

Partie I. préliminaires.I.A. Etude de l'Atmosphère.

$$\text{I.A.1. } dP = -\rho g dz \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{mP}{RT_0} \rightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT_0} dz \rightarrow P = P_0 e^{-\frac{Mgz}{RT_0}}$$

$$\text{I.A.2. } P = P_0 e^{-\frac{Mgz}{RT_0}} (1 + \epsilon) = P_0 e^{-\frac{Mgz}{RT_0}} e^{-\frac{Mgz}{RT_0} \epsilon} = P_0 e^{-\frac{Mgz}{RT_0} \left(1 - \frac{Mgz}{RT_0} (3-3.0)\right)}$$

$$\rightarrow P = P_A - \alpha (3-3.0) \text{ avec } P_A = P_0 e^{-\frac{Mgz}{RT_0}} = 9.10^3 \text{ Pa.}$$

$$\alpha = \frac{Mg}{RT_0} P_A = 10.7 \text{ Pa.m}^{-1}$$

I.B. Etude de l'écoulement dans un capillaire.

$$\text{I.B.1. Écoulement permanent de fluide incompressible} \rightarrow \text{div } \vec{v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$$\text{I.B.2. a) } (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = + \frac{1}{\mu} (\vec{\nabla} P + \eta \Delta \vec{v})$$

$$\text{En projection sur } \vec{e}_z : 0 = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \rightarrow \frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

$$\text{sur } \vec{e}_z \quad v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 = \frac{1}{\mu} \left(-\frac{\partial P}{\partial z} + \eta \times \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\eta}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \quad \forall r \text{ et } z$$

b) $\frac{P}{z}$ ne dépend que de z et $\frac{\eta}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)$ ne dépend que de r
ces 2 quantités ne peuvent être égales $\forall r$ et $\forall z$ que si elles sont
constantes. $\rightarrow \frac{dP}{dz} = c^{te} = -\frac{\Delta P}{L}$

c) $\frac{d}{dz} \left(r \frac{dv_z}{dz} \right) = -\frac{\Delta P}{L\eta} z \rightarrow r \frac{dv_z}{dz} = -\frac{\Delta P}{2L\eta} z^2 + K$

$$\frac{dv_z}{dz} = -\frac{\Delta P}{2L\eta} z + \frac{K}{r} \text{ doit rester finie pour } z=0 \rightarrow K=0$$

$$\Rightarrow v_z = -\frac{\Delta P}{4L\eta} \frac{z^2}{2} + c^{te} \quad \text{en } z=a \quad v_z=0 \rightarrow c^{te} = \frac{\Delta P a^2}{4L\eta}$$

$$\Rightarrow v_z = \frac{\Delta P}{4L\eta} (a^2 - z^2)$$

$$\text{I.B.3. } dD = 2\pi r dr v_z \rightarrow D = \frac{\pi \Delta P}{2L\eta} \left[a^2 \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4} \right]_0^a = \frac{\pi a^4}{8L\eta} \Delta P$$

$$\beta = \frac{\pi a^4}{8L\eta} = 2.65 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4 \cdot \text{s} \cdot \text{kg}^{-1}$$

I.B.4. Écoulement laminaire si $\mathcal{R}_e < 1$ avec $\mathcal{R}_e = \frac{\rho v_{\max} a}{\eta}$ (par exemple)

$$\text{avec } v_{\max} \text{ pour } z=0. \quad \mathcal{R}_e = \frac{\rho a}{\eta} \frac{\Delta P a^2}{4L\eta} < 1$$

$$\Rightarrow \Delta P < \frac{4L\eta^2}{\rho a^3} = 0.42 \text{ Pa.}$$

II. A. Principe de fonctionnement

$$\text{II.A.1.} \quad \rho Dv = -\frac{dm}{dt} = -M \frac{dn_{\text{int}}}{dt} = Dv \frac{P_A M}{RT_0} \Rightarrow \frac{dn_{\text{int}}}{dt} = -\frac{Dv P_A}{RT_0}$$

$$\text{II.A.2.} \quad P_{\text{int}} = \frac{n_{\text{int}} RT_0}{V_0} \rightarrow \frac{dP_{\text{int}}}{dt} = \frac{RT_0}{V_0} \frac{dn_{\text{int}}}{dt} = -\frac{Dv P_A}{V_0} = -\frac{\beta \Delta P P_A}{V_0}$$

$$P_{\text{atm}} = P_A - \alpha(z - z_0) \rightarrow \frac{dP_{\text{atm}}}{dt} = -\alpha \frac{dz}{dt} = -\alpha U_0$$

Or le texte nous dit que $P_{\text{int}} - P_{\text{atm}} = \Delta P$ ne dépend pas de t (pourquoi?)

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\Delta P) = 0 = -\frac{\beta \Delta P P_A}{V_0} + \alpha U_0 \Rightarrow \Delta P = \frac{\alpha V_0}{\beta P_A} U_0$$

ΔP est proportionnelle à U_0 et permet donc sa mesure.

II. B. Variomètre mécanique.

$$\text{II.B.1.} \quad \frac{dP_{\text{int}}}{dt} = -\frac{\beta P_A}{V_0} (P_{\text{int}} - (P_A - \alpha(z(t) - z_0)))$$

$$\text{II.B.2.} \quad \frac{dP_{\text{int}}}{dt} = -\frac{1}{\tau} (P_{\text{int}} - (P_A - \alpha(z(t) - z_0))) \rightarrow \tau = \frac{V_0}{\beta P_A} = \frac{10^{-3}}{2,7 \cdot 10^{-8} \times 9 \cdot 10^4} = 0,41 \text{ s.}$$

$$z(t) - z_0 = U_0 t$$

$$\rightarrow \frac{dP_{\text{int}}}{dt} = -\frac{1}{\tau} (P_{\text{int}} - P_A + U_0 t \alpha) \hookrightarrow \frac{d(P_{\text{int}} - P_A)}{dt} + \frac{1}{\tau} (P_{\text{int}} - P_A) = -\frac{\alpha U_0 t}{\tau}$$

$$\rightarrow P_{\text{int}} - P_A = A e^{-t/\tau} + \text{sol. particulier}$$

$$\text{On cherche un sol. part. } P_{\text{int}} - P_A = Ct + D \Rightarrow C + \frac{1}{\tau} (Ct + D) = -\frac{\alpha U_0 t}{\tau}$$

$$\rightarrow D = -C\tau \text{ et } C = -\alpha U_0 \rightarrow D = +\alpha U_0 \tau$$

$$\rightarrow P_{\text{int}} - P_A = A e^{-t/\tau} + \alpha U_0 (\tau - t)$$

$$\text{à } t=0 \quad P_{\text{int}} = P_A \rightarrow A = -\alpha U_0 \tau \rightarrow \underline{P_{\text{int}} - P_A = \alpha U_0 (-t + \tau (1 - e^{-t/\tau}))}$$

$$\tau \text{ est très faible} \Rightarrow P_{\text{int}} - P_A \approx -\alpha U_0 t + \alpha U_0 \tau$$

$$\text{Or } P_{\text{atm}} - P_A = -\alpha U_0 t \quad \text{On justifie ici le } \Delta P = \text{cte du II.A.2.} \\ = \alpha U_0 \tau.$$

II. B.3.

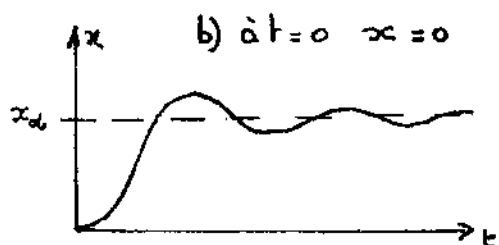
$$\text{a) } m \frac{d^2 x}{dt^2} = -Rx - R \frac{dx}{dt} + (P_{\text{int}} - P_{\text{atm}})S.$$

$$\text{b) dans ce cas } P_{\text{int}} - P_{\text{atm}} = \alpha U_0 \tau (1 - e^{-t/\tau})$$

$$\rightarrow m \frac{d^2 x}{dt^2} + R \frac{dx}{dt} + Rx = \alpha S U_0 \tau (1 - e^{-t/\tau})$$

II.B.4. a) si $R^2 - 4Rm < 0$ la solution sera de la forme

$$x = e^{-\frac{R}{2m}t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t) + x_{\text{part}}(t) \quad \text{avec } \omega = \frac{\sqrt{4Rm - R^2}}{2m}$$



$$\text{b) à } t=0 \quad x=0 \quad \text{et } \dot{x}=0$$

$$\text{c) } x_{\text{ss}} = x_{\text{part}}(x_0) = 45 \alpha U_0 \tau \left(\frac{m - R\tau + R\tau^2}{(2R\tau - R)^2 - (R^2 - 4Rm)} \right)$$

avec les ordres de grandeur donnés $R\tau^2 \gg m$ et $R\tau \gg R$

$$\Rightarrow x_{\text{ss}} \approx \frac{S \alpha U_0 \tau}{R} = 8,2 \text{ mm.} \quad R^2 - 4Rm \ll 4R\tau^2$$

Remarque : dans le cas $\alpha \neq \frac{5 \Delta P}{R}$.

3/6

d) La variation de volume du variomètre est de $2 \cdot 10^{-4} \times 8 \cdot 10^{-3} \sim 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$
et en valeur relative $\frac{\Delta V}{V_0} = 1,6 \cdot 10^{-3}$ ce qui permet d'écrire $V_0 \neq \text{cte}$.

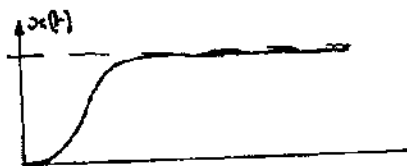
II. B.5. Il paraît préférable que l'indication n'oscille pas autour de la valeur d'équilibre, et donc de choisir la valeur de $h^2 - 4Rm$ permettant de l'atteindre le plus rapidement et sans oscillations $\rightarrow h^2 - 4Rm = 0$ amortissement critique.

$$\rightarrow m_c = \frac{R^2}{4R} = 0,25 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \text{ impensable!}$$

$$\rightarrow R_c = \frac{R^2}{4m} = 0,25 \cdot 10^{-3} \text{ impensable également car on multiplie par } 4 \cdot 10^3 \text{ le déplacement!}$$

$\rightarrow$ le mieux est donc de jouer sur l'amortissement h :

$$h_c = 2\sqrt{Rm} = 0,063 \text{ N.m}^{-1}\text{s}.$$



II. B.6. $x(t) = x_0 e^{j\omega t} e^{j\varphi} \quad \underline{x}(s) = \underline{x}_0 e^{j\varphi}$

$$a) \frac{dP_{int}}{dt} + \frac{1}{C} P_{int} = \frac{1}{C} (P_A - \alpha \underline{x}) \rightarrow (P_{int} - P_A) \left(\frac{1}{C} + j\omega \right) = -\frac{\alpha}{C} \underline{x}$$

$$P_{atm} - P_A = -\alpha \underline{x} \rightarrow P_{int} - P_{atm} = \alpha \underline{x} \left(1 - \frac{1}{1+j\omega C} \right) = \alpha \underline{x} \left(\frac{j\omega C}{1+j\omega C} \right)$$

$$-m\omega^2 \underline{x} + j\omega h \underline{x} + R \underline{x} = \frac{j\omega C \alpha S}{1+j\omega C} \underline{x}$$

$$\rightarrow H(j\omega) = \frac{\underline{x}}{\underline{x}_0} = \frac{j\omega C \alpha S}{(1+j\omega C)(R - m\omega^2 + j\omega h)} = \frac{j\omega \left(\frac{C \alpha S}{R} \right)}{1 + j\omega C - \frac{m}{R} \omega^2 + j\omega \frac{h}{R} - \frac{m}{R} j\omega^3 - \frac{\omega^2}{R}}$$

$$= \frac{j\omega \left(\frac{C \alpha S}{R} \right)}{1 + j\omega \left(C + \frac{h}{R} \right) - \omega^2 \left(\frac{m}{R} + \frac{R C}{R} \right) - j\omega^3 \frac{m C}{R}}$$

$$\Rightarrow \underline{\tau_0} = \frac{C \alpha S}{R} = \frac{V_0 \alpha S}{\beta P_A R} \quad \underline{\tau_1} = C + \frac{h}{R} = \frac{V_0}{\beta P_A} + \frac{h}{R}$$

$$\underline{\tau_2} = \sqrt{\frac{m}{R} + \frac{h}{R} \frac{V_0}{\beta P_A}} \quad \underline{\tau_3} = \left(\frac{m}{R} \frac{V_0}{\beta P_A} \right)^{1/3}$$

b) Le variomètre est utilisé pour mesurer $\underline{V_3}$ c'est à dire que sa réponse $x(t)$ doit être proportionnelle à $\frac{d\underline{V}}{dt}$

La fonction de transfert qui nous intéresse n'est donc pas

$\underline{H}$ mais $\frac{\underline{H}}{j\omega}$. Dans la zone $-3 < \log \omega < 0,3$ On peut

prendre $G = 20 \log |H| = 20 \log \omega + \text{cte}$ (droite de pente 20dB/décade.)

→ $\log \frac{H}{\omega} = cte$ Dans cette zone on voit donc que l'indication du variomètre sera proportionnelle à la vitesse ($V\omega$). 4/6

d'autre part la phase φ de H (ou de x) est de $\pi/2$ dans cette zone donc $\frac{H}{j\omega}$ aura une phase nulle, x et $\frac{d\varphi}{dt}$ seront donc en phase.

On aura bien dans cette zone $x(t) = K v(t)$.

cette zone correspond à $\omega \in]10^{-3}, 2]$ et donc à des fréquences très faibles: $F < 0,3 \text{ Hz}$ ou encore $T > 3 \text{ s}$. ce qui est honorable pour les types d'aéronefs cités en introduction.

Partie III Variomètre à affichage électronique

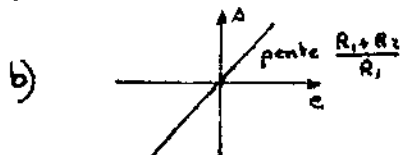
III. A. Étude du système de capacités différentielles.

$$\text{III. A. 1. } C_{1a} = C_{1b} = \frac{ES}{\epsilon_0 + x} \quad C_{2a} = C_{2b} = \frac{ES}{\epsilon_0 - x}$$

$$\text{III. A. 2. A.N. } \frac{ES}{\epsilon_0} = 4,8 \text{ nF.}$$

III. B. Oscillateur à pont de Wien

$$\text{III. B. 1. a) } E = V^+ - V^- = 0 \quad i^+ = i^- = 0 \quad V^+ = E = V^- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} E \rightarrow E = \frac{R_1}{R_1 + R_2} E$$

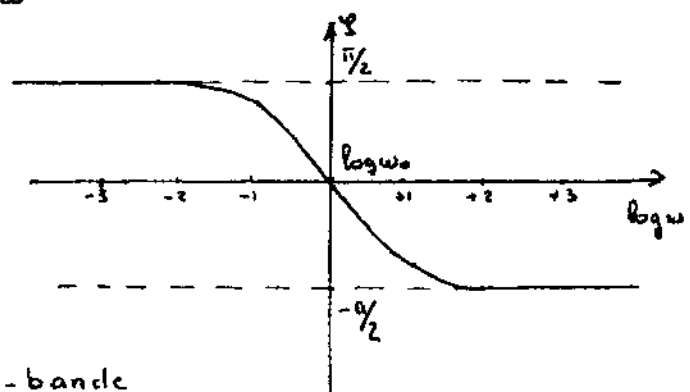
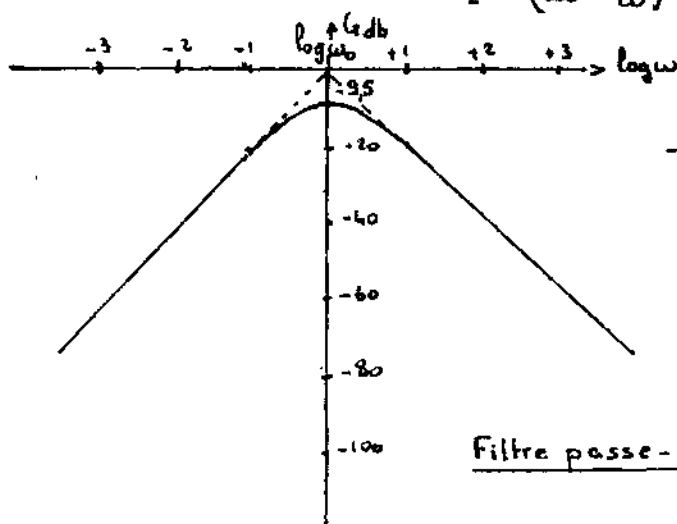


$$\text{III. B. 2. a) } G = \frac{S'}{E'} = \frac{\frac{R}{1 + jRC\omega}}{R + \frac{1}{j\omega} + \frac{R}{1 + jRC\omega}} = \frac{R}{R + \left(R + \frac{1}{j\omega}\right)(1 + jRC\omega)} = \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{1}{jRC\omega}\right)(1 + jRC\omega)}$$

$$G = \frac{S'}{E'} = \frac{1}{3 + jRC\omega + \frac{1}{jRC\omega}} = \frac{1}{3 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \quad \text{avec } \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

$$\text{gain maximum: } \omega = \omega_0 \rightarrow G_{\max} = \frac{1}{3} = Q$$

$$\text{b) } G_{dB} = -10 \log \left[9 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right] \quad \begin{cases} \tan \varphi = \frac{1}{3} \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right) \\ \text{avec } \omega > \omega_0 \end{cases}$$



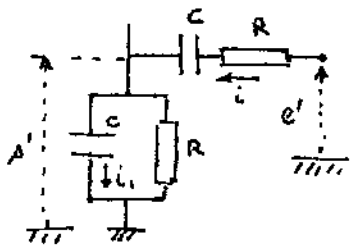
Filtre passe-bande

III. B.3. a) d'après 1. $\frac{e'}{A'} = F$ et d'après 2. $\frac{A'}{e'} = G$

Le système fonctionne sous B.F. si $F = \frac{1}{G} \Rightarrow \frac{R_1 + R_2}{R_1} = 3 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$

ceci est réalisable si $\frac{R_1 + R_2}{R_1} = 3 \Rightarrow \underline{z = \frac{R_2}{R_1} = 2}$ et $\omega = \omega_0 = \frac{1}{RC} \Rightarrow \underline{f = \frac{1}{2\pi RC}}$

b) $e' = \frac{R_1 + R_2}{R_1} p' = Ri + \frac{1}{C} \int idt + p' \rightarrow \frac{R_2}{R_1} \frac{da'}{dt} = R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C}$



$i_1 = C \frac{da'}{dt}$ et $p' = R(i - i_1) \rightarrow i = \frac{A'}{R} + C \frac{da'}{dt}$
 $\rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{1}{R} \frac{da'}{dt} + C \frac{d^2a'}{dt^2}$

$\rightarrow \frac{R_2}{R_1} \frac{da'}{dt} = \frac{da'}{dt} + RC \frac{d^2a'}{dt^2} + \frac{A'}{RC} + \frac{da'}{dt}$

$\rightarrow \underline{RC \frac{d^2A'}{dt^2} + \left(2 - \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{da'}{dt} + \frac{A'}{RC} = 0}$

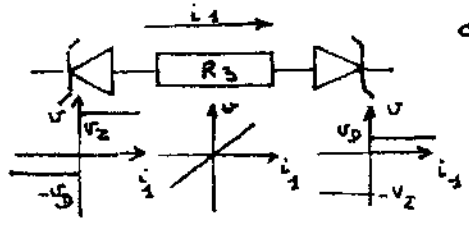
pour $\frac{R_2}{R_1} \geq 2$ des oscillations peuvent apparaître. Si $\frac{R_2}{R_1} = 2$ elles sont sinusoïdale de fréquence $f = \frac{1}{2\pi RC}$

si $R = 10 k\Omega$ et $C = 4,8 nF$ $f = 3300 Hz$. « c'est la fréquence de coupure de l'AO qui dépasse en général les $10^5 Hz$ dans ces conditions d'utilisation. On peut donc légitimement négliger la réponse fréquentielle de l'A.O.

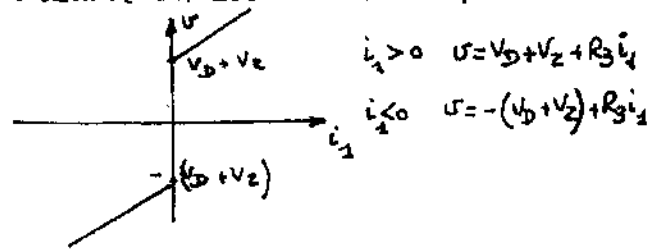
c) voir b: $n = 2$ si $R_2 = 10 k\Omega$ on prendra $\underline{R_1 = 4,7 k\Omega}$.

d) Le signal carré correspond à l'évolution entre $-V_{sat}$ et $+V_{sat}$ et la sinusoïde à son premier harmonique. (C'est du moins ce que suggère le texte) légèrement déformée car le p.p.te de Wien n'est pas très sélectif. On peut donc encadrer l'amplitude de $a'(t)$ par $\underline{2 V_{sat}}$ et $\underline{\frac{4}{\pi} V_{sat}}$.
 $\downarrow$ $\downarrow$
 $2,6 V$ $16,6 V$

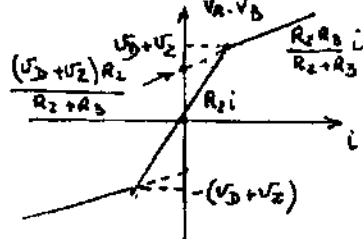
III. B.4. Amélioration du montage



a) On pose à i donnée on additionne les v.



Si on ajoute R_2 en // pour $i_2 = 0$ on aura $V_A - V_B = R_2 i$



pour $i_1 > 0 \quad V_A - V_B = V_1 + V_2 + R_3 i_1 = R_2 (i - i_1)$

$\rightarrow i_1 = \frac{R_2 i - (V_1 + V_2)}{R_2 + R_3}$
 $\rightarrow V_A - V_B = \frac{(V_1 + V_2) R_2}{R_2 + R_3} + \frac{R_2 R_3 i}{R_2 + R_3}$

de m pour $i_1 < 0 \quad V_A - V_B = -\frac{(V_1 + V_2) R_2}{R_2 + R_3} + \frac{R_2 R_3 i}{R_2 + R_3}$

- b) On voit que lorsque la tension aux bornes de R_2 dépasse $U_D + U_Z$ en valeur absolue, le diode ne comporte comme une résistance $\frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} < R_2$. Le système ne peut plus osciller.
 Si $\frac{3}{2}(U_Z + U_D) < U_{sat}$ alors le système oscille sinusoïdalement avec une amplitude crête à crête égale à $2(U_Z + U_D)$.

III. C. Étude globale du capteur

$$U_m(t) = R_m A^2 \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t = \frac{R_m A^2}{2} [\cos(\omega_1 + \omega_2)t + \cos(\omega_1 - \omega_2)t]$$

La cellule R'C' est un filtre passe bas de fréquence de coupure $\omega_c' = \frac{1}{2} = \frac{1}{RC'}$.

$$C_1 a \text{ et } C_3 b \text{ sont en } // \rightarrow C_1 = 2C_{1a} = \frac{2ES}{E_0 + x} \quad \omega_1 = \frac{E_0 + x}{2ESR}$$

$$C_2 a \text{ et } C_2 b \quad " \quad \rightarrow C_2 = 2C_{2a} = \frac{2ES}{E_0 - x} \quad \omega_2 = \frac{E_0 - x}{2ESR}$$

$$\rightarrow \omega_1 + \omega_2 = \frac{E_0}{ESR} \sim 3300 \text{ Hz}$$

$$\rightarrow \omega_1 - \omega_2 = \frac{x}{ESR} \ll \omega_1 + \omega_2 \quad \text{car } x \ll E_0$$

Si on choisit $\frac{1}{RC'} \ll 3300 \text{ Hz}$ et $> \omega_1 - \omega_2$ alors, si l'impédance d'entrée du fréquencesmètre est suffisante R , $U_{C'} = \frac{R_m A^2}{2} \cos(\omega_1 - \omega_2)t$

$$\text{et } V_S = \delta \times 2\pi \frac{x}{ESR} \quad \text{et (II.B.4)} \quad x_{\infty} = \frac{S_p \alpha V_0}{R \beta P_A} U_0 \quad (S_p \text{ surface de piston } \neq S)$$

$$\Rightarrow V_S = \frac{2\pi \delta}{ESR} \times \frac{S_p \alpha U_0}{R \beta P_A} V_Z$$

FIN