

ENS de Paris Filière PC 2007

Physique des ferrofluides¹

Première partie

1. (a) $I = -e/T$ circule selon la direction $\mathbf{e}_\theta$ du mouvement.
 (b) $\mathbf{m} = IS\mathbf{u}_z = -\pi a^2/T \mathbf{e}_z$
 (c) $\mathbf{L} = m_e a v \mathbf{u}_z = 2\pi m_e a^2/T \mathbf{u}_z$ donc $\mathbf{m} = \gamma \mathbf{L}$ avec $\gamma = -\frac{e}{2m_e}$.
 (d) La constante de Planck h donne l'ordre de grandeur du moment cinétique atomique. Numériquement $\gamma = -8,8 \cdot 10^{10} \text{ C.kg}^{-1}$ et $m \approx 5,8 \cdot 10^{-23} \text{ A.m}^2$.
 (e) En admettant que l'aimantation du bloc résulte de la superposition des moments magnétiques de tous les atomes, on attend pour le moment magnétique massique la valeur $mN_a/56 \approx 0,6 \text{ A.m}^2.\text{g}^{-1}$. C'est bien l'ordre de grandeur fourni par l'énoncé, l'écart s'expliquant par l'estimation grossière de L et m .
2. (a) $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 m}{2\pi} \frac{a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}} \mathbf{u}_z$, cours de magnétostatique.
 (b) i. Dans l'expression fournie au début de l'énoncé, on passe de la description volumique à la description filiforme des courants en remplaçant $\mathbf{j}(\mathbf{r}')d^3V'$ par $I d\mathbf{r}'$ pour obtenir

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

ii. L'approximation dipolaire consiste à calculer le champ à des distances grandes devant la taille de la spire. Si $\mathbf{O}$ est à son voisinage cela signifie $r \gg r'$ ce qui permet l'approximation usuelle

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = [(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2]^{-1/2} \simeq \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right)$$

Comme $\oint d\mathbf{r}' = \mathbf{0}$ on obtient

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \simeq \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} d\mathbf{r}'$$

iii. En utilisation la relation suggérée,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \iint \mathbf{n} \times \mathbf{grad}_{\mathbf{r}'} \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} \right)$$

En coordonnées cartésiennes on vérifie aisément que : $\mathbf{grad}_{\mathbf{r}'} \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} \right) = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$. Donc

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \iint \mathbf{n} dS \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \wedge \mathbf{r}}{r^3}$$

iv.

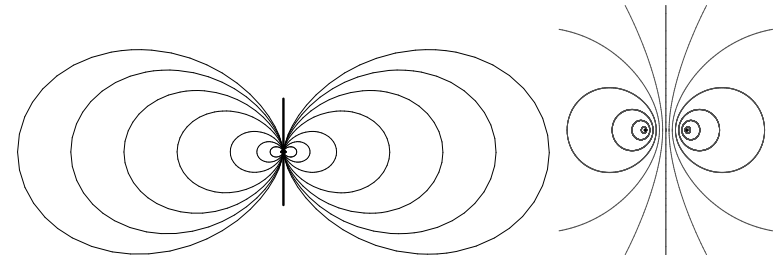
$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \mathbf{rot} \left(\frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \right) \right\} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r^3} \underbrace{\mathbf{rot}(\mathbf{m} \times \mathbf{r})}_{\text{facile en cartésiennes}} + \mathbf{grad} \left(\frac{1}{r^3} \right) \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) \right\} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r^3} 2\mathbf{m} - \frac{3\mathbf{u}_r}{r^4} \times ((\mathbf{m} \times \mathbf{r})) \right\} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \{ 3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{u}_r) \mathbf{u}_r - \mathbf{m} \} \quad \text{en développant le double produit vectoriel} \end{aligned}$$

v. Sur l'axe de la spire circulaire $\mathbf{u}_r = \pm \mathbf{u}_z$ et $r = |z|$ donc $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 m}{2\pi |z|^3} \mathbf{u}_z$ qui coïncide bien avec le résultat de la question 2.a dans la limite $|z| \gg a$.

vi. En sphériques

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \left(\frac{2 \cos \theta \mathbf{u}_r + \sin \theta \mathbf{u}_\theta}{r^3} \right)$$

Les lignes de champ sont dans les plans $\phi = \text{Cste}$ et $d\mathbf{l} = dr \mathbf{u}_r + r d\theta \mathbf{u}_\theta$. Leur équation s'écrit $\det(d\mathbf{l}, \mathbf{B}) = 0 \Rightarrow \sin \theta dr - 2r \cos \theta d\theta = 0 \Rightarrow r = A \sin^2 \theta$. On obtient des lignes de champ passant toutes par O pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ (figure de gauche). Elles correspondent bien à la réalité à grande distance de la spire, mais pas à son voisinage où on a l'allure représentée sur la figure de droite.



$$3. (a) d^3 \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d^3 \mathbf{m} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$$(b) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = +\mathbf{grad}_{\mathbf{r}'} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right)$$

¹. Solution proposée par A. Domsps et G. Requin. Merci de nous signaler les erreurs, énormes ou minimes, à l'adresse domps.andre@neuf.fr

(c)

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint d^3\mathbf{m} \times \mathbf{grad}_{\mathbf{r}'} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{rot} (d^3\mathbf{m}) - \mathbf{rot} \left(\frac{d^3\mathbf{m}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{rot} \mathbf{M}(\mathbf{r}') d^3V' + \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^2S'
\end{aligned}$$

On identifie à l'expression de $\mathbf{A}$ fournie au début du formulaire pour reconnaître $\mathbf{j}_v$ dans l'intégrale de volume et $\mathbf{j}_\sigma$ dans l'intégrale de surface :

$$\mathbf{j}_v(\mathbf{r}') = \mathbf{rot} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \quad \mathbf{j}_\sigma(\mathbf{r}') = \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{n}$$

(d) $\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1 = \mu_0 \mathbf{j}_s \times \mathbf{n}_{12}$ donne ici, en prenant 2 à l'extérieur et 1 à l'intérieur du milieu magnétique

$$\mathbf{B}_{\text{ext}} - \mathbf{B}_{\text{int}} = \mu_0 (\mathbf{M} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} = \mu_0 [(\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} - \mathbf{M}]$$

Il y a continuité de la composante normale de $\mathbf{B}$.

(e) D'après la question précédente $\mathbf{B}$ et $\mu_0 \mathbf{M}$ ont la même dimension donc χ est un nombre sans dimension.

Deuxième partie

1. (a) Le milieu ferromagnétique est soumis à $\mathbf{B}_{\text{int}}$ donc $\mathbf{M}_0 = \chi \mathbf{B}_{\text{int}} / \mu_0$. Or $\mathbf{M}_0 = \alpha \mathbf{B}_0 / \mu_0$. Donc $\chi \mathbf{B}_{\text{int}} = \alpha \mathbf{B}_0$ et $\mathbf{B}_{\text{int}} = \alpha \mathbf{B}_0 / \chi$.

(b) $\mathbf{m} = V \mathbf{M}_0 = \frac{4}{3} \pi a^3 \alpha \mathbf{B}_0 / \mu_0$. En reportant dans l'expression du champ dipolaire (question I.2.b.iv) :

$$\mathbf{B} = \frac{\alpha a^3}{r^3} \left[(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{u}_r) \mathbf{u}_r - \frac{1}{3} \mathbf{B}_0 \right]$$

(c) À l'extérieur de la boule règne la superposition du champ dipolaire et de $\mathbf{B}_0$, à l'intérieur règne $\mathbf{B}_{\text{int}} = \alpha \mathbf{B}_0 / \chi$. D'où la discontinuité

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(a^+) - \mathbf{B}(a^-) &= \alpha \left[(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{u}_r) \mathbf{u}_r - \frac{1}{3} \mathbf{B}_0 \right] + \mathbf{B}_0 - \alpha \frac{\mathbf{B}_0}{\chi} \\
&= \alpha (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{u}_r) \mathbf{u}_r + \left(1 - \frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha}{\chi} \right) \mathbf{B}_0
\end{aligned}$$

(d) Comme $\mathbf{M}_0$ est uniforme $\mathbf{j}_v = \mathbf{rot} \mathbf{M}_0 = \mathbf{0}$. Les courants surfaciques d'aimantation sont données par $\mathbf{j}_\sigma = \mathbf{M}_0 \times \mathbf{u}_r = \frac{\alpha}{\mu_0} \mathbf{B}_0 \times \mathbf{u}_r$. La discontinuité de $\mathbf{B}$ en $r = a$ vaut $\mu_0 \mathbf{j}_\sigma \times \mathbf{u}_r = -\alpha \mathbf{B}_0 + \alpha (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{B}_0) \mathbf{u}_r$. En identifiant à l'expression de la question précédente on obtient

$$1 - \frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha}{\chi} = -\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\chi}{1 - \frac{2}{3}\chi}$$

(e) Si la matière ferromagnétique n'était soumise qu'au champ appliqué $\mathbf{B}_0$ on aurait $\alpha = \chi$. Mais elle réagit à $\mathbf{B}_{\text{int}}$, superposition de $\mathbf{B}_0$ et du champ créé en son sein par les courants d'aimantation, dépendant eux même de la susceptibilité χ . Ainsi, $\mathbf{M} = \chi \mathbf{B}_{\text{int}} \neq \chi \mathbf{B}_0$ et $\alpha \neq \chi$. Pour de faibles susceptibilités l'effet des courants d'aimantation est négligeable et on s'attend à $\alpha \simeq \chi$. L'expression de la question précédente conduit bien à ce résultat quand $\chi \rightarrow 0$.

2. (a) Les moments magnétiques de toutes les gouttelettes sont orientés par $\mathbf{B}_0$. Deux dipôles parallèles à une même direction s'attirent de manière optimale si la droite joignant les points qu'il occupent est elle aussi parallèle à cette direction, ce qui explique la formation de chaînes.

$$\xrightarrow{\mathbf{m}_n} \quad \xrightarrow{\mathbf{m}_{n+1}}$$

La distance d'équilibre résulte de la compétition entre la répulsion électrostatique et l'attraction dipolaire magnétique. Plus B_0 est intense, plus les gouttelettes s'aimantent et plus l'attraction grandit, d'où une diminution de la distance entre gouttelettes.

(b) i. $\delta = nd(1 - \cos \phi)$

ii. Pour $\phi = \pi$, $\delta = 2nd$. On obtient un maximum de lumière diffusée lorsque $\delta = p\lambda$ avec $p \in \mathbb{N}$. En lisant sur le graphique les longueurs d'onde produisant un maximum et en posant $p = 1$, on en déduit les valeurs de $d = \lambda/(2n)$ suivantes

k	1	2	3	4	5	6
d (nm)	237	244	254	258	269	271

Conformément à la prédiction qualitative de la question a), d augmente lorsque B_0 diminue.

3. (a) i. L'énergie magnétique du dipôle $\mathbf{m}_n$ plongé dans le champ $\mathbf{B}_m$ créé par dipôle de rang m s'écrit

$$E_{nm} = -\mathbf{m}_n \cdot \mathbf{B}_m = -\frac{\mu_0}{4\pi r_{nm}^3} \mathbf{m}_n \cdot [3(\mathbf{m}_m \cdot \mathbf{u}_{nm}) \mathbf{u}_{nm} - \mathbf{m}_m]$$

Comme les deux dipôles sont alignés sur $\mathbf{B}_0$, $\mathbf{m}_n = \mathbf{m}_m = \frac{4}{3} \pi a^3 \alpha B_0 \mathbf{u}_z$ et

$$E_{nm} = \frac{\mu_0}{4\pi r_{nm}^3} \left(\frac{4}{3} \pi a^3 \alpha \frac{B_0}{\mu_0} \right)^2 [1 - 3(\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_{nm})^2]$$

L'énergie totale de la chaîne s'obtient en sommant E_{nm} sur toutes les paires de dipôles, ce qui donne bien l'expression proposée par l'énoncé avec

$$K = \frac{4\pi}{\mu_0} \left(\frac{a^3 \alpha B_0}{3} \right)^2$$

ii. Pour n donné, la majeure partie de la sommation de la série des $1/r_{nm}^3$ provient des termes pour lesquels r_{nm} est petit. Dans cette région la chaîne est presque rectiligne de sorte que $r_{nm} \simeq |m - n|d$ et $\mathbf{u}_{nm} \simeq \pm \mathbf{u}_{n,n+1} = \pm \mathbf{u}_n$. Les contributions des termes $m > n$ et $m < n$ s'avèrent identique :

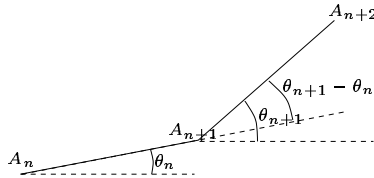
$$\begin{aligned} & \sum_{m \neq n} \frac{1}{r_{nm}^3} (1 - 3(\mathbf{u}_{nm} \cdot \mathbf{u}_z)^2) \\ & \simeq \sum_{m > n} \frac{1}{|n - m|^3 d^3} (1 - 3(\mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_z)^2) + \sum_{m < n} \frac{1}{|n - m|^3 d^3} (1 - 3(-\mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_z)^2) \\ & \simeq \frac{2}{d^3} (1 - 3 \cos^2 \theta_n) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^3} \quad (\text{i} = |m - n| \text{ varie « presque jusqu'à } \infty \text{ »}) \\ & \simeq 2 \frac{\zeta(3)}{d^3} (1 - 3 \cos^2 \theta_n) \end{aligned}$$

En sommant sur n on obtient finalement

$$E_{mag} = \zeta(3) \frac{2K}{d^3} \sum_{n=1}^{N-1} (1 - 3 \cos^2 \theta_n)$$

L'énoncé manque de clarté sur l'indexation des dipôles. S'étend-elle de 0 à $N - 1$ ou de 1 à N ? Cette ambiguïté rend les bornes de la sommation incertaines.

- (b) i. La différence $\theta_{n+1} - \theta_n$ représente l'angle entre les maillons $\mathbf{A}_{n+2}\mathbf{A}_{n+1}$ et $\mathbf{A}_n\mathbf{A}_{n+1}$ de la chaîne. L'énergie E_{el} augmente avec cet angle, elle correspond donc à une énergie potentielle associée à la courbure de la chaîne. Elle s'annule pour une chaîne rectiligne.



ii.

$$\frac{\partial E_{tot}}{\partial n} = 0 \Rightarrow 12\zeta(3) \frac{K}{d} \sin \theta_n \cos \theta_n + \kappa(2\theta_n - \theta_{n-1} - \theta_{n+1}) = 0$$

iii. Pour $n = 1$ et $n = N - 1$, θ_n n'apparaît que dans un seul terme de E_{el} . On obtient

$$\begin{aligned} 12\zeta(3) \frac{K}{d} \sin \theta_1 \cos \theta_1 - \kappa(\theta_2 - \theta_1) &= 0 \\ 12\zeta(3) \frac{K}{d} \sin \theta_{N-1} \cos \theta_{N-1} + \kappa(\theta_{N-1} - \theta_{N-2}) &= 0 \end{aligned}$$

iv. Le passage à la limite continue s'obtient par

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \theta}{ds^2} &\simeq \frac{\theta(s+d) + \theta(s-d) - 2\theta(s)}{d^2} = \frac{\theta_{n+1} + \theta_{n-1} - 2\theta_n}{d^2} \\ \theta'(0) &\simeq \frac{\theta_2 - \theta_1}{d} \quad \theta'(L) \simeq \frac{\theta_{N-1} - \theta_{N-2}}{d} \end{aligned}$$

Les équations des questions ii et iii deviennent

$$12\zeta(3) \frac{K}{d} \cos \theta \sin \theta - \kappa d^2 \frac{d^2 \theta}{ds^2} = 0 \quad (1)$$

$$12\zeta(3) \frac{K}{d} \cos \theta(0) \sin \theta(0) = \kappa d \theta'(0) \quad 12\zeta(3) \frac{K}{d} \cos \theta(L) \sin \theta(L) = -\kappa d \theta'(L) \quad (2)$$

v. La première équation de la question précédente, de la forme $M \frac{d^2 \theta}{ds^2} = F(\theta)$, présente une analogie formelle avec celle qu'on obtient en appliquant le principe fondamental de la dynamique pour un mouvement à une dimension : $M \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x)$, le temps prenant la place de l'abscisse curviligne.

vi. Inspiré par cette analogie, on obtient une intégrale première du mouvement en multipliant membre à membre par $\frac{d\theta}{ds}$. Après intégration :

$$\left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 + 12\zeta(3) \frac{K}{\kappa d^3} \cos^2 \theta = C_0 \quad Q = \frac{12\zeta(3)K}{\kappa d^3} \quad (3)$$

vii. La description de l'expérience dans le préambule de la question 3 indique que les extrémités des chaînes s'alignent sur le champ magnétique. Pour $x = 0$ et $x = L$ on a donc $\theta = \pi$ ou $\theta = 0$, ce que montrent d'ailleurs les images insérées dans la figure 3 où les longues chaînes prennent la forme d'une épingle à cheveux. Par les équations (2) on en déduit $\theta'(L) = \theta'(0) = 0$. Ces valeurs particulières reportées dans (3) fournissent $C_0 = Q$.

viii. Pour $\theta = \pi/2$, $\theta'_{max} = \sqrt{Q}$.

ix. $R = \frac{ds}{d\theta} = \frac{1}{\theta'}$, $C = 1/R = \theta'$. La courbure maximale vaut donc $C_{max} = \theta'_{max} = \sqrt{Q}$. Comme $K \propto B_0^2$ et $Q \propto K$, on attend $C_{max} \propto B_0$. C'est bien ce montrent les résultats de la figure 3 dans laquelle $d/R_{max} = dC_{max}$, représenté en fonction de B_0/μ_0 , fait apparaître une dépendance linéaire.

Troisième partie

1. (a) L'élément de surface d^2S est soumis à $P_- dS \mathbf{n}$ et $P_+ dS(-\mathbf{n})$ d'où la résultante des forces de pression sur σ' : $\mathbf{R}_p = \iint (P_- - P_+) dS \mathbf{n}$. La force de tension superficielle, orthogonale à $d\mathbf{l}$ et $\mathbf{n}$ vaut $d\mathbf{F} = \gamma d\mathbf{l} \times \mathbf{n}$ conduisant à la résultante $\mathbf{R}_\gamma = -\oint_C \mathbf{n} \times d\mathbf{l}$. En négligeant le poids de l'interface, la condition d'équilibre $\mathbf{R}_p + \mathbf{R}_\sigma = \mathbf{0}$ fournit l'équation (1) de l'énoncé.
- (b) i. La surface a pour équation $G(x, y, z) = z - h(x, y) = 0$. Son vecteur normal unitaire orienté vers les z croissants s'obtient par

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{grad} G}{\|\mathbf{grad} G\|} = \frac{-\frac{\partial h}{\partial x} \mathbf{u}_x - \frac{\partial h}{\partial y} \mathbf{u}_y + 1 \mathbf{u}_z}{\sqrt{(\partial_x h)^2 + (\partial_y h)^2 + 1}} \simeq -\frac{\partial h}{\partial x} \mathbf{u}_x - \frac{\partial h}{\partial y} \mathbf{u}_y + \mathbf{e}_z$$

ii. Projetée sur $\mathbf{u}_z$, la relation d'équilibre devient

$$\iint (P_+ - P_-) d^2S \underbrace{\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{n}}_{=1} + \gamma \oint \mathbf{u}_z \cdot (\mathbf{n} \times d\mathbf{l}) = 0$$

Transformons le second terme :

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{u}_z \cdot (\mathbf{n} \times d\mathbf{l}) &= \oint d\mathbf{l} \cdot (\mathbf{u}_z \times \mathbf{n}) \\ &= \iint \mathbf{rot} (\mathbf{u}_z \times \mathbf{n}) dS \mathbf{n} \\ &= \iint \mathbf{rot} (+\partial_y h \mathbf{u}_x - \partial_x h \mathbf{u}_y) dS \mathbf{n} \\ &= \iint (-\partial_{x^2} h - \partial_{y^2} h) \underbrace{\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{n}}_{=1} dS \quad (\text{calcul en cartésiennes}) \end{aligned}$$

Finalement la relation d'équilibre s'écrit

$$\iint_{\sigma'} (P_+ - P_-) d^2S - \gamma \iint_{\sigma'} \Delta h dS = 0$$

L'identité ayant lieu pour tout σ' , il en résulte

$$P_+ - P_- = \gamma \Delta h$$

2. (a) L'énoncé attend visiblement un argument portant sur les symétries ou invariances pour montrer que $B_y = 0$, mais je ne vois pas lequel. Si on conserve B_y , les conditions de passage exploitées plus loin (question 2.d) montrent que cette composante est indépendante de B_0 et de la déformation de l'interface. On peut la supposer nulle.

- (b) $\mathbf{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_v = \mu_0 \mathbf{rot} \mathbf{M} = \chi \mathbf{rot} \mathbf{B} \Rightarrow (1 - \chi) \mathbf{rot} \mathbf{B} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{rot} \mathbf{B} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{rot} (\mathbf{rot} \mathbf{B}) = \mathbf{0} \rightarrow \underbrace{\mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{B}}_{=0} - \Delta \mathbf{B} = \mathbf{0}$ donc $\Delta \mathbf{B} = \mathbf{0}$.

$\Delta B_x = 0 \rightarrow b_x''(z) - k^2 b_x(z) = 0$, équation différentielle à résoudre dans chacun des domaines $] -\infty, h[$ et $]h, +\infty[$. Solutions de la forme $b_x = \alpha \exp(-kz) + \beta \exp(kz)$. Pour $x > h$, la nécessité d'obtenir B_x borné quand $x \rightarrow \infty$ impose $\beta = 0$, on note $\alpha = b_x^+$. De même pour $x < h$, la limite $x \rightarrow -\infty$ impose $\alpha = 0$, on note $\beta = b_x^-$. On procède de manière identique pour B_z pour obtenir

$$z > h : \quad b_x(z) = b_x^+ \exp(-kz) \quad b_z(z) = b_z^+ \exp(-kz)$$

$$z < -h : \quad b_x(z) = b_x^- \exp(kz) \quad b_z(z) = b_z^- \exp(kz)$$

- (c) $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ conduit à $b_z^+ = j b_x^+$ et $b_z^- = -j b_x^-$.
- (d) Séparons la condition de passage à l'interface (question I.3.d) en composantes normales et composantes tangentielles :

$$\mathbf{B}(h^+) \cdot \mathbf{n} - \mathbf{B}(h^-) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (4)$$

$$[\mathbf{B}(h^+) - \mathbf{B}(h^-)] \times \mathbf{n} = -\mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{n} \quad (5)$$

En notation réelle $\mathbf{n}$ a pour composantes $n_x = k h_0 \sin(kx - \omega t)$, $n_y = 0$ et $n_z = 1$; n_x est un terme d'ordre 1 en $k h_0$. Dans le champ magnétique, les termes en b_x , b_y et b_z sont des conséquences de la déformation de l'interface. Ils tendent vers 0 si $h_0 \rightarrow 0$. Nous les traitons aussi comme des termes d'ordre 1.

La condition (4) s'écrit

$$\underbrace{n_x B_x(h^+)}_{\text{ordre 2}} + B_z(h^+) = \underbrace{n_x B_x(h^-)}_{\text{ordre 2}} + B_z(h^-) \Rightarrow B_z(h^+) = B_z(h^-) \Rightarrow b_z^+ = b_z^- \quad (6)$$

Pour exprimer (5) détaillons les composantes cartésiennes de $[\mathbf{B}(h^+) - \mathbf{B}(h^-)] \times \mathbf{n}$ et de $\mathbf{M} \times \mathbf{n}$.

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} B_x(h^+) - B_x(h^-) \\ 0 \\ B_z(h^+) - B_z(h^-) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} n_x \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \left[-(B_x(h^+) - B_x(h^-)) + \underbrace{n_x (B_z(h^+) - B_z(h^-))}_{\text{ordre 2}} \right] \mathbf{u}_y \quad (7) \end{aligned}$$

$$\mathbf{M} \times \mathbf{n} = \frac{\chi}{\mu_0} \mathbf{B}(h^-) \times \mathbf{n} = \frac{\chi}{\mu_0} \left[-B_x(h^-) + n_x \underbrace{B_z(h^-)}_{=B_0 + \text{ordre } 1} \right] \mathbf{u}_y \simeq \frac{\chi}{\mu_0} [B_x(h^-) - n_x B_0] \mathbf{u}_y$$

La condition de passage (5) s'écrit donc à l'ordre 1 :

$$B_x(h^+) - B_x(h^-) = -\chi [B_x(h^-) - n_x B_0] \Rightarrow b_x^+ - b_x^- = -\chi (b_x^- + jkh_0 B_0) \quad (8)$$

en utilisant $n_x = -ikh_0 \exp[i(kx - \omega t)]$.

En résolvant (6), (8) et les deux équations de la question (c) on obtient

$$b_x^- = -b_x^+ = \frac{j\chi kh_0 B_0}{2 - \chi} \quad b_z^+ = b_z^- = \frac{\chi kh_0 B_0}{2 - \chi}$$

(e)

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \frac{\chi}{\mu_0} [(\mathbf{B}_0 + \mathbf{b}) \cdot \nabla] (\mathbf{B}_0 + \mathbf{b}) \\ &\simeq \frac{\chi}{\mu_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{b} \quad \text{à l'ordre 1} \\ &\simeq \frac{\chi}{\mu_0} B_0 \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial z} \\ &\simeq \frac{\chi B_0}{\mu_0} [b_x^- k \mathbf{u}_x + b_z^- k \mathbf{u}_z] e^{kz + jkx - j\omega t} \quad \text{avec } b_z^- = -jb_x^- \\ &\simeq \frac{\chi B_0}{\mu_0} b_x^- [k \mathbf{u}_x - jk \mathbf{u}_z] e^{kz + jkx - j\omega t} \\ &\simeq \frac{\chi^2 B_0^2}{\mu_0 (2 - \chi)} kh_0 [j k \mathbf{u}_x + k \mathbf{u}_z] e^{kz + jkx - j\omega t} \\ &\simeq \frac{\chi^2 B_0^2}{\mu_0 (2 - \chi)} kh_0 \mathbf{grad} (e^{kz + jkx - j\omega t}) \simeq -\mathbf{grad} U \end{aligned}$$

(a) Quand le liquide est au repos, il n'est soumis qu'à son poids et aux forces de pression car U s'annule. On retrouve la statique des liquides usuelles $P_{st} = P_0 + \rho g z$

(b) Écoulement irrotationnel $\mathbf{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0}$ donc il existe un potentiel ϕ tel que $\mathbf{v} = \mathbf{grad} \phi$.

(c) À la surface de côte $z = h(x, t)$, v_z s'identifie à la dérivée lagrangienne de h :

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(h(x, t), t) = \frac{Dh}{Dt}$$

Avec l'hypothèse $h_0 \ll \lambda = 2\pi/k$, on montre² que cette condition s'écrit approximativement

$$\frac{\partial \phi(0)}{\partial z} \simeq \frac{\partial h}{\partial t}$$

(d) Écoulement incompressible $\text{div} \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \Delta \phi = 0$

(e) En reportant la forme proposée pour ϕ dans l'équation de Laplace on obtient $f''(z) - k^2 f(z) = 0 \Rightarrow f(z) = \alpha \exp(kz) + \beta \exp(-kz)$. Le comportement en $z \rightarrow -\infty$ impose $\beta = 0$. La condition écrite en (c) fournit $\alpha = -i\omega h_0/k$ et

$$f(z) = -\frac{i\omega h_0}{k} \exp(kz)$$

(f)

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \underbrace{\mathbf{grad} v^2}_{\text{ordre 2}} - \mathbf{v} \times \underbrace{\mathbf{rot} \mathbf{v}}_0 \right) &= -\mathbf{grad} P + \rho \mathbf{g} - \mathbf{grad} U \\ \mathbf{grad} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{P + U}{\rho} + gz \right) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

La quantité $\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{P + U}{\rho} + gz$ est uniforme, elle ne dépend que de t et on la note $F(t)$.

(g) On exprime $F(t)$ à la surface du liquide. Détaillons chaque terme :

- $gz = gh_0 e^{j(kx - \omega t)}$
- D'après 1), $P = P^- = P_0 - \gamma \partial_{x^2} h = P_0 + \gamma h_0 k^2 e^{j(kx - \omega t)}$,
- Comme U est proportionnel à kh_0 , on peut à l'ordre 1 y remplacer $\exp(kz) = \exp(kh)$ par 1 donc $U \simeq \frac{-\chi^2 B_0^2}{\mu_0 (2 - \chi)} kh_0 e^{j(kx - \omega t)}$.
- $\frac{\partial \phi}{\partial t} = -j\omega \phi = -\frac{\omega^2 h_0}{k} e^{j(kx - \omega t)}$

D'où

$$\left(-\frac{\omega^2 h_0}{k} + \frac{\gamma h_0 k^2}{\rho} - \frac{B_0^2 \chi^2 kh_0}{\rho \mu_0 (2 - \chi)} + gh_0 \right) e^{j(kx - \omega t)} = F(t) - P_0/\rho$$

2. voir par exemple le corrigé du problème X/Cachan PSI 2006 sur les ondes de gravité

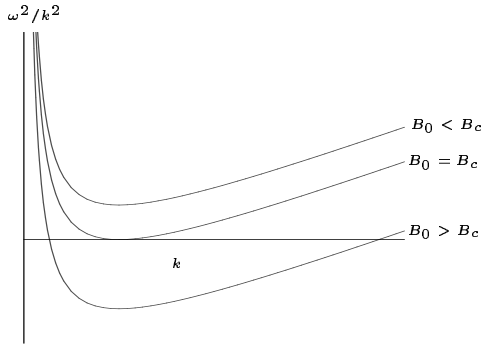
Le membre de gauche est une fonction sinusoïdale de x , le membre de droite ne dépend pas de x . Ils ne peuvent être égaux qu'en cas de nullité, d'où la relation de dispersion

$$\omega^2 = gk + \gamma \frac{k^3}{\rho} - \frac{\chi^2}{(2-\chi)\rho\mu_0} B_0^2 k^2 = 0$$

On identifie $A = \frac{\chi^2}{(2-\chi)\rho\mu_0}$.

- (h) i. Il apparaît une instabilité si $\omega^2 < 0$. Dans ce cas en effet ω est imaginaire pur et la dépendance en $\exp(i\omega t)$ peut être exponentiellement croissante. Le tracé et l'étude de $f(k) = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{g}{k} + \frac{\gamma}{\rho} k - AB_0^2$ montrent que cette fonction atteint sa valeur minimale $f_{min} = 2\sqrt{\gamma g/\rho} - AB_0^2$ pour $k = k_c = \sqrt{\rho g/\gamma}$. L'instabilité apparaît si $f_{min} < 0$ soit

$$B_0^2 > B_c^2 = \frac{2}{A} \sqrt{\frac{\gamma g}{\rho}}$$



- ii. La longueur d'onde de l'instabilité naissante est $\lambda_c = 2\pi/k_c = 2\pi\sqrt{\gamma/(\rho g)}$.
iii. $\lambda_c = 1,03$ cm en bon accord avec la valeur mesurée.

- (i) i. $h = h_0 \exp[j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$
ii. $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{v}t$ et $h'(\mathbf{r}', t') = h_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}' + \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}t - \omega t)]$ de pulsation $\omega' = \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$. Ce changement de pulsation associé au changement de référentiel est appelé effet Doppler.
iii. Le sillage étant stationnaire dans le référentiel de l'objet, $\omega' = 0$.
iv. $\omega' = 0 \Rightarrow \omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \Rightarrow \omega^2 \leq k^2 v^2$ ou $\omega^2/k^2 \leq v^2$. On a vu dans la question (h).i que ω^2/k^2 atteint le minimum f_{min} . Le sillage ne sera émis que si $v^2 > f_{min}$ soit

$$v > v_c = \sqrt{f_{min}} = \sqrt{2\sqrt{\frac{\gamma g}{\rho}} - AB_0^2} = \sqrt{AB_c^2 - AB_0^2} \quad .$$

v.

$$\frac{v_c(B_0)}{v_c(0)} = \frac{\sqrt{AB_c^2 - AB_0^2}}{\sqrt{AB_c^2}} = \sqrt{1 - \frac{B_0^2}{B_c^2}}$$

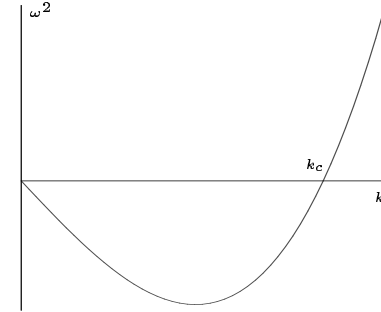
Le tracé de $(v_c(B_0)/v_c(0))^2$ en fonction de B_0^2/B_c^2 doit faire apparaître une droite de pente -1 et d'ordonnée à l'origine égale à 1. C'est bien ce qu'on constate sur les résultats expérimentaux de la figure 6.

vi. A. $Re = U d \rho / \eta \approx 0,1 \times 400 \cdot 10^{-6} \times 1000 / 10^{-3} = 40$. Pour l'écoulement autour d'une sphère, on sait que de telles valeurs de Re correspondent à un écoulement laminaire et une traînée linéaire en vitesse. Il en est de même pour l'écoulement autour du fil utilisé dans l'expérience.

B. $V_c(0) = \sqrt{2\sqrt{\gamma g/\rho}} = 0,23 \text{ m.s}^{-1}$ correspond assez bien aux valeurs à partir desquelles le comportement linéaire cesse sur la figure 7.

C. Quand le sous-marin se déplace en surface, il se forme un bourrelet d'eau autour de lui. Sa proue doit en permanence franchir cette « vague » qui gêne le mouvement. En plongée cet effet disparaît.

- (j) i. Pour inverser le haut et le bas il suffit de changer g en $-g$ donc $\omega^2 = -gk + \gamma k^3/\rho$.
ii. Les petites valeurs de k sont associées à des valeurs négatives de ω^2 donc provoquent une instabilité de l'interface.



iii. En $x = 0$ et $x = L$, $v_x = 0 \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$.

iv. Les réflexions aux deux extrémités conduisent à chercher ϕ sous la forme $\phi = f(z) \exp(ikx - i\omega t) + g(z) \exp(-ikx - i\omega t)$. Les conditions de bord mènent à $f = g$ et $k = p\pi/L$. L'interface redevient stable si toutes les valeurs accessibles à k correspondent à $\omega^2 > 0$ c'est à dire: $\forall p, p\pi/L > k_c$. La condition la plus stricte s'obtient pour $p = 1$ et s'écrit $L < L_c = \pi/k_c$. Dans l'eau $L_c = 0,5$ cm. Par capillarité, l'eau peut se maintenir au dessus l'air entre deux parois solides suffisamment rapprochées.