

La balance de Watt (partie pléthore)

I. Étudions des mesures, quelques problèmes de leur compensation.

1) Aspect géométrique.

1- Le volume de cylindre est $V = \pi R^2 h$ et sa surface extérieure $S_{ext} = 2\pi R^2 + 2\pi R h$.On cherche à minimiser S_{ext} à V constante : $\frac{dS_{ext}}{dR} = 4\pi R + 2\pi h \frac{dh}{dR} = 0$

$$\text{avec } \frac{dV}{dR} = 2\pi R h \frac{dh}{dR} + \pi R^2 = 0 \rightarrow \frac{dh}{dR} = -\frac{R}{2h}$$

$$\text{On a alors } 2\pi R + (4\pi R + 2\pi h) \left(-\frac{R}{2h}\right) = 0$$

$$1 = (2R + h) \frac{1}{2h} \text{ soit } 2h = 2R + h \Rightarrow h = 2R$$

2- On effectue les applications numériques en minimisant la surface extérieure (ce qui minimise les pertes d'énergie de l'échantillon).

$$V = 2\pi R^3 \text{ et } S = m = 1 \text{ kg} \rightarrow V_{pt} = 4,65 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 = 46,5 \text{ cm}^3$$

$$V_{int} = 1,27 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 = 127 \text{ cm}^3$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \rightarrow R_{pt} = 0,0135 \text{ m} = 1,35 \text{ cm} \text{ et } h_{pt} = 2R = 2,70 \text{ cm}$$

$$R_{int} = 0,0273 \text{ m} = 2,73 \text{ cm} \quad h_{int} = 5,45 \text{ cm}$$

$$S_{ext} = 2\pi R^2 + 2\pi R h = 6\pi R^2 \rightarrow S_{pt} = 7,16 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 = 71,6 \text{ cm}^2$$

$$S_{int} = 14,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 = 140 \text{ cm}^2$$

3- C'est une sphère qui minimise le rapport surface/volume (formule géométrique dans les pages...)

2) Influence de l'air.

1- La poussée d'Archimède sur le cylindre est $\vec{P} = -\rho_a V \vec{g}$ (opposé du poids du volume d'air déplacé).La mesure mesurée est alors inférieure de $S_{air} V$ à la mesure réelle.

$$-2- \Delta m_{re} = 6,05 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$$

$$\Delta m_{int} = 1,05 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$$

$$\text{Soit un écart } S_{air} m = + 1,05 \cdot 10^{-3} \text{ kg. soit } \pm 1,7\%$$

3- Le choix du plateau initial pour étalon est intéressant par la forte densité du matériau.

Son coût étant important, on sélectionne par conséquent l'inox pour lequel il sera le moins cher à tenir compte, pour des usages métrologiques (0,1% de précision) de l'atmosphère entourant l'étalon. Les opérations d'étalonnage devront se faire dans une pièce d'air pur sèche que l'on aérée le mieux.

3) Adaption à la surface des étalons.

1- Une énergie potentielle d'interaction en $U(p_3) = -k_p/g$ avec $k_p > 0$ est attractive car

$$F(p_3) = -\frac{3k_p}{g} \text{ pousse les molécules vers le puits (zone de faible énergie potentielle).}$$

Ce sont les forces électrostatiques de Van Waals qui sont responsables de ces attractions.

2- Chercher l'endroit où $P(p_3) = P_3(T)$: la courbe $P_3(T)$ de anneaux d'équilibre

$$\text{à l'équilibre. } P_0 \exp\left(+\frac{k_p}{3k_B T}\right) = P_3(T)$$

$$\rightarrow \frac{k_p}{3k_B T} = \ln\left(\frac{P_3(T)}{P_0}\right) : 3 = \left(\frac{k_p}{k_B T} \ln\left(\frac{P_3(T)}{P_0}\right)\right)^3 \text{ qui est l'expression proposée par le texte.}$$

$$-3- \text{ a) A.N. } d\ell_y = 1,7 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 170 \text{ pm}$$

b) Comme $2R < d\ell_y < R$, on sélectionne 1 couche de molécules.

En considérant un puits de potentiel (cylindre), chaque particule occupe sa portion du volume :



$$\cos 30^\circ = \frac{R}{h/2} \Rightarrow h = \frac{R}{\cos 30^\circ} = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{R}{h/2} \Rightarrow h = \frac{R}{\cos 60^\circ} = 2R$$

$$S_{air} = 2ab = 8 \frac{R^2}{\sqrt{3}}$$

$$m_{air} = \left(\frac{S_{air} \sqrt{3}}{8}\right) \frac{m_{air}}{R} = 2,1 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$$

c) La mesure mesurée, si on ignore cet effet, est inférieure de $S_{air} = 2,1 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$ à la mesure du cylindre idéal.

4) Effet du champ de pesanteur.

1- Le centre de masse d'un cylindre est à mi-hauteur du cylindre soit $\frac{h}{2}$ au-dessus du plateau.

$$\delta h = h_{int} - h_{pt} = 9,8 \text{ mm}$$

2- En négligeant l'effet de la rotation lente, g reste comme le champ de gravitation : on a $\frac{1}{R^2}$ à étudier la distance au centre de la Terre. $\frac{1}{R^2} = \frac{1}{(R_E)^2} = \frac{1}{R^2} \left(1 + \frac{h}{R}\right)^2 \approx \frac{1}{R^2} \left(1 + \frac{2h}{R}\right)$ car $h \ll R$

$$\left[\frac{\delta g}{g}\right] = \frac{-\frac{2h}{R}}{1} = -\frac{2h}{R} \text{ soit ici } \frac{\delta g}{g} = -\frac{2\delta h}{R}$$

3- À l'équilibre $m_{air} g_{air} = m_{kg} g_{kg}$ et m_{int} est supérieur à 1 kg car g_{int} est plus faible que g_{kg} : la différence est logarithmiquement $\frac{m_{int}}{m_{air}} = \frac{g_{air}}{g_{int}} = 0$

$$\text{Soit } S_{air} = m_{int} \frac{g_{air}}{g_{int}} = \frac{2 m_{int} \delta h}{R} = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$$

C'est un effet décalable ($> 1 \text{ pg}$) de même amplitude que celui de l'addition d'eau. Il faut donc tenir compte en métrologie.

5) Principe d'une compensation de haute précision.

$$-1- \text{ Une bobine plate crée au son une champ } \vec{B}(z) = \frac{\mu_0 M_{int} R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\text{On a donc } \frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{3}{2} \frac{\mu_0 M_{int} R^2}{(R^2 + z^2)^{5/2}}$$

①

-2- 1) 2- donc $m_y = I_w \ddot{\theta}$

soit $m_y \ddot{\theta} = -I_w (-B \ddot{\theta})$
 = E_w d'après 2-

On a donc $m_y \ddot{\theta} + I_w \ddot{\theta} = 0$

Le p.m. du dipôle positif provient probablement de cette relation qui représente une somme de puissances : celle du pôle et une puissance électrique (variable I_w et E_w n'étant pas obtenus simultanément).

3) Dispositif expérimental.

-1- $I_w = \frac{m_y B}{B \rho} = \frac{0.5 \cdot 0.8}{1 \times \pi \times 0.26 \times 600} = 10,0 \text{ m A}$

-2- Une borne supérieure possible de $|dE_w|$ est $|B_y|_{\text{max}} |m_y|$ en prenant l'expression de 2- (la circulation de $\vec{E} \wedge \vec{B}$ ne peut être optimale sur toute la circonférence).

$\left| \frac{dE_w}{E_w} \right| = \left| \frac{dE_w}{B_y m_y} \right| < \left| \frac{B_y}{B} \right| \left| \frac{m_y}{m_y} \right| < 10^{-8} \rightarrow \left| \frac{dE_w}{E_w} \right| < 10^{-8} \left| \frac{B_y}{B} \right| = \left| \frac{dE_w}{E_w} \right|_{\text{max}} = 10^{-4}$

$\left| \frac{dE_w}{E_w} \right|_{\text{max}} = 10^{-4}$

Il est donc préférable d'éviter tout mouvement latéral de la bobine (l'usage d'une articulation).

(en sign)

-3- Si m est augmentée, le moment à compenser est opposé à celui qui doit être compensé. On ajoute une masse du côté de la bobine. Les moments des forces de déplacement les compensent donc aussi d'être : les déviations sont donc de signes opposés.

On a donc :

$0' m_y + I_1 B \rho \ddot{\theta}' = 0$ par équilibre des 2 moments opposés.

puis $0' m_y + I_2 B \rho \ddot{\theta}' = m_y \rho \ddot{\theta}'$ en rajoutant m

donc $m_y \rho \ddot{\theta}' = (I_2 - I_1) B \rho \ddot{\theta}'$ et $m_y = (I_2 - I_1) B \rho$

I_w est simplement remplacé par $I_2 - I_1$. On a donc $m_y \ddot{\theta} + (I_2 - I_1) \ddot{\theta} = 0$ comme nouvelle relation.

L'itération de cette manière de procéder est de ne pas avoir besoin d'équilibre statiquement la force et la bobine ; par différence de 2 mesures de moments à l'équilibre (1 et 2), les moments sont éliminés.

③

-2- $\vec{F} = -\gamma \vec{\sigma} \otimes \vec{B} = -\frac{\partial W}{\partial \vec{\sigma}} = \frac{\partial}{\partial \vec{\sigma}} (u \vec{B}) \cdot \vec{\sigma}$
 $= u \frac{\partial B}{\partial \vec{\sigma}} \cdot \vec{\sigma}$

On a donc $\left[\vec{F}_y (z_0, I_0) = -\frac{3}{2} \mu_0 m_y B^2 I_0 \frac{\partial}{\partial (B_y z_0)} \right]$

-3- L'orientation change le signe mais la cote aussi : F_y est la même.

-4- les 2 positions sont - m , équivalentes par rapport à z_0 donc on fait tel une force identique sur l'ensemble des 2 aimants, leurs rôles dans la contribution s'inversent dans le résultat :

$F(m)$ est paire et croissante au centre $m = 0$.



-5- L'équation est résolue lorsque la somme des moments en 0 est nulle :

$m_y \rho \ddot{\theta}' = m_y \rho \ddot{\theta}' - 2 F_y (z_0, I_0) \rho \ddot{\theta}'$
 $I_A = \frac{m_y \rho \ddot{\theta}' - m_y \rho \ddot{\theta}'}{3 \mu_0 m_y B^2 I_0} = \frac{2 F_y (z_0, I_0)}{3 \mu_0 m_y B^2 I_0}$

II - Principe de la balance du watt.

1) Phase statique

-1- L'équilibre statique au fond de la poutre $\vec{F} = \int_{\text{bobine}} I_w \vec{B} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{l} = 100 \vec{e}_z$ en fait $\vec{F} = \int_{\text{bobine}} I_w \vec{B} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{l} = 100 \vec{e}_z$ (B=0)

$\vec{F} = \left(\int_{\text{bobine}} I_w \vec{B} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{l} \right) \vec{e}_z$ est verticale vers le haut.

$\vec{F}_y = \vec{F} \cdot \vec{e}_y = I_w B \int_{\text{bobine}} \sin \theta \cdot d\vec{l}$ si B est le même sur toute la spirale.

$\int_{\text{bobine}} \sin \theta \cdot d\vec{l} = \int_{\text{bobine}} \sin \theta \cdot d\vec{l} = I_w B \rho$

-2- On peut donc l'équilibrer et on ajoute 2 moments : les m doivent être nulle.

On a donc $m_y \rho \ddot{\theta}' = F_y \rho \ddot{\theta}'$ soit $F_y = m_y$: $I_w B \rho = m_y$.

2) Phase dynamique

-1- Pour ce circuit mobile dans un champ constant $E_w = \int_{\text{bobine}} \vec{E} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{\text{bobine}} (u \vec{B} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{l}) \cdot \vec{e}_z$
 $= \int_{\text{bobine}} u \vec{B} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{l} \cdot \vec{e}_z$
 $= E_w = u_y B (-l)$

5

4) Généralisation à une bobine rigide, de forme géométrique quelconque.

$$\vec{F} = \int_{\text{bobine}} I \vec{w} \, d\vec{l} \times \vec{B} = I \int_{\text{bobine}} d\vec{l} \times \vec{B}$$

$$\text{et } \vec{F}_g = \vec{F} \cdot \vec{g} = \int_{\text{bobine}} I \vec{w} \cdot (\vec{B} \times \vec{g}) \, d\vec{l} = I \int_{\text{bobine}} (\vec{B} \times \vec{g}) \cdot d\vec{l}$$

$$\vec{F}_g = I \int_{\text{bobine}} \vec{B} \, d\vec{l}$$

-2- On reprend l'expression générale du 2) et

$$\vec{E}_w = \int_{\text{bobine}} (\vec{B} \times \vec{g}) \cdot d\vec{l}$$

$$\vec{E}_w = \int_{\text{bobine}} N_f \cdot \vec{g} \cdot d\vec{l} = -N_f \int_{\text{bobine}} \vec{B} \, d\vec{l}$$

-3- On a donc $\vec{E}_w I = -N_f I \int_{\text{bobine}} \vec{B} \, d\vec{l} = -N_f I \vec{g} = -N_f m \vec{g}$: la relation du 2) est donc toujours valable.

-4- Si $\vec{B}$ n'est pas strictement $\vec{g}$, on a les mêmes problèmes que précédemment. Si $\vec{F}$ passe une longueur non nulle, cela entraîne un moment supplémentaire à compenser. Soit une ligne ou un autre moyen pour que la relation reste valable.

III } partie 5.1.

IV } Vers une nouvelle définition de l'unité de mesure.

$$\vec{E}_w I = \left| \frac{U_{\text{eff}}}{R} \vec{E}_w \right| = \frac{f \cdot B \cdot l \cdot g}{R} \cdot \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{f \cdot B \cdot l \cdot g}{R} \cdot \frac{B^2}{\mu_0}$$

2) On suppose que $|\vec{E}_w I|$ est proportionnel à la constante physique k . Une mesure connue permet donc d'accéder à une estimation de k précise.

3) À l'inverse, si on fixe la valeur de k , les mesures de f, B, l, g et R permettent d'accéder à $|\vec{E}_w I|$ et donc à $m \cdot g \cdot l \cdot g$: on est alors déterminée sans recours à un étalon matériel.

$$\pi \frac{d\vec{B}}{dt} = -2 \frac{d\vec{B}}{dt} + \frac{d\vec{B}}{dt} + \frac{d(m \cdot g \cdot l \cdot g)}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{B}}{dt} = 2 \frac{d\vec{B}}{dt} + \frac{d\vec{B}}{dt} + \frac{d(m \cdot g \cdot l \cdot g)}{dt}$$

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = 2 \frac{d\vec{B}}{dt} + \frac{d\vec{B}}{dt} + \frac{d(m \cdot g \cdot l \cdot g)}{dt}$$