

I) Détection de rayonnement avec un bolomètre

1) Régime stationnaire a) dans le barreau conducteur, le flux thermique est uniforme (j^{cd})

$$\rightarrow T(x) = T_0 + \frac{T_b - T_0}{L} x$$

b) puissance perdue par le bolomètre $P_c(T_0) = j^{cd} S = -\lambda \frac{T_b - T_0}{L} S \rightarrow P_c(T_0) = \lambda \frac{(T_0 - T_b)}{L} S$

conductance thermique du barreau $G = \frac{P_c(T_0)}{T_0 - T_b} \rightarrow G = \frac{\lambda S}{L}$ et $P_c(T_0) = G(T_0 - T_b)$

c) Equation d'équilibre thermique: si la puissance radiative incidente est intégralement absorbée et si on néglige la puissance radiative émise, on obtient

$$P_h + R(T) I^2 = G(T_0 - T_b)$$

Relation définissant T_0 de façon implicite. Si on linéarise $R(T)$ au voisinage de T_b , $R(T) \approx R(T_b) + \alpha(T - T_b)R$ il s'agit de 2 droites qui se croisent si $\alpha(T_b) R(T_b) I^2 < G$ pour une température $T_0 > T_b$

2) Rayonnement de puissance variable

a) puissance perdue par le bolomètre $P_c(T) = P_c(T_0) + \left. \frac{dP_c}{dT} \right|_{T_0} (T - T_0) = P_c(T_0) + G_d \delta(T)$

b) résistance du bolomètre $R(T) = R(T_0) + \alpha_0 R(T_0) \delta(T)$

c) équation différentielle relative à $\delta(T)$: $P_h + p(t) + R(T) I_0^2 - P_c(T) = C_{th} \frac{dT}{dt}$

en utilisant l'équation d'équilibre, il vient $C_{th} \frac{d\delta(T)}{dt} + (G_d - \alpha_0 R(T_0) I_0^2) \delta(T) = p(t)$

Stabilité de l'équilibre si $G_d > \alpha_0 R(T_0) I_0^2$, en particulier si $\alpha_0 < 0$, stabilité assurée.

d) Variation $p(t)$ sinusoïdale: en utilisant les grandeurs complexes associées à $p(t)$ et $\delta(t)$, on obtient

$$\frac{\delta_0}{(G_d - \alpha_0 R(T_0) I_0^2) + i\omega C_{th}} \text{ de la forme indiquée avec } \begin{cases} G_e = G_d - \alpha_0 R(T_0) I_0^2 \\ \tau_e = \frac{C_{th}}{G_e} \\ \varphi = \arctan(\omega \tau_e) \end{cases}$$

le système se comporte en filtre passe-bas de pulsation de coupure $\omega_c = \frac{1}{\tau_e}$

e) Application numérique $\tau_e = 956 \cdot 10^{-3} s$

f) fonction de transfert $S(\omega) = \frac{\tau}{P} = I_0 \alpha_0 R(T_0) \frac{\delta_0}{P_0} \rightarrow S(\omega) = \frac{\alpha_0 R(T_0) I_0}{G_e} \frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau_e^2}}$

Pour $f = 100 \text{ Hz}$ $|S(\omega)| = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ V} \cdot \text{W}^{-1}$

3) Bruit Johnson a) F.é.m sinusoïdale $U_f = \frac{1}{2} C \overline{u_c^2}$ où u_c est la tension aux bornes de C

$$\text{or } \overline{u_c(t)} = \frac{e_B(t)}{1 + jRC\omega} = \frac{e_B(t)}{(1 + R^2 C^2 \omega^2)^{1/2}} e^{i\varphi} \rightarrow \overline{u_c^2} = \frac{\overline{e_B^2}}{1 + R^2 C^2 \omega^2}$$

b) F.é.m fluctuante

$$U_f = \frac{1}{2} C \frac{\overline{e_B^2}}{1 + 4\pi^2 R^2 C^2 f^2}$$

$$d\overline{e^2} = u_0 df \quad d\overline{U} = \frac{1}{2} C u_0 df \rightarrow \overline{U} = \int_0^\infty d\overline{U} = \int_0^\infty \frac{1}{2} \frac{C u_0}{2\pi RC(1+x^2)} dx \rightarrow \overline{U} = \frac{u_0}{8R}$$

$(x = 2\pi RCf)$

c) Valeur moyenne de l'énergie du condensateur

$$\langle U \rangle = \int_0^\infty P(q) \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} dq = \int_0^\infty \frac{k_B T}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-x^2} dx \text{ où } x = \frac{q}{\sqrt{2Ck_B T}} \rightarrow \langle U \rangle = \frac{1}{2} k_B T$$

d) Densité spectrale μ_0 : On suppose $\bar{U} = \langle U \rangle \rightarrow \mu_0 = 4R_B T$

Il vient $\overline{\epsilon^2} = \mu_0 \Delta f = 4R_B T \Delta f$

e) Application numérique: $T = 100 \text{ mK}$ $R = 1 \Omega$ $\overline{U_{\mu_0}} = 2,35 \cdot 10^{-8} \text{ V} \cdot \text{s}^{-1/2}$

4) Circuit électronique de mesure de $R(T)$

a) montage de la figure 3a $\rightarrow v^+ = \frac{V_A R(T)}{R_p + R(T)} \approx \frac{V_A R(T)}{R_p}$ car $R_p \gg R(T)$
 en régime linéaire $v^+ = v^-$, $v_s = v^- \frac{R_1 + R_2}{R_2} \rightarrow v_s = V_A \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \frac{R(T)}{R_p}$

Intérêt du montage: $R_p \gg R(T) \rightarrow v_s$ proportionnelle à $R(T)$ et courant traversant $R(T)$ "indépendant" de T

Impédance d'entrée de l'amplificateur inverseur très grande ($\approx 10^8 \Omega$)

b) Tension de décalage en sortie.

cette fois, on a $v^+ = V_A \frac{R(T)}{R_p} - v_s \rightarrow v_s = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \left(V_A \frac{R(T)}{R_p} - v_s\right)$

si on applique une tension $V_A(t)$ alternative, on peut obtenir un signal non perturbé par v_s en éliminant la composante continue de v_s avec un filtre passe-haut

L'avantage d'une tension carrée est que l'effet Joule est identique à celui d'une tension continue $\rightarrow$ fonctionnement du bolomètre n'est pas modifié

c) montage de la figure 3d $v^- = \frac{V_A/R_3 + v_s/R_1}{1/R_3 + 1/R_1 + 1/R_2} \rightarrow v_s = v^- \left(1 + \frac{R_1}{R_3} + \frac{R_1}{R_2}\right) - \frac{V_A R_1}{R_3}$

or $v^- = v^+ = \left(V_A \frac{R(T)}{R_p} - v_s\right) \rightarrow v_s = V_A R(T) \left(\frac{R_1}{R_p} \left(1 + \frac{R_1}{R_3} + \frac{R_1}{R_2}\right) - \frac{R_1}{R_3}\right) - v_s \left(1 + \frac{R_1}{R_3} + \frac{R_1}{R_2}\right)$

composante alternative de v_s annulée à $T = T_0$ si $\left(\frac{R_0}{R_p} - 1\right) \frac{R_1}{R_3} + \frac{R_0}{R_p} \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) = 0$

d'où la condition $R_3 = \frac{R_p/R_0 - 1}{1/R_1 + 1/R_2}$ ou encore $R_3 = \frac{R_p/R_0}{1/R_1 + 1/R_2}$ car $R_p \gg R_0$

d) Expression de $\tilde{v}_s$ en fonction de $p(f)$

variations de $p(f)$ lentes devant $\omega_c \rightarrow$ transformée de Fourier ne comporte que des composantes telles que $\omega \tau_c \ll 1 \rightarrow \delta(f) \approx \frac{p(f)}{\omega_c} \rightarrow R(T) \approx R_0 + \frac{\alpha_0 R_0}{\omega_c} p(f)$

$\rightarrow \tilde{v}_s = V_A \frac{\alpha_0 R_0}{\omega_c} \frac{p(f)}{R_p} \left(1 + \frac{R_1}{R_3} + \frac{R_1}{R_2}\right) = V_A \frac{\alpha_0}{\omega_c} p(f) \frac{R_1}{R_3} \rightarrow \tilde{v}_s = V_A \frac{\alpha_0}{\omega_c} \frac{R_0}{R_p} \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) p(f)$

e) Application numérique

$R_3 = 900 \Omega$

$\tilde{v}_s = \pm V_0 \frac{\alpha_0}{\omega_c} \frac{R_1}{R_3} p(f) = \pm 2,44 \cdot 10^{-8} p(f)$ (signe opposé à V_A)

II) Cryogénie 1) Cryostat A

a) les échanges s'effectuent uniquement par rayonnement en l'absence de contact matériel, ici grâce au vide réalisé dans les espaces intermédiaires

b) Equilibre thermique des différents éléments

Helium $SE\sigma (T_1^4 - T_0^4) = L_{He} D_{He}$
 Azote $SE\sigma [(T_2^4 - T_1^4) + (T_0^4 - T_1^4)] = L_{N_2} D_{N_2}$

Evacuation thermique $SE\sigma [(T_3^4 - T_2^4) + (T_1^4 - T_2^4)] = 0$

c) Application numérique

réservoir d'Helium est un cylindre de diamètre d , hauteur $h \rightarrow S = \frac{\pi d^2}{2} + \pi d h = 50 \text{ cm}^2$

$T_2 = \left(\frac{T_1^4 + T_3^4}{2}\right)^{1/4} = 244 \text{ K}$ $D_{He} = \frac{SE\sigma (T_1^4 - T_0^4)}{L_{He}} = 4,77 \cdot 10^{-6} \text{ kg/s} \rightarrow 3,3 \text{ L/j}$
 Autonomie $\approx 2,7 \text{ j}$

$D_{N_2} = \frac{SE\sigma (T_2^4 - T_0^4 - 2T_1^4)}{L_{N_2}} = 4,99 \cdot 10^{-5} \text{ kg/s} \rightarrow 5,33 \text{ L/j}$
 Autonomie $\approx 15 \text{ d}$

Vaporisation 1L N_2	153,2 kJ	He	2,6 kJ
Rechauffement du gaz à 290K N_2	147,2 kJ	He	185,9 kJ

La valeur la plus élevée correspond au réchauffement de He gazeux de 4 à 290K. Le cryostat B en profite en refroidissant les écrous thermiques par l'hélium gazeux avant qu'il ne sorte du cryostat.

b) Equilibre thermique des différentes parties.

$$\begin{array}{l} \text{Hélium} \quad S E O (T_1^4 - T_0^4) = L_{He} D_{He} \\ \text{Ecran à } T_2 \quad S E O [(T_2^4 - T_1^4) + (T_0^4 - T_1^4)] = D_{He} C_{He} (T_1 - T_0) \end{array}$$

$$\text{Ecran à } T_2 \quad S E O [(T_2^4 - T_1^4) + (T_1^4 - T_2^4)] = D_{He} C_{He} (T_2 - T_1)$$

c) Hypothèses simplificatrices $T_0 \ll T_1, T_2$ $T_1^4 \ll T_2^4$, les relations deviennent

$$\begin{array}{l} S E O T_1^4 \approx L_{He} D_{He} \quad S E O T_2^4 \approx D_{He} C_{He} T_2 \quad S E O (T_2^4 - 2T_1^4) \approx D_{He} C_{He} (T_2 - T_1) \\ \text{d'où } \frac{T_2^4}{T_1^4} = \frac{L_{He}}{C_{He} T_1} = \frac{T_2}{T_1} \quad \text{et} \quad \frac{T_2^4}{T_1^4} = 2 \frac{T_2^4}{T_1^4} + \frac{C_{He}}{L_{He}} (T_2 - T_1) = \frac{T_2 + T_1}{T_2} = \frac{T_1}{T_2} (1 + \frac{T_2}{T_1}) \end{array}$$

$$\text{Il vient la relation demandée } \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^4 = \frac{T_2}{T_1} \left(1 + \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{1/4} \right)$$

Résolution graphique $T_1 \approx 97,65 K$ $T_2 \approx 216,5 K$ $D_{He} \approx 1,234 \cdot 10^{-5} \text{ kg/d} \rightarrow 2,52 \text{ g/j}$

3) Comparaison

Le cryostat B consomme plus d'hélium mais il est plus simple (pas d'écrou)

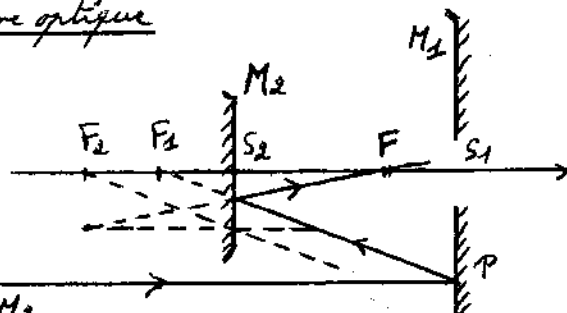
III) Etude du système optique 1) Antenne du système optique

a) Construction de F

Le rayon issu d'une source à l'infini sur l'axe donne après réflexion en P un rayon passant par F_2

Le rayon parallèle à $P F_2$, passant par F_2 , donne après réflexion sur M_2 un rayon parallèle à l'axe

Ces 2 rayons parallèles donnent après réflexion sur M_2 des rayons réfléchis qui semblent provenir d'un point situé dans le plan de front par F_2 (plan focal)



b) Relation de conjugaison du miroir M_2 $\frac{1}{S_2 A} + \frac{1}{S_2 F} = \frac{1}{S_2 F_2} = -\frac{1}{f_2}$

L'image du point à l'infini sur l'axe par M_2 est F_2 , foyer du miroir donc F est le conjugué de F_2 par rapport à M_2

$$\frac{1}{S_2 F} = -\frac{1}{f_2} + \frac{1}{F_1 S_2} \rightarrow \boxed{S_2 F = \left(\frac{1}{F_1 S_2} - \frac{1}{f_2} \right)^{-1}}$$

c) Justification du schéma. on veut que l'image F de la source soit réelle $\rightarrow S_2 F > 0$

$$\text{donc } F_1 S_2 > 0 \Rightarrow \boxed{S_2 S_1 < f_1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{F_1 S_2} > \frac{1}{f_2} \Rightarrow \boxed{F_1 S_2 < f_2} \quad F_1 \text{ entre } F_2 \text{ et } S_2$$

d) Limites de $F_1 S_2$: on veut $S_2 F > S_2 S_1 > 0$

$$\text{il vient } \frac{F_1 S_2^2}{f_2} - (2 + \frac{f_1}{f_2}) F_1 S_2 + f_2 < 0 \quad F_1 S_2 \text{ doit \u00eatre entre les racines du trin\u00f4me}$$

$$\text{soit } f_2 \left(1 + \frac{f_1}{f_2} \pm \sqrt{1 + \left(\frac{f_1}{f_2} \right)^2} \right)$$

2) Int\u00e9r\u00eat du montage

a) Taille de l'image $A'B'$ d'une source vue sous l'angle α
 image $A_0 B_0$ par $M_1 \rightarrow A_0 B_0 = \alpha f_1 \rightarrow A'B' = \alpha f_2 \times \left| \frac{S_2 F}{S_2 F_2} \right| \rightarrow \boxed{A'B' = \alpha f_2 \frac{f_2}{f_2 - F_1 S_2}}$

b) Avec une lentille unique de focale f $A'B' = \alpha f \rightarrow$ Image de m\u00eame taille si $f = \frac{f_1 f_2}{f_2 - F_1 S_2}$

c) Application num\u00e9rique Racines 5,24 m et 0,46 m Condition sur $F_1 S_2$ satisfaisante

$$f = 3,33 \text{ m} \quad S_2 F = -1,33 \text{ m}$$

d) Avantages du montage Cassegrain: système achromatique, surface collectant la lumière plus importante

e) Surface collectrice effective Pour collecter tous les rayons, il faut $R_2 \geq R_1 \times \frac{F_2 S_2}{F_1}$
rapport optimal $R_2/R_1 = F_2 S_2 / f_1 = 0,4$ avec $\sigma = \pi(R_1^2 - R_2^2) = 0,66 \text{ m}^2$

3) Collecteur de rayonnement a) Point $A' \rightarrow \varphi = \theta + \frac{\pi}{2} \rightarrow FA' = \rho(\theta + \pi/2) = \frac{2fw}{1 + \sin\theta}$ et $FA' = 2a'$

d'où la relation demandée $f_w = a'/(1 + \sin\theta)$

b) Relation entre L, a, a' et θ

$$L = FA \cos\theta \text{ et } a + a' = FA \sin\theta \rightarrow \boxed{L \tan\theta = a + a'}$$

c) Relation entre a, a' et θ

$$a + a' = FA \sin\theta = \frac{2fw \sin\theta}{1 - \cos\theta} = \frac{fw}{\sin\theta} = \frac{a'(1 + \sin\theta)}{\sin\theta} \rightarrow \boxed{a \sin\theta = a'}$$

d) Inclinaison maximale θ_w d'un rayon sortant par $A'B'$

Un rayon parallèle à l'axe de la parabole AA' donne un rayon réfléchi passant par $F = B'$. S'il est moins incliné sur l'axe du collecteur, le rayon réfléchi passe entre A' et B' ou si θ se rapproche de zéro se réfléchit à nouveau avant de sortir par $A'B' \rightarrow \theta_w = 0$

Pour $\theta > \theta_w$ le rayon réfléchi sur AA' atteint BB' . En limite $\theta = \theta_w$, le rayon réfléchi passe par $F = B'$ et est parallèle à l'axe de la parabole BB' donc se réfléchit selon $B'A'$ et suit une trajectoire symétrique par rapport à l'axe A du collecteur donc ressort. Si $\theta > \theta_w$, le rayon ressort par AB

e) Intérêt du collecteur

Le collecteur diminue la surface à couvrir par le bolomètre et facilite l'association de plusieurs bolomètres qui donneront une "image" de la région du ciel voisine de l'axe de l'antenne.

4) Système imageur

Erreur d'incré: le diamètre de la tache d'Airy est $\phi_d = f \lambda \frac{1,22}{R_1}$

a) rayon d'entrée du cône $a = \phi_d = 8,1 \text{ mm}$

Le choix d'un rayon du cône double de celui de la tache d'Airy permet d'avoir "souvent" la quasi totalité de la tache dans un seul cône $\rightarrow$ un privilège de sensibilité aux dépens de la résolution.

b) Détection de tous les rayons réfléchis par R_2

Pour une source située sur l'axe de l'antenne, l'angle maximal des rayons réfléchis par R_2 satisfait à $\tan \theta_m = \frac{R_2}{S_2 F}$ On veut $\theta_m \leq \theta_w \rightarrow \tan \theta_w \geq \frac{R_2}{S_2 F}$. Avec l'approximation $\sin \theta_w = \tan \theta_w$, il vient

$$L = \frac{a(1 + \sin \theta_w)}{\tan \theta_w} \approx \frac{a(1 + R_2/S_2 F)}{R_2/S_2 F} \rightarrow \boxed{L = a(1 + \frac{S_2 F}{R_2})} \quad L \approx 7,64a = 62 \text{ mm.}$$

5) Sensibilité du dispositif

quel $\rho(t)$ donne un signal égal à $\sqrt{\frac{4kT}{C}}$? $\frac{2 \cdot 10^{-10}}{81} P_e = \sqrt{\frac{4kT}{C}} = \frac{1,35 \cdot 10^{-8}}{\sqrt{10}} \rightarrow P_e = 3,0 \cdot 10^{-12} \text{ W}$ pour $\tau = 10 \text{ s.}$

Source isotrope à la distance D . La surface collectrice d'aire σ reçoit $p = \frac{P \cdot \sigma}{4\pi D^2}$ où P est la puissance émise d'où la distance limite $D = \left(\frac{P \cdot \sigma}{4\pi p_e}\right)^{1/2} \rightarrow D = 1,32 \cdot 10^5 \text{ km}$ si la lumière collectée atteint le bolomètre.

Le dispositif a une excellente sensibilité.