d_{max}} \ln(\frac{d_{max}}{d_0}) - \frac{d_0^3}{2d_{max}^3} + 3\frac{d_0^2}{d_{max}^2} = 0,947$

b) L'énergie thermique dégagée est alors $-\Delta H_{max} = f_{r_{max}} \times M \times \Delta H = 0,947 \times 380 \times 400.10^3 = 144000 kJ$.

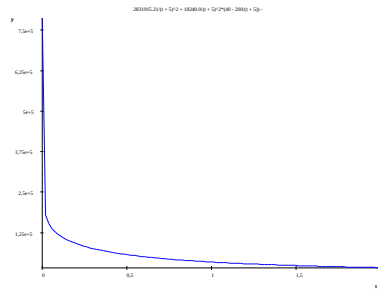
L'élévation de température maximale est $\Delta \theta = -\frac{\Delta H_{max}}{C} = \frac{144000}{0,8 \times (380 + 1800) + 4,18 \times 200} = 56 K$. Cette élévation de température peut provoquer des dilatations pendant la prise, nuisibles à celle-ci (risque de fissuration).

c) Dans ce cas, la fraction réactionnelle f_r dépend du temps, et donc également $\Delta H(t) = \frac{f_r(t)}{f_{r_{max}}} \Delta H_{max}$. On devra donc calculer $\Delta H(t)$ pour diverses valeurs de t et en tracer la courbe (voir ci-dessous)



On constate donc qu'une faible quantité de chaleur se dégage d'abord, et donc, que par conduction thermique, elle se dissipera vite.

La puissance dégagée, en $W.m^{-3}$, est donnée ci-dessous :



2 “Béton au jeune âge”

2.1 Thermo-activation de la relation d'hydratation

a) A pression constante, la variation d'enthalpie totale du système est nulle s'il est isolé. L'enthalpie reçue lors de la réaction étant ml ($l < 0$), l'enthalpie nécessaire pour élever la température à la valeur $T^{ad}(t)$ étant $C(T^{ad}(t) - T_0)$, on a $ml + m'C(T^{ad}(t) - T_0) = 0$ avec $m(t) = m_{sk}(\infty)\xi(t)$ soit : $m_{sk}(\infty)l\xi(t) + m'C(T^{ad}(t) - T_0) = 0$ m' étant la masse du système réactif. (*non conforme à l'expression proposée*)

b) Pour des temps très longs, $\xi(t) \rightarrow 1$ et $m_{sk}(\infty)l + m'C(T^{ad}(\infty) - T_0) = 0$

c) On en déduit $\xi(t) = \frac{T^{ad}(t) - T_0}{T^{ad}(\infty) - T_0}$ et $\frac{T^{ad}(t)}{T^{ad}(\infty) - T_0} = \xi(t)$ Donc

$$A(\xi) = \frac{T^{ad}(t)}{T^{ad}(\infty) - T_0} \exp\left(\frac{E_a}{R_{gp}T^{ad}}\right)$$

d) Le temps équivalent vérifie, à chaque instant : $\xi(t_{eq}, T_{ref}) = \xi(t, T(t))$. Posons, pour alléger l'écriture $t^* = t_{ref}$ et considérons la fonction $t^*(t)$

A chaque instant : $d\xi^* = A(\xi^*) \exp\left(-\frac{E_a}{R_{gp}T_{ref}}\right) dt^*$ et, de façon correspondante : $d\xi = A(\xi) \exp\left(-\frac{E_a}{R_{gp}T(t)}\right) dt$. Soit $\frac{dt^*}{dt} = \frac{d\xi^*}{d\xi} \frac{A(\xi^*)}{A(\xi)} \exp\left(-\frac{E_a}{R_{gp}}\left(\frac{1}{T(t)} - \frac{1}{T_{ref}}\right)\right)$ ceci à condition de prendre la même valeur $\xi^* = \xi$ pour le numérateur et le dénominateur, par la définition même de $t^*(t)$ (eq. 13)

Par conséquent : $\frac{dt^*}{dt} = \exp\left(-\frac{E_A}{R_{GP}}\left(\frac{1}{T(t)} - \frac{1}{T_{ref}}\right)\right)$ et

$$t^* = t_{eq} = \int_0^t \exp\left(-\frac{E_A}{R_{GP}}\left(\frac{1}{T(\tau)} - \frac{1}{T_{ref}}\right)\right) d\tau$$

e) Pour trouver t_{eq} , on peut utiliser une intégration par la méthode des trapèzes sur chaque valeur, avec $T_{ref} = 293K$

On obtient les résultats suivants :

t(h)	0	12	20	35	50	100
T^{ad}	293	303	343	348	352	355
t_{eq}	0	9,4	15,7	70,5	135	382

Les temps équivalents sont calculés à 293K ; ils sont donc toujours plus importants que les temps adiabatiques, la vitesse de réaction augmentant notablement avec la température.

2.2 Analyse transitoire après décoffrage

a) Par homogénéité de l'équation (15), a doit de toute évidence s'exprimer en $m^2.s^{-1}$

b) Les conditions aux limites (17) et (18) expriment la continuité du flux thermique, qui s'évacue par conducto-convexion. h est le coefficient de conducto-convexion.

c) L'équation (15) donne, en remplaçant T par $\bar{T}(T_i - T_1) + T_1$, x par $L(\zeta + 1)$ et t par $\frac{F_o}{\alpha} : \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \zeta^2} \frac{1}{L^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{T}}{\partial F_o} \alpha$ On a donc : $\alpha = \frac{a}{L^2}$ et $F_o = \frac{at}{L^2}$

d) Les conditions aux limites (15) et (17) obligent à une solution symétrique, ce qui conduit à la condition (24).

La condition (17) devient $k \frac{\partial \bar{T}}{\partial \zeta} \frac{(T_i - T_1)}{L} = h \bar{T}(T_i - T_1)$ en $x = -L$ ou $\zeta = 0$ ce qui conduit à poser $B_i = \frac{hL}{k}$

e) L'équation (23) s'écrit : $X''(\zeta)Y(F_o) = X(\zeta)Y'(F_o)$ soit, en supposant X et Y non nulles : $\frac{X''(\zeta)}{X(\zeta)} = \frac{Y'(F_o)}{Y(F_o)}$ Ceci n'est possible, pour des variables indépendantes, que si ces deux quotients sont simultanément constants. (il suffit de dériver les quotients par ζ ou F_o pour s'en convaincre). On peut alors choisir comme valeur du quotient $-\lambda^2$, étant entendu que la valeur de λ n'est pas nécessairement réelle *a priori*. Donc il est possible d'écrire :

$$\frac{X''(\zeta)}{X(\zeta)} = \frac{Y'(F_o)}{Y(F_o)} = -\lambda^2$$

f) La solution générale de l'équation $X''(\zeta) = -\lambda^2 X(\zeta)$ est bien connue et peut s'écrire : $X(\zeta) = G \sin(\lambda \zeta) + F \cos(\lambda \zeta)$.

On doit alors avoir : $Y'(F_o) = -\lambda^2 Y(F_o)$ ou $Y(F_o) = e^{-\lambda^2 F_o}$ la constante multiplicative étant prise en compte dans X .

g) La solution du problème étant paire en x , donc en $\zeta - 1$, il est commode de considérer la solution générale comme combinaison de termes de forme $G \sin(\lambda(\zeta - 1)) + F \cos(\lambda(\zeta - 1))$ qui doit être paire. Par conséquent, seuls les termes en $\cos$ doivent y figurer.

La condition (23) impose que toute solution de la forme précédente doit vérifier $G \cos(-\lambda) e^{-\lambda^2 F_o} = -\frac{\lambda}{B_i} G \sin(-\lambda) e^{-\lambda^2 F_o}$ soit $\cot(\lambda) = \frac{\lambda}{B_i}$

Il n'existe donc qu'un ensemble discret de solutions, et la solution générale, sous réserve que l'espace des fonctions soit complet, sera de la forme : $\bar{T} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n \cos(\lambda_n(\zeta - 1)) \times e^{-\lambda_n^2 F_0}$

h) La solution générale doit vérifier les conditions aux limites : ceci est déjà assuré ; il reste à vérifier la condition initiale $\bar{T}(\zeta, F_0 = 0) = 1$.

Ceci s'écrit $\sum_{n=0}^{\infty} G_n \cos(\lambda_n(\zeta - 1)) = 1$ (A)

Or $\int_1^2 \cos(\lambda_p(\zeta - 1)) \cos(\lambda_q(\zeta - 1)) d\zeta = 0$ si $p \neq q$.

En multipliant (A) par $\cos(\lambda_p(\zeta - 1))$ et en intégrant, on obtient donc : $\int_1^2 \cos(\lambda_p(\zeta - 1)) \sum_{n=0}^{\infty} G_n \cos(\lambda_n(\zeta - 1)) d\zeta = \int_1^2 \cos(\lambda_p(\zeta - 1)) d\zeta$ ou :

$$G_p \int_1^2 \cos^2(\lambda_p(\zeta - 1)) d\zeta = \int_1^2 \cos(\lambda_p(\zeta - 1)) d\zeta \quad \text{ou} \quad G_p = \frac{\int_1^2 \cos(\lambda_p(\zeta - 1)) d\zeta}{\int_1^2 \cos^2(\lambda_p(\zeta - 1)) d\zeta} =$$

$$\frac{2 \frac{\sin(\lambda_p)}{\lambda_p}}{\int_0^1 (\cos(2\lambda_p \zeta + 1)) d\zeta} = \frac{2 \sin(\lambda_p)}{\frac{1}{2} \sin \lambda_p + \lambda_p}$$

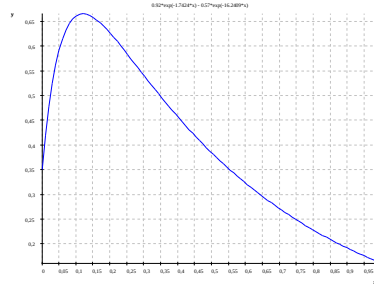
$$G_p = \frac{4 \sin(\lambda_p)}{\sin \lambda_p + 2\lambda_p}$$

i) La température maximale est obtenue, en raison de la symétrie du problème, en $\zeta = 1$. $\bar{T} = \frac{T - T_1}{T_i - T_1}$ et $\tilde{T} = T - T_1 = \bar{T}(1) \times (T_i - T_1) = (T_i - T_1) \sum_{i=0}^{\infty} G_p e^{-\lambda_p^2 F_0}$ donc

$$\tilde{T}(F_0) = (T_i - T_1) \sum_{i=0}^{\infty} G_p e^{-\lambda_p^2 F_0}$$

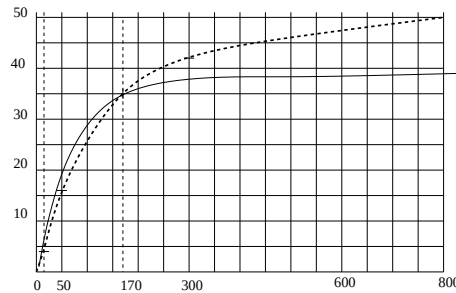
Si on se limite aux deux premiers termes, on obtient : $\tilde{T}(F_0) = (T_i - T_1)(0,92 \exp(-1,32^2 F_0) - 0,57 \exp(-4,03^2 F_0))$

La valeur de F_0 et le maximum correspondant peuvent être obtenus par dérivation, ou, plus simplement, par tracé de courbe :



On obtient donc $F_0 = 0,13$ et $\tilde{T}_{max} = (T_i - T_1) \times 0,67$

Les courbes présentant $\tilde{T}_{max}$ et T^* figurent ci-dessous.



Elles se croisent pour $t_{eq} \approx 170h$, qui correspondent à un temps de décoffrage d'au moins $24h$ (adopter $35h$ conduit à une garantie meilleure de stabilité. Le tableau résumant les données numériques figure ci-dessous)

t	0	12		20		35			50
t_{eq}	0	9,4	15	150	170	480	300	800	850
T_{max}	0	33,5		33,5		36,8			39,5
T^*	0		4		35		42	50	

3 Enceinte de confinement

3.1 Perméabilité dans un milieu poreux

3.1.1 Calculs préliminaires

a) L'écoulement est unidirectionnel selon Oz . La conservation de la masse, pour un fluide supposé incompressible s'écrit : $\text{div } \vec{v} = 0$ ou $\frac{\partial v u_z}{\partial z} = 0$. Par conséquent u_z ne dépend pas de z .

b) Le bilan de quantité de mouvement peut s'écrire, en suivant une particule de fluide de masse dm :

$\frac{D\vec{P}}{Dt} = -\overrightarrow{\text{grad}}P + \rho \vec{g} + \frac{d\vec{F}_v}{d\tau}$ où $\frac{d\vec{F}_v}{d\tau}$ est la force volumique de viscosité, et $\vec{P} = \rho \vec{v}$ est la densité de quantité de mouvement.

Comme la pesanteur est négligeable, on a donc :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}}P + \frac{d\vec{F}_v}{d\tau}$$

De plus, la vitesse est selon $\vec{z}$ et ne dépend pas de ce paramètre. On a donc, en régime stationnaire :

$$\boxed{\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}}P + \frac{d\vec{F}_v}{d\tau}}$$

En projection sur $\vec{x}$, puisque $\frac{d\vec{F}_v}{d\tau}$ est colinéaire à $\vec{z}$, on obtient $0 = \frac{\partial P}{\partial x}$. Même chose selon $\vec{y}$, ou selon $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$.

La pression ne peut donc dépendre que de z .

3.1.2 Ecoulement de Poiseuille

a) Le problème est invariant par rotation. A moins de brisure spontanée de la symétrie (turbulence), aucune grandeur pertinente ne doit dépendre de θ .

Dans notre cas, entre deux cylindres de hauteur dz et de rayon r et $r + dr$, on a : $\frac{d\vec{F}_v}{d\tau} = \vec{z} \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial u_z}{\partial r})$ soit finalement :

$$\vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}}P + \mu \vec{z} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial u_z}{\partial r})$$

b) On a donc : $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial u_z}{\partial r}) = C^{te}$ car P ne dépend que de z et u_z n'en dépend pas.

Alors $K = \frac{\Delta P}{L}$ et $\frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial u_z}{\partial r}) = \frac{Kr}{\mu}$ soit $r \frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{Kr^2}{2\mu} + K'$ ou $\frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{Kr}{2\mu} + \frac{K_1}{r}$ et $u_z = \frac{Kr^2}{4\mu} + K_1 \ln r + K_2$

Comme u_z doit rester fini dans tout le domaine $r < R$, cela nécessite $K_1 = 0$ soit :

$$u_z = \frac{Kr^2}{4\mu} + K_2$$

c) La vitesse d'un fluide visqueux doit varier continûment au voisinage d'une paroi. Comme celle-ci est immobile, on doit avoir $u_z(R) = 0$ ou $K_2 = -\frac{KR^2}{4\mu}$. Donc

$$u_z = -\frac{\Delta P}{4\mu L}(R^2 - r^2)$$

d) Le débit volumique est : $Q = \int_0^R u_z 2\pi r dr = -\frac{\pi\Delta P}{2\mu L} \int_0^R (R^2 - r^2)r dr = -\frac{\pi\Delta P}{2\mu L}(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4})$ et donc :

$$Q = -\frac{\pi\Delta PR^4}{8\mu L}$$

3.1.3 Perméabilité au gaz ; distribution de la porosité :

a) Pour n tubes de longueur L , de rayon R $p = \frac{n\pi R^2}{A}$. On trouve alors $Q = -\frac{n\pi\Delta PR^4}{8\mu L} = -\frac{R^2 A p \Delta P}{8\mu L}$

Soit : $k = \frac{pR^2}{8}$

b) Par définition de la porosité cumulée, la porosité totale est : $p_T = p_c(0) = a_i$ pour chaque matériau.

Entre R et $R + dR$, la porosité est $dp = -\frac{dp_c}{dR} = -(b_i + 2c_i R)$; la perméabilité totale est donc : $k_i = \int_0^{R_i} \frac{1}{8} R^2 dp = \frac{1}{8}(b_i \frac{R_i^3}{3} + c_i \frac{2R_i^4}{4}) = \frac{-R_i^3}{8}(\frac{b_i}{3} + \frac{c_i}{4} R_i)$

c) On doit avoir $k = \frac{1}{8} p R_{eq}^2 = \frac{R_i^3}{8}(\frac{b_i}{3} + \frac{2c_i}{4} R_i) = \frac{1}{8} a_i R_{eq}^2$. Donc $R_{eq} = R_i \sqrt{\frac{R_i}{a_i}(\frac{b_i}{3} + \frac{c_i R_i}{2})}$
Ce terme varie peu avec le rayon des pores si le terme b_i est beaucoup plus important que $c_i R_i$. Dans la pratique, on trouve $R_{eq} \approx R_i/2$

On obtient

	$R_i(nm)$	$k(nm^2)$	R_{eq}
matériau 1	80	19,4	43,8
matériau 2	200	514	126
matériau 3	600	6340	371

3.1.4 L'eau dans les milieux poreux

a) La force totale de pression exercée sur la surface est $\vec{F}_p = \int \int (P_0 - P) \vec{n} . d^2S = (P_0 - P) \int \int \vec{n} . d^2S = (P_0 - P) \pi R^2 \vec{u}_z$.

Elle est équilibrée par la force de tension superficielle $d\vec{F}_c = w . d\ell \vec{n}$ qui n'a de résultante que sur Oz , par symétrie, et qui s'y projette en $dF_{cz} = -w . dl . \cos \theta$ donc $\vec{F}_c = -\vec{u}_z w . 2\pi R \cos \theta$

A l'équilibre, $\vec{F}_c + \vec{F}_p = \vec{0}$ donc $P_0 - P = \frac{2w \cos \theta}{R} = \frac{2w}{R_s \cos \theta}$ et, si $\theta = 0$, (mouillage parfait)

$$P_0 - P = \frac{2w}{R}$$

b) On a $sdT + n.d\zeta - V.dp = 0$. A T et n constants, on a donc : $d\zeta_l = \frac{V}{n}dP = \frac{M}{\rho_l}dP$ ce qui donne, en supposant l'eau incompressible, $\zeta_l = \frac{M}{\rho_l}(P + f(T))$ où $f(T)$ a la dimension d'une pression. On choisira pour celle-ci une pression de référence, dépendant de la température.

On peut donc écrire : $\boxed{\zeta_l - \zeta_{l0} = \frac{M}{\rho_l}(P_l - P_{l0})}$

De même, pour la vapeur : $d\zeta_v = \frac{V}{n}dP = R_{gp}T\frac{dP}{P}$ soit, de même :

$$\boxed{\zeta_v - \zeta_{v0} = R_{gp}T \ln\left(\frac{P_v}{P_{v0}}\right)}$$

c) A l'équilibre, à la température T , il doit y avoir égalité des potentiels chimiques du liquide et de la vapeur. Si l'on prend pour pressions de référence $P_{l0} = P_G$, et $P_{v0} = P_{vs}$ il y a équilibre liquide vapeur, donc $\boxed{\zeta_{l0} = \zeta_{v0}}$

Comme $\zeta_l = \zeta_v$, on en déduit : $\frac{M}{\rho_l}(P_l - P_G) = R_{gp}T \ln\left(\frac{P_v}{P_{vs}}\right)$ ou

$$\boxed{P_C = P_l - P_G = \frac{\rho_l R_{gp} T}{M} \ln(H)}$$

d) A partir de la loi de Laplace, on obtient donc $\boxed{R = R_{sat} = -\frac{2wM}{\rho_l R_{gp} T \ln H}}$

3.1.5 Ecoulement dans une fissure

a) u_z doit être indépendant de x , par symétrie, car il y a invariance du problème par translation selon Ox .

b) L'équation $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0} = -\overrightarrow{grad}P + \frac{d\vec{F}_v}{d\tau}$ (établie plus haut) devient ici : $-\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = 0$ alors que l'on a vu plus haut que $\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$ On en déduit, comme plus haut, que $\frac{\partial P}{\partial z} = K = \frac{\Delta P}{L}$ et que $\boxed{u_z = \frac{\Delta P}{2\mu L}y^2 + \alpha y + \beta}$

c) En $y = \pm e/2$, la vitesse est nulle, ce qui conduit à $\alpha = 0$ et $\beta = -\frac{\Delta P}{2\mu L} \frac{e^2}{4}$, soit

$$\boxed{u_z = \frac{\Delta P}{2\mu L}(y^2 - \frac{e^2}{4})}$$

d) Le débit s'écrit : $Q = l \int_{-e/2}^{e/2} \frac{\Delta P}{2\mu L}(y^2 - \frac{e^2}{4})dy = l \frac{\Delta P}{2\mu L} [\frac{y^3}{3} - \frac{e^2}{4}y]_{-e/2}^{e/2} = l \frac{\Delta P}{\mu L} (\frac{e^3}{3 \times 8} - \frac{e^3}{8})$ soit :

$$\boxed{Q = -\frac{l\Delta P e^3}{12\mu L}}$$

3.1.6 Perméabilité d'un milieu fissuré

a) $\boxed{D = \frac{A_v}{A} = \frac{ne}{h}}$

b) $Q = -\frac{ne^3 l \Delta P}{12\mu L} = -\frac{De^2}{12} \frac{A \Delta P}{\mu L}$ donc $\boxed{k = \frac{De^2}{12}}$

Si $L = l \chi = \frac{12Q\mu}{e^3 \Delta P}$ On obtient les résultats 139, 192, 202. On adoptera $\chi = 190$. Ce résultat étonnant peut être interprété en supposant que la viscosité de l'air est surestimée, ou que l'écoulement ne se fait pas à faible nombre de Reynolds. La deuxième hypothèse est plus vraisemblable, puisque la valeur de χ augmente avec l'épaisseur.

3.1.7 Application à une enceinte de confinement

a) On suppose le matériau non fissuré. On a donc $Q = -kA \frac{\Delta P}{\mu L} = \frac{19,4 \cdot 10^{18} \times 6880 \times 5 \cdot 10^5}{0,01818 \cdot 10^{-3}} = 13,2 m^3/h$ soit $V = 317 m^3$ par 24 heures.

b) Si les pores contiennent de l'eau, et si on est dans le cas (1) (enceinte totalement mouillée) $\ln(H) = 0$ et $R_{sat} = \infty$ et $k = 0$. Le transport d'air ne se fait pas par les pores, mais seulement par les fissures.

Si on est dans le cas (2), $H(e) = 0,783$ $R_{sat} = \frac{2wM}{\rho_l R_{gp} T \ln H} = 1,3 \mu m = 1300 nm$.

Le transport d'air est donc, là encore, négligeable pour une paroi suffisamment épaisse.

c) Si le matériau est fissuré, $k = \frac{De^2}{12}$ et $Q = -kA \frac{\Delta P}{\mu L}$

On obtient :

	$100 \mu m$	$300 \mu m$
$50 \cdot 10^{-10}$	68	613
$100 \cdot 10^{-10}$	136	1226

Le taux de fuite volumique autorisé est de 1,5% de $7300 m^3$ soit de $109 m^3$ (si nous négligeons la vapeur ayant pu fuir). Ce taux ne peut être atteint (dans le cas proposé) que pour $D = 50 \cdot 10^{-10}$ et $e = 100 \mu m$. On est très largement hors norme avec les autres valeurs.