

PREMIERE PARTIE
DISPOSITIF INTERFERENTIEL ET METHODE DE DETECTION

A Interféromètre de Michelson

1 Interférences à deux ondes

A1 a

$$\underline{s}(M, t) = \underline{s}_1(M, t) + \underline{s}_2(M, t) = ae^{j(\omega t - \varphi_1(M))} + ae^{j(\omega t - \varphi_2(M))}$$

$$\underline{s}(M, t) = ae^{j\omega t} e^{-j(\varphi_1 + \varphi_2)/2} (e^{j(\varphi_2 - \varphi_1)/2} - e^{-j(\varphi_2 - \varphi_1)/2}) \Rightarrow \underline{s}(M, t) = ae^{j\omega t} e^{-j(\varphi_1 + \varphi_2)/2} (2 \cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2})$$

A1b L'éclairement est $I = \underline{s} \underline{s}^*$ soit $I = 4a^2 \cos^2(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}) = 2a^2 (1 + \cos(\varphi_2 - \varphi_1))$

Avec $I_0 = a^2$, représente l'intensité associée à chaque source ($I_0 = \underline{s}_1 \underline{s}_1^*$)

A1c $I = 2I_0(1 + \cos(\delta\varphi))$

On observe des maxima d'éclairement pour $\delta\varphi = 2p\pi$
et des minima d'éclairement pour $\delta\varphi = (2p+1)\pi$

2 Source monochromatique

A2a contact optique : $\delta_0 = 0$

Pour déterminer le contact optique en TP, à partir d'un Michelson réglé en lame d'air, on fait « rentrer » les anneaux, puis avec une source blanche, on cherche le « blanc pur », c'est-à-dire le blanc entouré de s « teintes de Newton » par un infime chariotage.

A2b $I(\delta) = 2I_0(1 + \cos(2\pi \frac{\delta_0}{\lambda}))$

A2c $\Delta I_{gr} = 2I_0(\cos(2\pi \frac{\delta}{\lambda}) - \cos(2\pi \frac{\delta_0}{\lambda})) = 2I_0(\cos(2\pi \frac{(\delta_0 + \varepsilon L)}{\lambda}) - \cos(2\pi \frac{\delta_0}{\lambda}))$

(avec $\cos(x+\alpha) = \cos x \cos \alpha - \sin x \sin \alpha$)

$$\Delta I_{gr} = 2I_0 \frac{2\pi L}{\lambda} \varepsilon \sin(2\pi \frac{\delta_0}{\lambda}) = I_0 [\frac{4\pi L}{\lambda} \sin(2\pi \frac{\delta_0}{\lambda})] \varepsilon$$

A2d La variation d'éclairement est la plus grande si $|\sin(2\pi \frac{\delta_0}{\lambda})| = 1$,

donc si $2\pi \frac{\delta_0}{\lambda} = (2p+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \delta_0 = \frac{2p+1}{4} \lambda$

A2e $\frac{\Delta I_{gr}}{I_0} = \frac{4\pi L}{\lambda} \varepsilon = \frac{4 * \pi * 10^5}{1.0610^{-6}} 10^{-21} = 1.210^{-9}$

Cette variation relative d'éclairement est très faible

3 Influence de la largeur spectrale du LASER

A3a Les deux ondes de fréquences différentes sont incohérentes : les éclairements associés s'additionnent.

$$I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} dI_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} I_0(\omega) d\omega = K \Delta\omega$$

A3b $dI = 2dI_0(1 + \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda}) = 2Kd\omega(1 + \cos \omega \frac{\delta}{c}) = 2I_0 \frac{d\omega}{\Delta\omega} (1 + \cos \omega \frac{\delta}{c})$

(erreur d'énoncé , le résultat est fonction de ω et non pas ω_0)

$$A3c \quad I = \int dI = \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} 2I_0 \left(1 + \cos \omega \frac{\delta}{c}\right) \frac{d\omega}{\Delta\omega} = 2 \frac{I_0}{\Delta\omega} \left[\omega + \frac{c}{\delta} \sin \omega \frac{\delta}{c} \right]_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}}$$

$$I = 2 \frac{I_0}{\Delta\omega} \left[\Delta\omega + \frac{c}{\delta} 2 \cos \omega_0 \frac{\delta}{c} \sin \Delta\omega \frac{\delta}{2c} \right]$$

$$\text{Soit encore} \quad I = 2I_0 \left[1 + \frac{\sin \Delta\omega \frac{\delta}{2c}}{\omega \frac{\delta}{2c}} \cos \omega_0 \frac{\delta}{c} \right] = 2I_0 \left[1 + \sin c \left(\Delta\omega \frac{\delta}{2c} \right) \cos \omega_0 \frac{\delta}{c} \right]$$

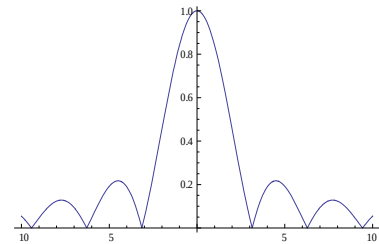
Le facteur de visibilité est donc $V(\delta) = \sin c \left(\Delta\omega \frac{\delta}{2c} \right)$

Si $\Delta\omega = 0$, le facteur de visibilité vaut 1 : on retrouve le résultat du A2b

A3d $V(\delta)$ = facteur de visibilité ou contraste

Plot [Abs [Sin [x] / x] , {x, -10, 10}]

Les zéros de la fonction sont en $\delta = p \frac{2\pi c}{\Delta\omega} = pl_c$



A3e La visibilité est très réduite si on sort du pic central, donc si on est au delà du premier zéro de la fonction V, soit pour $\delta > lc$

A3f $\delta_{0\max} \approx lc$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{2\pi c}{l_c \omega_0} = 2\pi \frac{\lambda_0}{l_c} = 2\pi \frac{10^{-6}}{10} = 610^{-7}$$

B PRISE EN COMPTE DES FLUCTUATIONS DE PUISSANCE DU LASER

$$B1a \quad (\Delta I)_{\text{flu}} = 2\Delta I_0 \left(1 + \cos 2\pi \frac{\delta_0}{\lambda} \right)$$

$$B1b \quad (\Delta I)_{\text{flu}} \text{ est minimal si le cos vaut -1 donc } 2\pi \frac{\delta_0}{\lambda} = (2k+1)\pi \Rightarrow \boxed{\delta_0 = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda}$$

Cette condition (multiple impair de $\lambda/2$) est incompatible avec la condition obtenue en A2d (multiple impair de $\lambda/4$)

$$B2a \quad \delta'_0 = 2(d'_2 - d'_1) \quad \text{et} \quad \begin{aligned} d'_1 &= d_1 + (n_1 - 1)e \\ d'_2 &= d_2 + (n_2 - 1)e \end{aligned} \Rightarrow \delta'_0 = \delta_0 + 2(n_2 - n_1)e$$

$$\text{Donc} \quad \boxed{\delta' = \delta'_0 + L\varepsilon = \delta_0 + 2(n_2 - n_1)e + L\varepsilon}$$

$$\text{Soit encore } \delta' = \delta'_0 + L\varepsilon = \delta_0 + L\varepsilon + 2(2a_0 \cos \Omega t)e$$

$$B2b \quad I = 2I_0 \left(1 + \cos 2\pi \frac{\delta'}{\lambda} \right) = 2I_0 \left(1 + \cos 2\pi \frac{\delta_0}{\lambda} + 2\pi \frac{L\varepsilon}{\lambda} + 2\pi \frac{4ea_0 \cos \Omega t}{\lambda} \right)$$

$$\Phi_0 = 2\pi \frac{\delta_0}{\lambda} \quad \alpha = 2\pi \frac{L}{\lambda} \quad \text{et} \quad m = +\pi \frac{4ea_0}{\lambda}$$

B3a Le signal $V(t)$ comporte

- une composante continue proportionnelle à m^2
- une composante de fréquence $\Omega/2\pi$ proportionnelle à $2m\alpha\epsilon$
- une composante de fréquence $2\Omega/2\pi$ proportionnelle à m^2

Pour ne garder que la composante de fréquence $\Omega/2\pi$, il faut un filtre passe-bande

B3b Sans calculs = en regardant le comportement haute et basse fréquence du filtre proposé

Haute fréquence : on remplace les capa par des fils : la résistance kR est shuntée : $V_s = V_- = V_+ = 0$

Basse fréquence : on remplace les capa par des interrupteurs ouverts : dans kR , $i=0 \Rightarrow V_s = V_- = V_+ = 0$

C'est bien un passe-bande

B3c AO idéal $V_- = V_+$ et $V_+ = 0$

Th de Millman en V_- : $0 = V_- = \frac{V_A jC\omega + V_s / kR}{jC\omega + 1/kR} \Rightarrow V_A = -\frac{V_s}{jkRC\omega}$

Th de Millman en A : $V_A = \frac{V_e / R + 0 / R + jC\omega V_s + jC\omega * V_-}{2/R + jC\omega} \Rightarrow V_A = \frac{V_e + jRC\omega V_s}{2(1 + jRC\omega)}$

D'où $\frac{V_e + jRC\omega V_s}{2(1 + jRC\omega)} = -\frac{V_s}{jkRC\omega} \Rightarrow jkRC\omega(V_e + jRC\omega V_s) = -2(1 + jRC\omega)V_s$

$jkRC\omega V_e = -2(1 + jRC\omega)V_s - kjRC\omega jRC\omega V_s = -[2 + 2jRC\omega + k(jRC\omega)^2]$

$\frac{V_s}{V_e} = \frac{k/2}{1 + \frac{k}{2}jRC\omega + \frac{1}{jRC\omega}}$

On identifie avec l'expression canonique proposée

$$\begin{aligned} H_0 &= -k/2 \\ Q &= \sqrt{k/2} \\ \Omega_0 &= \sqrt{2/k} \frac{1}{RC} \end{aligned}$$

B3d $G_{dB} = 20 \log |H| = 20 \log \left| \frac{V_s}{V_e} \right|$

Diagramme de Bode en amplitude

Ici, si $Q = 10$, $H_0 = -100$

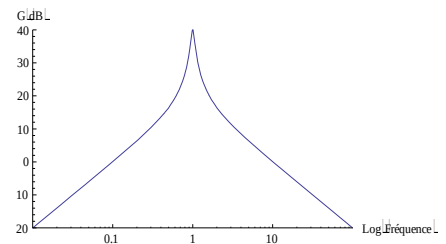
Asymptotes de pente 20 dB/décade et -20 dB/décade, se croisant en $x=$

1, $y = 20 \log |H_0/Q| = 20$

En $x = 1$, le Gain vaut $20 \log |H_0| = 40$ dB

$H[x_-] = -100 / (1 - 10^{-2} * (x - 1/x))$

`LogLinearPlot[20*Log[10, Abs[H[x]]], {x, 10^-2, 10^2}, PlotRange -> All]`



B3e Bande passante : $[\omega_1, \omega_2]$ dans lequel $H > H_{max} / \sqrt{2}$ donc $G < G_{max} - 3$

Les valeurs ω_1 et ω_2 sont donc les solutions de $1 + Q^2(x - 1/x)^2 = 2 \Rightarrow x - 1/x = \pm 1/Q$

Soit encore $x^2 \pm x/Q - 1 = 0$

On retient la racine positive de chacune de ces équations : $x_1 = -\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}$ et $x_2 = \frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}$

D'où la largeur de la bande passante : $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\Omega_0}{Q}$

B3f Le filtre est bien adapté si $\Omega_0 = \Omega$

B4a En sortie du filtre : $\underline{V}_S = \gamma I_0 [m^2 \underline{H}(0) + 2m\alpha\varepsilon \underline{H}(\Omega)e^{j\Omega t} + m^2 \underline{H}(2\Omega)e^{j2\Omega t}]$

Soit $\underline{V}_S = \gamma I_0 [2m\alpha\varepsilon H_0 e^{j\Omega t} + m^2 \frac{H_0}{1 + jQ(2 - \frac{1}{2})} e^{j2\Omega t}]$

D'où les amplitudes $A_\Omega = \gamma I_0 2m\alpha\varepsilon H_0$ et

$$A_{2\Omega} = \gamma I_0 m^2 \frac{H_0}{\sqrt{1 + \frac{9}{4}Q^2}}$$

$$B4b \quad (\Delta V)_{flu} = V(I_0 + \Delta I_0, 0) - V(I_0, 0) = b \frac{m^2 H_0}{\sqrt{1 + \frac{9}{4}Q^2}} \gamma \Delta I_0$$

$$(\Delta V)_{Og} = V(I_0, \varepsilon) - V(I_0, 0) = 2m\alpha\varepsilon H_0 I_0$$

$$B4c \quad \frac{(\Delta V)_{Og}}{(\Delta V)_{flu}} = \frac{2m\alpha\varepsilon H_0 I_0}{bm^2 H_0} \sqrt{1 + \frac{9}{4}Q^2} = \frac{I_0}{\Delta I_0} \frac{2\alpha\varepsilon}{bm} \sqrt{1 + \frac{9}{4}Q^2}$$

Ce rapport est d'autant plus grand que b est petit (bon filtrage de Vs), et que le facteur de qualité du filtre est élevé .

On peut "rattraper" une valeur de m pas trop petite(m lié à la qualité des lames= optique, sûrement coûteux) avec un bon filtre (bonne électronique= pas trop onéreux)

$$A.N \quad \frac{(\Delta V)_{Og}}{(\Delta V)_{flu}} = \frac{I_0}{\Delta I_0} \frac{2\alpha\varepsilon}{bm} \sqrt{1 + \frac{9}{4}Q^2} = 1.7$$

Ce rapport n'est pas très élevé, il est encore difficile de s'affranchir des fluctuations du laser.

B4d Pour ce filtre $G(\Omega) = 0$ et $G(2\Omega) = -43$ dB alors qu'avec le précédent : $G(\Omega) = 0$ et $G(2\Omega) = -23.5$ dB
 $G(2\Omega) = -43$ dB au lieu de -23 dB $\Rightarrow$ écart de $20 \log(10)$ Le filtrage est donc meilleur : le rapport d'amplitude (donc b) entre les deux composantes est augmenté d'un facteur 10 . ($G(2\Omega) = -43$ dB au lieu de -23 dB $\Rightarrow$ écart de $20 \log(10)$)

$$\frac{(\Delta V)_{Og}}{(\Delta V)_{flu}} \approx 17 \quad \text{tout à fait suffisant pour permettre la détection des ondes gravitationnelles}$$



Détecteur interférométrique **VIRGO** sur le site de Cascina, près de Pise [CNRS/INFN]

