

Corrigé de l'épreuve de Physique II, filière MP de Mines-Ponts 2007

Francis BROUCHIER

25 avril 2007

GRATTE-CIELS et TOURS

1 Mise en équation

[1] L'ensemble tour-TMD est soumis à la force extérieure $f_0(t)$ portée par l'axe des x . Tous les mouvements se font sur cet axe. La dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement du système vaut $m\ddot{x} + m_1(\ddot{x} + \ddot{u})$ dans le référentiel de la Terre supposé galiléen. La force extérieure de rappel appliquée au système vaut $-kx$. La relation fondamentale de la dynamique en projection sur l'axe des x s'écrit donc :

$$m\ddot{x} + m_1[\ddot{x} + \ddot{u}] = -kx + f_0(t)$$

pour le TMD on peut écrire :

$$m_1(\ddot{x} + \ddot{u}) = -k_1u - h_1\dot{u}$$

Pour la première équation on fait passer le terme $-kx$ dans le premier membre et on divise le tout par m . Il suffit de poser $\alpha = m_1/m$, $k/m = \omega_0^2$ et $a_0(t) = f_0(t)/m$ pour obtenir l'équation (B1).

De même dans la seconde équation on divise par m_1 et on pose $k_1/m_1 = \omega_1^2$ et $h_1/m_1 = 2\eta_1\omega_1$.

ω_0 est la pulsation propre de résonance de la tour seule et ω_1 est la pulsation propre de résonance du TMD seul.

[2] L'amplitude complexe est une fonctionnelle linéaire définie sur l'ensemble des fonctions sinusoïdales de pulsation ω qui transforme les équations différentielles du temps en équations algébriques. La dérivation par rapport au temps revient à une multiplication par $i\omega$.

Les équations (B1) et (B2) deviennent alors :

$$(1 + \alpha)(i\omega)^2 \underline{X} + \alpha(i\omega)^2 \underline{U} + \omega_0^2 \underline{X} = \underline{A}_0$$

$$(i\omega)^2 \underline{X} + (i\omega)^2 \underline{U} + 2\eta_1\omega_1(i\omega) \underline{U} + \omega_1^2 \underline{U} = 0$$

La seconde équation donne une relation entre $\underline{U}$ et $\underline{X}$:

$$\underline{U}(-\omega^2 + 2\eta_1\omega_1 + \omega_1^2) = \omega^2 \underline{X}$$

On divise le deux membres par ω_0 pour introduire les coefficients β et z , il vient :

$$\underline{U}(-z^2 + 2i\eta_1\beta z + \beta^2) = z^2 \underline{X}$$

On a ainsi la fonction de transfert en amplitude complexe :

$$\underline{H}_1(z) = \frac{\underline{U}}{\underline{X}} = \frac{z^2}{-z^2 + 2i\eta_1\beta z + \beta^2}$$

Quand $z \rightarrow 0$ alors $\underline{H}_1 \rightarrow 0$; quand $z \rightarrow \infty$ alors $\underline{H}_1 \rightarrow -1$ le système est un filtre passe-haut du second ordre. Comme on cherche à minimiser le déplacement de la Tour $|\underline{X}|$ le dénominateur de $|\underline{H}_1|$ doit être aussi petit que possible pour un $|\underline{U}|$ donné il faut donc $|\underline{H}_1|$ plutôt grand.

3 Si $b = \ddot{x}$ alors $\underline{B} = -\omega^2 \underline{X}$; la première équation en amplitude complexe permet d'écrire :

$$-\omega^2 \underline{X}(1 + \alpha) - \alpha\omega^2 \underline{U} + \omega_0^2 \underline{X} = \underline{A}_0$$

Comme $\underline{U} = \underline{H}_1 \underline{X}$ il vient :

$$\underline{B}(1 + \alpha + \alpha \underline{H}_1 - \omega_0^2/\omega^2) = \underline{A}_0$$

On en tire la valeur demandée :

$$\underline{H}_2 = \frac{\underline{B}}{\underline{A}_0} = \frac{z^2}{(1 + \alpha + \alpha \underline{H}_1)z^2 - 1}$$

On cherche à minimiser l'accélération ressentie par les habitants de la Tour, il faut donc $|\underline{B}|$ petit et donc $|\underline{H}_1|$ plutôt petit.

2 Analyse qualitative du système

2.1 Cas où $\eta_1 = 0$

4 Dans les équations précédentes on supprime le terme en η_1 et le terme en $\underline{A}_0$, le système $[B]$ s'écrit donc :

$$(1 + \alpha)\ddot{x} + \alpha\ddot{u} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\ddot{x} + \ddot{u} + \omega_1^2 u = 0$$

En passant en amplitude complexe on trouve :

$$\underline{H}_1(z) = \frac{z^2}{z^2 - \beta^2} \quad \underline{H}_2(z) = \frac{z^2(z^2 - \beta^2)}{[(1 + \alpha)(z^2 - \beta^2) + \alpha z^2]z^2 - (z^2 - \beta^2)}$$

On désire $|\underline{H}_2|$ aussi petit que possible, α est au dénominateur de $\underline{H}_2$, il faut donc prendre α aussi grand que possible. Mais α est le rapport de la masse du TMD et de la masse de la Tour on ne peut donc pas l'augmenter indéfiniment sans quoi la Tour s'effondrerait.

- $\alpha \rightarrow 0$

[5] La masse du TMD devient nulle. En supposant que la raideur de sa suspension reste finie la pulsation propre du TMD tend vers l'infini ainsi que β . A la limite on peut écrire :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \ddot{x} + \ddot{u} \rightarrow \infty$$

Le TMD n'plus d'action sur le mouvement de la Tour qui oscille sur sa pulsation propre. En revanche si on suppose que β n'est pas totalement infini on peut écrire la fonction de transfert $\underline{H}_1 \rightarrow z^2/(z^2 - \beta^2)$. Pour $z < \beta$ $\underline{H}_1 < 0$ le mouvement du TMD est en opposition de phase avec celui de la Tour. Pour $z > \beta$ le mouvement du THD est en phase.

[6] Le paramètre h_1 permet de limiter les mouvements de la Tour et du TMD en absorbant sous forme de chaleur l'énergie mécanique produite par le TMD. C'est pour cette raison que les derniers étages des gratte-ciels récents sont à claire voie pour permettre la dissipation de cette chaleur qui se produit fort heureusement quand il y a du vent.

- $\alpha \rightarrow \infty$

[7] En supposant toujours que la raideur de la suspension du TMD reste finie quand la masse de celui-ci tend vers l'infini sa pulsation propre tend vers 0 ainsi que β . Des relations précédentes on tire :

$$\underline{H}_1 \rightarrow -1 \quad \underline{H}_2 \rightarrow 0$$

La Tour ne bouge pas mais elle s'est écroulée sous le poids du TMD.

- *Cas général pour α*

[8] On est toujours dans le cas $\eta_1 = 0$, la fonction de transfert $\underline{H}_1$ a pour valeur : $\underline{H}_1 = z^2/(\beta^2 - z^2)$. Elle tend vers l'infini pour $z_{AR} = \beta$. $\underline{H}_1$ étant au dénominateur de $\underline{H}_2$, cette dernière tend alors vers 0.

[9] Exprimons le gain G_2 à partir des relations précédentes :

$$G_2 = |\underline{H}_2| = \left| \frac{z^2(\beta^2 - z^2)}{[(1 + \alpha)(\beta^2 - z^2) + \alpha z^2]z^2 - (\beta^2 - z^2)} \right|$$

$G_2 \rightarrow \infty$ quand le dénominateur est nul. Après simplification par αz^2 dans le crochet il reste :

$$[(1 + \alpha)\beta^2 + 1]z^2 - z^4 - \beta^2 = 0$$

C'est une équation bicarrée en $Z = z^2$ que l'on écrit :

$$Z^2 - [(1 + \alpha)\beta^2 + 1]Z + \beta^2 = 0$$

Le discriminant de cette équation du second degré est :

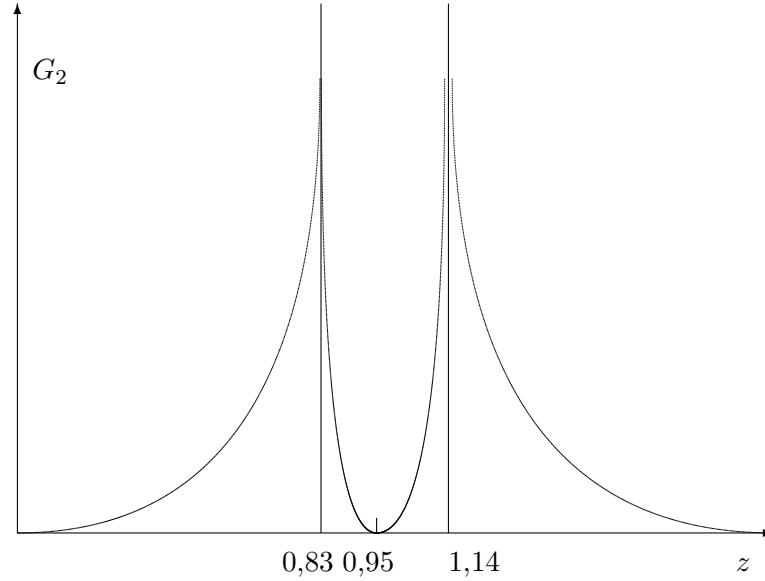
$$\Delta = [(1 + \alpha)\beta^2 + 1]^2 - 4\beta^2$$

. Si $\alpha = 0$ il reste $(\beta^2 + 1)^2 - 4\beta^2 = (\beta^2 - 1)^2 > 0$, donc pour $\alpha > 0$ le discriminant de l'équation précédente est positif et il y a deux racines. De plus le produit des racines est positif ainsi que leur somme, il y a donc deux racines positives dont on pourra extraire la racine carrée pour obtenir z . De la sorte le produit :

$$z_{R1} \cdot z_{R2} = \sqrt{Z_{R1} \cdot Z_{R2}} = \beta = z_{AR}$$

On a donc bien l'inégalité : $z_{R1} < z_{AR} < z_{R2}$

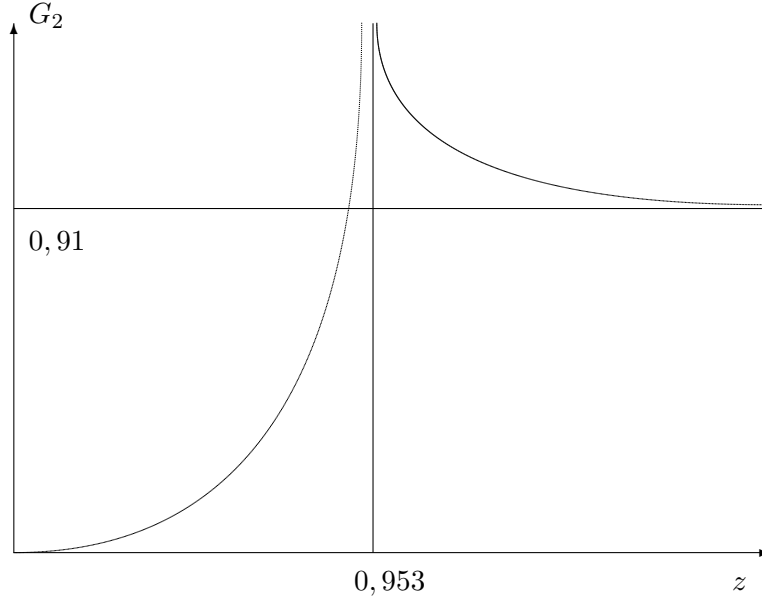
Application numérique : avec les valeurs de l'énoncé on trouve $z_{R1} \sim 0,83$ $z_{R2} \sim 1,14$. Pour ces deux valeurs G_2 devient infini, alors que pour $z_{AR} = \beta$ il est nul (H_1 infini). La courbe a l'allure suivante :



2.2 Cas où η_1 est infini

10 Quand $\eta_1 \rightarrow \infty$ $\underline{H}_1(z) \rightarrow z/2i\eta_1\beta$. Dans ce cas $\underline{H}_2(z) \rightarrow z^2/[(1 + \alpha)z^2 - 1]$, G_2 est alors infini quand le dénominateur est nul soit pour $z_\infty = 1/\sqrt{1 + \alpha} = 0,953$.

Avec cette expression pour $z = 0$ $G_2(z) = 0$ puis quand $z \rightarrow \infty$ $G_2(z) \rightarrow 1/(1 + \alpha) \sim 0,91$. on peut tracer la courbe suivante :



2.3 Cas où η_1 est quelconque

[11] $z_{AR} = \beta$ $z_{\infty} = 1/\sqrt{1+\alpha}$. Si $z_{AR} = z_{\infty}$ alors $|H_1|$ et G_2 sont infinis en même temps soit $|X|$ minimal pour la même valeur de z .

La masse m de la Tour et sa raideur k sont fixées par construction, la masse m_1 du TMD ne peut être trop grande pour ne pas modifier la structure de la Tour, on ne peut donc jouer que sur les valeurs de k_1 et h_1 .

3 Choix des paramètres

[12] Explicitons la valeur de G_2 même si elle est un peu compliquée :

$$G_2 = \frac{z^2}{\sqrt{[(1+\alpha)z^2 - 1]^2 + \frac{4\alpha^2 z^2}{\eta_1^2 \beta^2}}}$$

On peut chercher la valeur de G_2 pour une valeur particulière de z . Prenons $z = \beta$, avec $\beta^2(1+\alpha) = 1$ on obtient :

$$G_2(\beta) = \frac{\beta^2}{2\alpha} \cdot \eta_1$$

Comme $\beta \sim 1$ la courbe A correspond à $\eta_1 = 0,1$, la courbe B à $\eta_1 = 0,3$ et la courbe C à $\eta_1 = 0,6$.

[13] On peut considérer que le gain est une fonction de deux variables $G_2(z, \eta_1)$. Si en faisant varier η_1 on veut que G_2 ne varie pas il faut que la dérivée partielle de G_2 par rapport à η_1 soit nulle : $\partial G_2 / \partial \eta_1 = 0$.

L'équation donnant z_A et z_B est encore une équation bicarrée. On pose $Z = z^2$ l'équation devient : $(1 + 1/\beta^2)Z^2 - 4Z + 2\beta^2 = 0$. Le discriminant réduit s'écrit donc (on aura tout eu !) : $\Delta' = 4 - 2\beta^2(1 + 1/\beta^2) = 4 - 2\beta^2 - 2 = 2(1 - \beta^2)$ Compte tenu du choix de $\beta = 1/\sqrt{1 + \alpha}$ avec $\alpha > 0$ $\beta < 1$. Le discriminant de l'équation est donc positif et il y a deux racines positives (produit positif, somme positive), d'où les valeurs demandées :

$$z_A = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2(1 - \beta^2)}}{1 + 1/\beta^2}} \quad z_B = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2(1 - \beta^2)}}{1 + 1/\beta^2}}$$

[14] Si on admet comme critère de choix que seul le module de l'accélération ressentie par les occupants de la Tour intervient indépendamment de la fréquence il faut prendre la courbe qui présente les deux maxima aussi égaux que possible, ce qui n'est pas tout à fait le cas de la courbe en pointillés ($\eta_{opt} = 0,185$). La courbe qui dans sa partie centrale est juste au dessus de la courbe en pointillés conviendrait mieux. L'énoncé étant peu clair sur la question on peut enlever la courbe en trait gras de l'intervalle indiqué de sorte que la courbe choisie serait celle pour $\eta_1 = 0,19$. La courbe en pointillés serait bien entre 0,18 et 0,19.

4 Quelques considération numériques

[15] Il faut chercher la relation entre $u(t)$ et $a_0(t)$ fonctions sinusoïdales du temps. En amplitudes complexes :

$$\frac{\underline{U}}{\underline{X}} = \underline{H_1} \quad \underline{H_2} = \frac{-\omega^2 \underline{X}}{\underline{A_0}} \quad \underline{H_1} \cdot \underline{H_2} = \frac{-\omega^2 \underline{U}}{\underline{A_0}}$$

Pour le calcul la valeur numérique de z est de $\beta = 1/\sqrt{1 + \alpha}$. En remplaçant par cette valeur dans les expressions de $\underline{H_1}$ et $\underline{H_2}$ il vient :

$$\underline{H_1} = \frac{1}{2i\eta_1} \quad \underline{H_2} = \frac{\beta^2}{(1/\beta^2 + \alpha \frac{1}{2i\eta_1} \beta^2 - 1)}$$

En faisant le produit des deux il vient après simplification : $\underline{H_1} \cdot \underline{H_2} = 1/\alpha$.

Par ailleurs $\omega_1 = \beta\omega_0$, ce qui donne :

$$\underline{U} = -\underline{A_0}/\alpha\beta^2\omega_0^2 = -\underline{A_0}T_0^2/4\pi^2\alpha\beta^2$$

A moins de un pour cent près on peut écrire $u(t) = -10.a_0.\cos(\omega_1 t)$ soit $u_{max} = 10a_0$.

[16] La valeur maximale de l'accélération de la Tour est de $b_{max} = 0,015 * 9,81 = 0,147 \text{ m.s}^{-2}$. on a aussi $b_{max} = |\underline{H_2}|_{max} \cdot A_0$. Si on prend la courbe pour $\eta_1 = 0,2$ on lit la valeur maximale $G_{2max} = 4,4$ et donc $A_0 \leq 0,147/4,4 = 0,033 \text{ m.s}^{-2}$.

Si on prend $z \sim 0,88$ alors $\omega = 0,88.2\pi/T_0 = 0,92$. L'amplitude maximale vaut $x_{max} = \omega^2 b_{max} = 0,85.0,015 = 0,013 \text{ m}$.

Pour le TMD on prend la valeur de

$$|\underline{H_1}| = \frac{z^2}{\sqrt{(\beta^2 - z^2)^2 + 4\eta_1^2 \beta^2 z^2}}$$

Tous calculs faits on trouve $|\underline{H_1}| = 2,14 = u_{max}/x_{max}$ et $u_{max} = 0,028 \text{ m}$

En l'absence de TMD l'équation différentielle du mouvement de la Tour s'écrit pour un mouvement sinusoïdal $(-\omega^2 + \omega_0^2)x = A_0 \cos(\omega t)$ d'où on tire $x_{max} = A_0/\omega_0^2(1 - z^2) = 0,134 \text{ m}$. On gagne, en gros, un facteur 10 avec le LMD.

17 Avec les valeurs numériques de l'énoncé

$$\alpha = 0,014 \quad \beta = 0,993 \quad T_1^2 = T_0^2/0,993^2 = 4\pi^2 l/g$$

Tous calculs faits on trouve $l = 9,07 \text{ m}$.

L'accélération maximale de la Tour est la moitié de la valeur sans TMD soit $0,015 \text{ m.s}^{-2}$ et on a $x_{max} = b_{max}/\omega_1^2 = 0,0139 \text{ m}$. Même ordre de grandeur que précédemment.

5 Limites du modèle : autres résultats expérimentaux

18 Le mouvement de la Tour n'est plus sinusoïdal pur, il est sinusoïdal amorti de la forme $x = X_0.e^{-\lambda t} \cos(\omega t)$.

L'équation différentielle du mouvement de la Tour s'écrit $m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = 0$. L'équation en r est de la forme $r^2 + hr/m + \omega_0^2 = 0$ dont les racines sont de la forme $r = \frac{-h/m \pm \sqrt{(h/m)^2 - 4\omega_0^2}}{2}$. En supposant h/m suffisamment petit devant ω_0^2 on peut écrire $r = -h/2m \pm i\omega_0$. Ainsi $x = X_0.e^{-ht/2m} \cos(\omega_0 t)$. A l'instant $t = 0$ l'énergie mécanique est proportionnelle au carré de l'amplitude X_0^2 . Une période plus tard l'amplitude n'est plus que $X_0.e^{-hT_0/2m}$, la variation relative d'énergie vaut donc $1 - e^{-hT_0/m} = 0,02$. Avec $T_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$ $hT_0/m = 2\pi h/\sqrt{km} = 4\pi\eta$ et on a $0,98 = e^{-4\pi\eta}$ d'où l'on tire

$$\eta = -\ln(0,98)/4\pi = 1,60$$

19 On dispose d'un accéléromètre précis à moins de 1% près et on provoque un choc rapide au sommet de la Tour en projetant une masse convenable et en prévoyant son point de chute. L'étude de l'accélération ultérieure permet de déterminer T_0 et η , d'où le taux de dissipation.

6 Comportement fréquentiel du TMD : analogie électrique

20 En revenant au domaine des pulsations on peut écrire la fonction de transfert $\underline{H}_1 = \underline{U}/\underline{X}$ sous la forme :

$$\underline{H}_1 = \frac{\omega^2}{\beta^2\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\eta_1\beta\omega}$$

$$G_1(\omega) = |\underline{H}_1| = \frac{\omega^2}{\sqrt{(\beta^2\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\eta_1^2\beta^2\omega^2}}$$

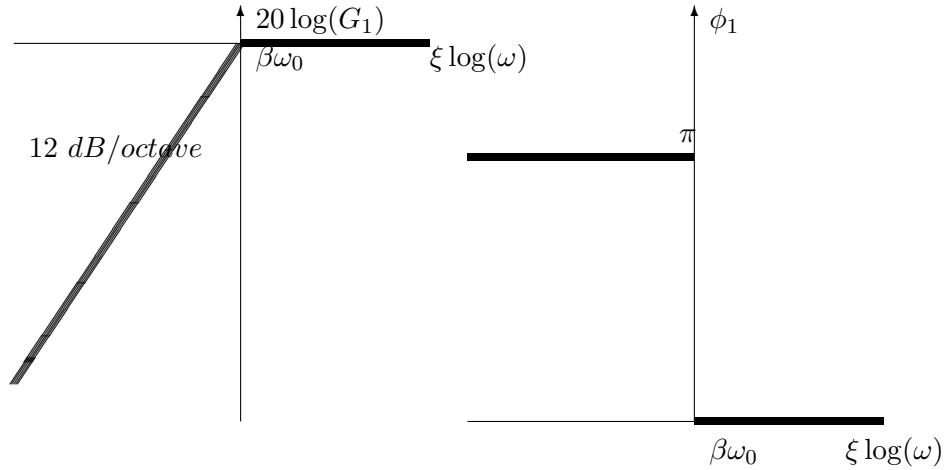
$$\tan(\phi_1) = \frac{2\eta_1\beta\omega}{\omega^2 - \beta^2\omega_0^2}$$

$$\omega \rightarrow 0 \quad G_1 \rightarrow 0 \quad \phi_1 \rightarrow \pi$$

$$\omega < \beta\omega_0 \quad \phi_1 > 0 \quad \omega = \beta\omega_0 \quad \phi_1 = \pi/2$$

$$\omega \rightarrow \infty \quad \tan(\phi_1) \rightarrow 0 \quad \phi_1 \rightarrow 0$$

On peut ainsi tracer les diagrammes asymptotiques donnant $20 \cdot \log[G_1(\omega)]$ et $\phi_1(\omega)$ en fonction de $\xi \log(\omega)$ où ξ est un coefficient d'échelle. Pour ne pas encombrer les graphiques on ne mettra que les valeurs de ω sur l'échelle logarithmique



Pour savoir quand $G_1(\omega)$ peut passer par un maximum on divise le numérateur et le dénominateur par ω^2 , il vient

$$G_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{\beta^4\omega_0^4}{\omega^4} - \frac{2\beta^2\omega_0^2}{\omega^2} + 4\eta_1^2\frac{\beta^2}{\omega^2} - 1}}$$

Posons pour simplifier $\sigma = \omega_0^2/\omega^2$ le terme sous le radical s'écrit

$$\beta\sigma^2 + 4\eta_1^2\frac{\beta}{\omega_0^2}\sigma - 2\beta\sigma - 1$$

C'est un trinôme du second degré avec premier coefficient positif, il passe donc par un minimum pour

$$\sigma = \beta(1 - \frac{2\eta_1^2\beta}{\omega_0})$$

Comme σ est un carré cette valeur doit être positive et donc

$$\eta_1^2 < \frac{\omega_0^2}{2\beta}$$

On constate bien que G_1 passe par un maximum pour des valeurs faibles de l'amortissement.

[21] On veut réaliser un filtre passe-haut avec un circuit R, L, C série. On applique la tension d'entrée aux bornes du circuit et on recueille la tension de sortie aux bornes de la bobine. La fonction de transfert en amplitude complexe s'écrit :

$$\underline{H} = \frac{U_s}{U_e} = \frac{iL\omega}{R + iL\omega + 1/iC\omega}$$

$$\underline{H} = \frac{-LC\omega^2}{iRC\omega - LC\omega^2 + 1}$$

Comparons avec la valeur de

$$\underline{H}_1 = \frac{\omega^2/\omega_1^2}{-\omega^2/\omega_1^2 + 2i\eta_1\omega/\omega_1 + 1}$$

On constate, qu'au signe près, on a la même forme et qu'il suffit de prendre $1/LC = \omega_1^2 = \beta^2\omega_0^2$ et $2\eta_1/\omega_1 = RC$

Avec les valeurs numériques de l'énoncé on trouve $LC = 0,98$ $R/L = 0,38$. si on prend $L = 10$ Henry on trouve $C = 98$ mF, ce qui est énorme et ne se trouve que pour des condensateurs électrochimiques dont les valeurs ne sont pas garanties. Et on a $R = 3,8$ Ohms

Pour le calcul on suppose que la bobine avait une résistance nulle or cela est rigoureusement impossible et cette analogie ne peut pas fonctionner. Ce type de méthode date des années 1920 du temps où l'électronique s'appelait encore la T.S.F. et où les ordinateurs n'existaient pas encore. Actuellement on n'a plus besoin de cette vieillerie et il est étonnant qu'on y fasse encore allusion !

Pour finir de répondre à la question pour changer le signe de la fonction de transfert il suffit d'utiliser un amplificateur opérationnel en montage inverseur. Si on veut simuler le comportement de la Tour à l'aide d'une maquette électrique on peut aussi utiliser des montages à amplificateurs opérationnels dérivateurs pour reproduire les équations différentielles du système.

7 Considérations énergétiques

[22] La seule force intérieure qui travaille est la force de frottement fluide. Pour simplifier le calcul posons $u = u_0 \cos(\omega t)$. Alors $\dot{u} = -\omega u_0 \sin(\omega t)$. Pour une variation élémentaire de déplacement du le travail élémentaire de cette force est

$$dW = -h_1 \omega \sin(\omega t) \cdot du = h_1 (\omega u_0)^2 \sin^2(\omega t) dt$$

Intégrons sur une période

$$W = h_1 (\omega u_0)^2 \left[\frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \right]_0^T = h_1 (\omega u_0)^2 T/2$$

D'autre part $u_0 = G_1 \cdot x_0$. La puissance moyenne vaut donc :

$$\langle P_1 \rangle = W/T = h_1 (\omega G_1 x_0)^2 / 2$$

[23] On donne $p_1 = \langle P_1 \rangle / x_0^2 = h_1 G_1^2 \omega^2 / 2$. Le système $u(t)$ fonction de $x(t)$ est un filtre passe-haut. Pour ω faible le "nouveau u " est faible et la puissance dissipée est faible. Pour $\eta_1 = 0,2$ il y a un maximum de l'amplitude qui correspond à la bosse sur la courbe, puis la puissance réduite continue à augmenter.

[24] Le déphasage $\phi_1(u)$ doit être de 180° pour avoir l'opposition de phase. Si le système électronique d'asservissement a un défaut de fonctionnement, le remède peut être pire que le mal (mise en phase). On peut rapprocher un tel système de l'absorption acoustique active qui, depuis plus de trente ans qu'on l'étudie, n'arrive pas à fonctionner correctement.