

I) Formation d'image et turbulence

1.1) Principe de Huygens-Fresnel: voir cours

1.2) Intensité lumineuse diffractée à l'infini:

pour une onde incidente plane monochromatique sous incidence normale, l'amplitude diffractée n'est importante qu'au voisinage du plan d'incidence. Pour une direction de ce plan faisant l'angle α avec la direction incidente $A(\alpha) = K \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2i\pi x \sin \alpha) dx = Ka \frac{\sin u}{u}$

où $u = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \alpha$. D'où l'intensité $\boxed{\frac{I(\alpha)}{I_0} = \left| \frac{A(\alpha)}{A(0)} \right|^2 = \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2}$ où I_0 est la valeur du maximum d'intensité

1.3) Position de la première frange noire $I_1(\alpha) = 0 \rightarrow \begin{cases} \sin u = 0 \\ u \neq 0 \end{cases}$ la première valeur est $u_1 = \pi$

la direction correspondante est donnée par $\sin \alpha_1 = \frac{\lambda}{a}$. Comme $\lambda \ll a$, $\boxed{\sin \alpha_1 \approx \alpha_1 \approx \frac{\lambda}{a}}$

2.1) Deux fentes de largeur a , distantes de b

a) Amplitude et intensité diffractées à l'infini: on se place là aussi dans le plan d'incidence

$S(\alpha) = A_1(\alpha) + A_2(\alpha) = A(\alpha) \left(e^{-\frac{2i\pi}{\lambda} \frac{b}{2} \sin \alpha} + e^{\frac{2i\pi}{\lambda} \frac{b}{2} \sin \alpha} \right)$ en prenant comme origine des phases un point du plan des fentes équidistant des deux fentes.
En faisant l'approximation $\sin \alpha \approx \alpha \rightarrow \boxed{S(\alpha) = 2A(\alpha) \cos\left(\frac{\pi ab}{\lambda}\right) = 2 \sqrt{I_0} \frac{\sin u}{u} \cos \frac{\pi ab}{\lambda}}$

D'où l'intensité $\boxed{I(\alpha) = 4 I_0 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \cos^2 \left(\frac{\pi ab}{\lambda} \right)}$

avec $u \approx \frac{\pi a \alpha}{\lambda}$

b) a définit la largeur du terme de diffraction $\text{sinc}^2\left(\frac{\pi a \alpha}{\lambda}\right)$

b définit la largeur des franges d'interférence via le terme $\cos^2\left(\frac{\pi ab}{\lambda}\right)$

2.2) Onde arrivant sur l'une des fentes déphasée de ψ

le calcul précédent conduit à une expression $S'(\alpha) = A(\alpha) \left(e^{i(\psi - \frac{2i\pi}{\lambda} \frac{b}{2} \sin \alpha)} + e^{\frac{2i\pi}{\lambda} \frac{b}{2} \sin \alpha} \right)$

soit $S'(\alpha) = 2A(\alpha) e^{i\psi/2} \cos\left(\frac{\pi ab}{\lambda} - \psi/2\right) \rightarrow I'(\alpha) = 4 I_0 \text{sinc}^2 u \cos^2\left(\frac{\pi ab}{\lambda} - \frac{\psi}{2}\right)$

La fonction de diffraction est inchangée, par contre décalage des franges d'interférence.

2.3) Déphasage ψ variable avec le temps visibilité des franges assurée pour des variations rapides

devant le temps d'observation, si le déplacement est petit devant l'interfrange c'est à dire si les variations de ψ sont faibles devant $2\pi \rightarrow |\Delta\psi| \ll 2\pi$

2.4) Temps de pose plus court que le temps caractéristique des variations de ψ $\rightarrow$ Diminution de la

visibilité car il faut sommer en chaque point les intensités pour obtenir le "signal" donc $I_{pp} \neq 0 \rightarrow V \ll 1$.
Si pendant le temps de pose, la variation de ψ reste inférieure à 2π , on peut obtenir $V \neq 0$

Si le temps de pose est long devant le temps caractéristique, la figure d'interférences disparaît puisque on suppose que ψ varie de plus de 2π . On retrouve alors une figure de diffraction semblable au cas d'une fente unique.

3) Analyse plus fine: 3.1) Calcul de l'amplitude et de l'intensité'

-17-

$$S(\alpha, t) = K \left(\int_{-b/2-a/2}^{-b/2+a/2} \exp\left(-\frac{2i\pi x \sin \alpha}{\lambda}\right) \exp(i\varphi(x, t)) dx + \int_{+b/2-a/2}^{+b/2+a/2} \exp\left(-\frac{2i\pi x \sin \alpha}{\lambda}\right) \exp(i\varphi(x, t)) dx \right)$$

Un changement de variable ($x_1 = x + b$) dans le 1^{er} terme permet d'écrire l'amplitude sous la forme

$$S(\alpha, t) = K \int_{b/2-a/2}^{b/2+a/2} \exp\left(-\frac{2i\pi x \sin \alpha}{\lambda}\right) \exp(i\varphi(x, t)) \left(1 + e^{\frac{2i\pi b \sin \alpha}{\lambda} + i\varphi(b-x, t) - i\varphi(x, t)}\right) dx$$

Si on suppose que $\varphi(x, t)$ est constant sur chacune des fentes, on obtient l'expression simplifiée

$$S(\alpha, t) \approx S(\alpha) \left(e^{i\varphi(b/2, t) - \frac{i\pi b \sin \alpha}{\lambda}} + e^{i\varphi(-b/2, t) + \frac{i\pi b \sin \alpha}{\lambda}} \right) = S(\alpha) e^{i\varphi(b/2, t) - \frac{i\pi b \sin \alpha}{\lambda}} \left(1 + e^{\frac{2i\pi b \sin \alpha}{\lambda}} \right)$$

Donc l'intensité' $I(\alpha, t) \approx 2 I_0 \left(1 + \operatorname{Re} \left(e^{i(\varphi(b/2, -b/2, t) - \frac{2\pi b \sin \alpha}{\lambda})} \right) \right)$

3.2) Intensité moyenne

$$I(\alpha) = \langle I(\alpha, t) \rangle = 2 I_0 \left(1 + \operatorname{Re} \left(\left\langle e^{i\varphi(b/2, -b/2, t) - \frac{2i\pi b \sin \alpha}{\lambda}} \right\rangle \right) \right)$$

or $\varphi(b/2, -b/2, t)$ est une variable aléatoire de valeur moyenne nulle. Si on suppose que $\varphi(b/2, -b/2, t)$

est de statistique gaussienne (l'énoncé indique qu'on admettra que $\varphi(x, t)$ est de statistique gaussienne)

alors on peut utiliser le résultat donné et on obtient

$$I(\alpha) = 2 I_0 \left(1 + e^{-\frac{1}{2} D_\varphi(b)} \cos\left(\frac{2\pi b \sin \alpha}{\lambda}\right) \right)$$

3.3) Facteur de visibilité'

on suppose $a \ll b$ / ce qui rend acceptable l'hypothèse jointive d'une

phase fixe sur chaque fente et variable d'une fente à l'autre)

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = e^{-\frac{1}{2} D_\varphi(b)}$$

3.4) Valeur l de b telle que $V = 0,1$:

$$D_\varphi(l) = -\ln V = 4,6 \rightarrow l = 2,5 \delta_0$$

si l est grand devant le diamètre du miroir, alors deux fentes placées devant le miroir donnent des franges visibles $\rightarrow$ Bonne cohérence spatiale de l'onde incidente

si l est petit devant le diamètre du miroir, pas d'interférences visibles pour des fentes distantes de plus que l $\rightarrow$ Onde incidente sur le miroir a une faible cohérence spatiale

4) Etude des perturbations dues à la turbulence

4.1) Expression de l'indice:

$n = 1 + K\rho$ or air obéit à l'équation d'état du gaz parfait

$$PV = \frac{m}{A} RT \rightarrow \rho = \frac{m}{V} = \frac{MP}{RT}$$

$$\rightarrow n = 1 + \frac{KMP}{RT} \quad \text{A.N. } K = \frac{(n-1)RT}{MP} = 2,155 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$$

4.2) Fluctuations d'indice

$$\frac{\delta(n-1)}{n-1} = \frac{\frac{\delta P}{P} - \frac{\delta T}{T} = \frac{\delta m}{m-1}}$$

$$\text{A.N. } \delta T = 0,1 \text{ K} \quad T = 293 \text{ K} \rightarrow \delta m = -9,99 \cdot 10^{-4}$$

$$\delta P = 0$$

$$T = 223 \text{ K} \rightarrow n-1 = 9,34 \cdot 10^{-4} \rightarrow \delta m = -0,15 \cdot 10^{-4}$$

Les couches basses sont celles où la pression est élevée donc $(n-1)$ y est plus important $\rightarrow$ les variations absolues d'indice y sont supérieures pour δT fixé.

4.3) Variation de chemin optique

due à une couche de faible épaisseur h d'altitude zols

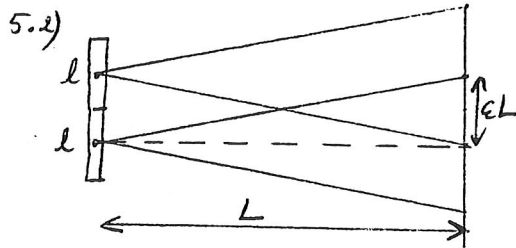
$$\text{Pour traversée verticale } \delta L = h \delta n$$

A.N. $\delta L = 10^{-6} \text{ m}$ zols = 0 h = 30 m $\rightarrow \delta n = 3,3 \cdot 10^{-8} \rightarrow \delta T = -0,03 \text{ K}$ le signe indique seulement qu'une baisse de température entraîne une augmentation du chemin optique.

5) Propagation d'une onde plane dans la couche turbulente

- 18 -

5.1) Etallement angulaire dû à la diffraction par la cellule de taille $l \rightarrow \epsilon \approx \frac{\lambda}{l}$.



si $L \approx \frac{l^2}{\lambda}$ alors $\epsilon L \approx \frac{\lambda}{l} \cdot \frac{l^2}{\lambda} = l$

l'etallement est de l'ordre de la distance entre les centres de 2 cellules voisines $\rightarrow$ superposition des fronts d'onde

A.N.: $L = \frac{l^2}{\lambda} = 2 \cdot 10^4 \text{ m}$.

5.3) Temps caractéristique d'évolution de la turbulence.

$\tau \approx \frac{l}{v}$ où l est la taille caractéristique d'une cellule. A.N.: $\tau \approx 5 \cdot 10^{-3} \text{ s}$

6) Observations au télescope CFHT 6.1) Origine de l'etallement terme de diffraction $\epsilon \approx \frac{\lambda}{D}$

ici $D = 3,6 \text{ m} \rightarrow \epsilon = 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \approx 0,03''$ très faible devant l'etallement observé. L'origine est donc la turbulence. Etallement observé correspond à $l \approx \frac{\lambda}{\epsilon} = 0,2 \text{ m}$.

6.2) Optique adaptative si elle corrige les effets de la turbulence améliore la résolution angulaire d'un facteur $\frac{D}{l}$ Ici $\frac{D}{l} = 18$

6.3) Première image $\rightarrow$ lumière enregistrée faible $\rightarrow$ Variations fortes de l'intensité lumineuse entre pixels voisins. Dégradation de la résolution par les fluctuations spatiales de n

Deuxième image $\rightarrow$ lumière enregistrée importante $\rightarrow$ Variations lentes de l'intensité lumineuse entre pixels voisins. Les fluctuations avec le temps de n "s'ajoutent" aux fluctuations spatiales.

II) Fonction de transfert d'un miroir déformable

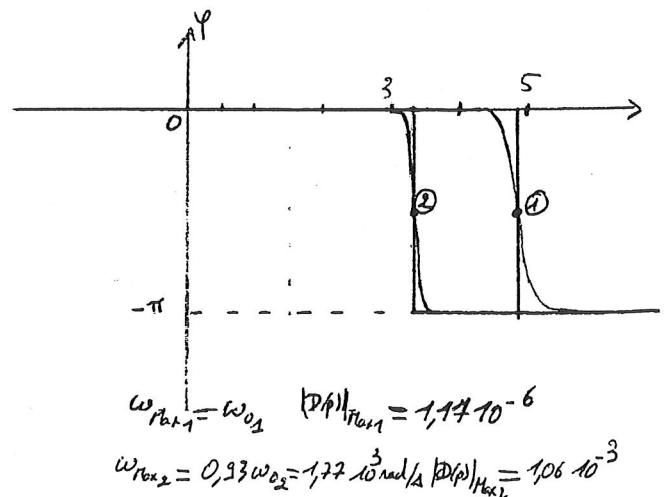
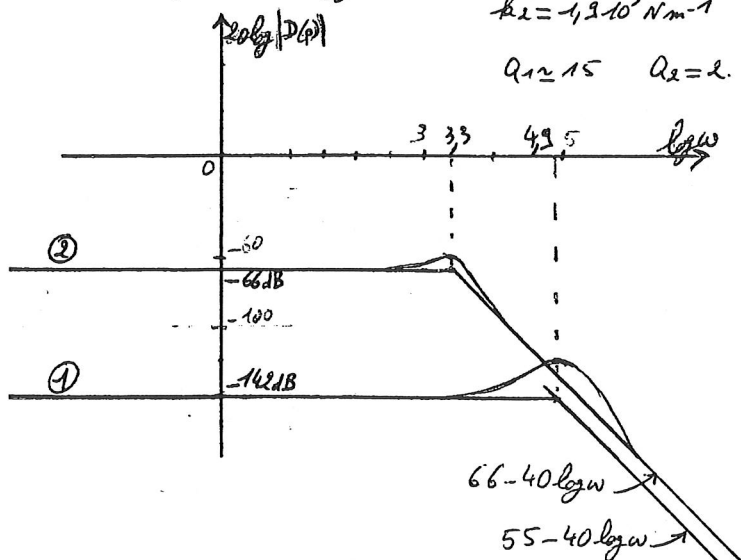
1) Modélisation de la membrane 1.1) Equation du mouvement $m\ddot{x} = -kx - \mu\dot{x} + f(t)$

1.2) Fonction de transfert $D(p) = X(p)/F(p)$ $\ddot{x} = p^2 x$ $\dot{x} = p x \rightarrow D(p) = (k + \mu p + m p^2)^{-1}$

En posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\sigma = \frac{\mu}{2\sqrt{mk}}$

$D(p) = \left[k \left(1 + \frac{2\sigma}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right) \right]^{-1}$ ordre 2.

1.3) Deux configurations $k_1 = 1,3 \cdot 10^4 \text{ N.m}^{-1}$ $m_1 = 1,71 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$ $\omega_{01} = 8,5 \cdot 10^4 \text{ rad/s}$ $\sigma_1 = 3,3 \cdot 10^{-2}$
 $k_2 = 1,2 \cdot 10^3 \text{ N.m}^{-1}$ $m_2 = 5,03 \cdot 10^{-4} \text{ kg}$ $\omega_{02} = 1,1 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$ $\sigma_2 = 0,256$
 $Q_1 \approx 15$ $Q_2 = 2$



Pour $\omega \ll \omega_{\max}$ la réponse dépend peu de la fréquence } Pour commander le système, on se place
 $\omega \approx \omega_{\max}$ Zone de résonance } dans la zone $\omega \ll \omega_{\max}$
 $\omega \gg \omega_{\max}$ Zone atténuée, réponse "négligeable"

-14-

1.4) On veut commander le miroir jusqu'à des fréquences de 1KHz, ($\omega = 2\pi \cdot 10^3 \text{ rad/s}$) $\rightarrow$

on choisira la membrane 1 pour laquelle $\omega_{\max} > 2\pi \cdot 10^3 \text{ rad/s}$.

On place un filtre du 2^e ordre $H(p)$ dans la boucle de commande. La fonction de transfert globale $T(p) = H(p) D(p)$

$$H(p) = \left(1 + \frac{p}{Q\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}\right)^{-1}$$

Il faut $\omega_0 > 2\pi \cdot 10^3 \text{ rad/s}$ et $Q \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ pour ne pas avoir de maximum. On veut $H_{dB}(\frac{\omega_{\max}}{\omega_0}) = -40 \text{ dB}$

$$\text{soit } (1 - \tau_m^2)^2 + \frac{\tau_m^2}{Q^2} = 10^4 \text{ où } \tau_m = \frac{\omega_{\max}}{\omega_0} \rightarrow \tau_m \approx 10 \rightarrow \omega_0 = 8.5 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$$

$$f_0 = 1.35 \text{ kHz}$$

Pour que la réponse dépende le moins possible de la fréquence, on prendra $Q = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2) Modélisation de l'association actionneur-membrane

2.1) Equations régissant le mouvement

$$m \ddot{x}_1 = f(t) - k(x_1 - x_2)$$

En négligeant les masses des ressorts et pièces de liaison

$$\begin{cases} k(x_1 - x_2) + 4k_a(x_2 - x_3) = 0 \\ k_a(x_2 - x_3) - \mu_a \ddot{x}_3 = 0 \end{cases}$$

En domaine de Laplace $m p^2 X_1 + k(X_1 - X_2) = F(p)$

$$k(X_1 - X_2) + 4k_a(X_2 - X_3) = 0$$

$$k_a(X_2 - X_3) - \mu_a p X_3 = 0 \rightarrow X_2 = X_3 \left(1 + \frac{\mu_a p}{k_a}\right)$$

$$k X_1 = X_3 \left(k + 4k_a - 4k_a \left(1 + \frac{\mu_a p}{k_a}\right)^{-1} \right) \text{ et } X_1 \left(k + m p^2 - k \left(1 + \frac{4k_a}{k} - \frac{4k_a}{k} \frac{1 + \frac{\mu_a p}{k_a}}{1 + \frac{\mu_a p}{k_a}} \right)^{-1} \right) = F(p)$$

$$\text{d'où } D(p) = \frac{X_1(p)}{F(p)} = \frac{1 + \left(1 + \frac{4k_a}{k}\right) \frac{\mu_a}{k_a} p}{p \left(m \left(1 + \frac{4k_a}{k}\right) \frac{\mu_a}{k_a} p^2 + m p + 4\mu_a \right)} = \frac{1}{\tau_i} \frac{1 + \tau_1 p}{p (\tau_2^2 p^2 + 2\tau_2 p + 1)}$$

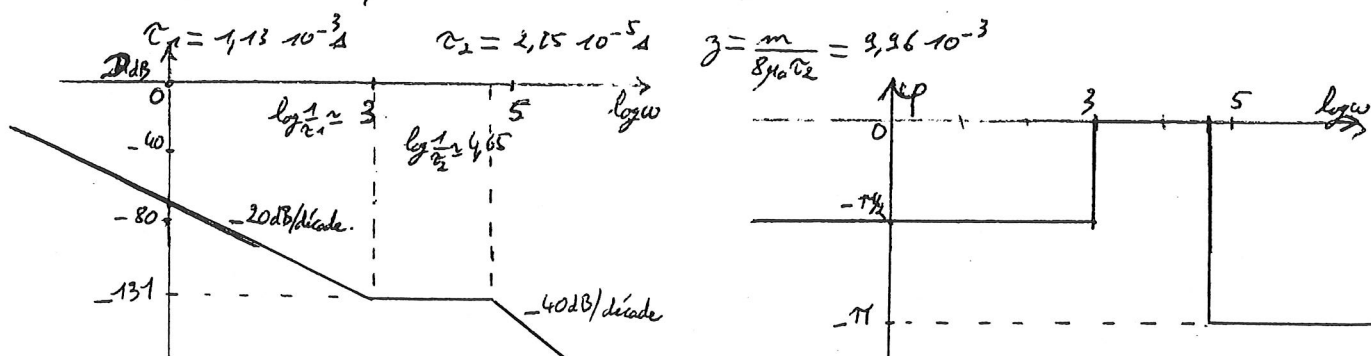
$$\text{avec } \tau_1 = \frac{\mu_a}{k_a} \left(1 + \frac{4k_a}{k}\right) \quad \tau_2^2 = \frac{m}{4k_a} \left(1 + \frac{4k_a}{k}\right) \quad \tau_i = 4\mu_a \quad 2\tau_2 = \frac{m}{4\mu_a}$$

2.2) Cas limites

$\mu_a \rightarrow 0$ $D(p) \rightarrow \frac{1}{m p^2}$ mouvement d'une masse libre sous l'action de F
 rigidité équivalente nulle.

$\mu_a \rightarrow \infty$ $D(p) \rightarrow \frac{1}{m p^2 + \frac{4k_a}{1 + \frac{4k_a}{k}}}$ mouvement d'une masse non amortie, solidarisée d'un ressort
 de rigidité $k_e = \left(\frac{1}{4k_a} + \frac{1}{k}\right)^{-1}$

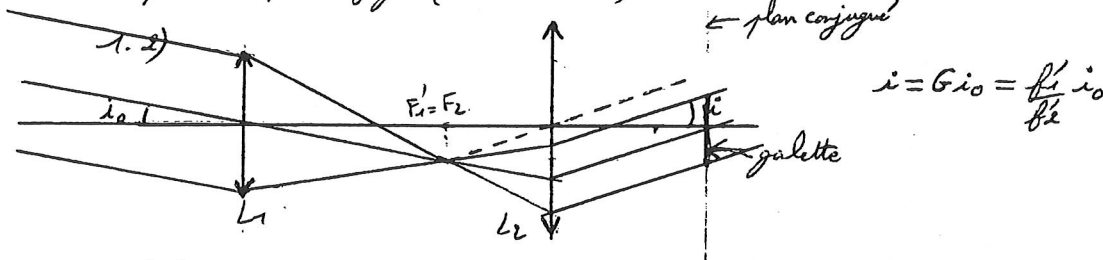
2.3) Application numérique. $k_a = 1.22 \cdot 10^6 \text{ N.m}^{-1}$ $\mu_a = 10^3 \text{ N.m}^{-1.s}$ $\tau_i = 4 \cdot 10^3 \text{ N.m}^{-1.s}$



Si on augmente la valeur du coefficient angulaire de sorte que $z > \frac{1}{f_2}$, le trinôme du second degré se factorise en produit de deux termes d'ordre 1 $\rightarrow$ pour le gain, apparition d'un segment de pente -20 dB par décade avant l'asymptote de pente -40 dB/décade $\rightarrow$ pour la phase, d'un segment $\varphi = -\pi/2$ avant l'asymptote $\varphi = -\pi$

III) Analyse du front d'onde perturbé

1.1) La galette de microlentilles est placée dans le plan conjugué de la première lentille à travers la seconde pour que tout rayon traversant la 1^{re} lentille, quelque soit son inclinaison, traverse la même partie du plan conjugué (cercle oculaire)



(20)

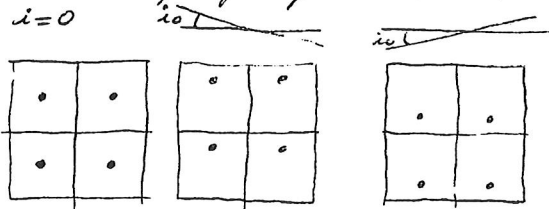
1.3) Condition sur G pour un éclaircissement total de la galette

le diamètre du faisceau sortant est $\frac{D}{G}$ d'où la condition $q = \frac{D}{G} \rightarrow G = \frac{D}{q}$

A.N. $N = 200$ $q = 1 \text{ mm} \rightarrow q \approx 16 \text{ mm}$ $\Delta D = 3,6 \text{ m} \rightarrow G \approx 226$ $\rightarrow i \approx 181'' = 3'$ On reste dans les conditions de Gauss. $i_0 = 0,8''$

2.1) Plan d'onde atypique à l'axe $\rightarrow$ chaque microlentille donne dans son plan focal, une tache de diffraction centrée sur son axe. Si le plan d'onde est incliné de i , le centre est décalé de $i f$

L'éclairement dans le plan focal pour 4 microlentilles éclairées par une onde plane (inclinée ou non sur l'horizontale)



Si les taches de diffraction sont "petites", la mesure de la position du centre de la tache donne une détermination de i pour cette lentille donc de i_0 pour la partie correspondante du miroir principal.

2.2) dispersion angulaire due à la diffraction $\frac{\Delta}{\lambda} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$ La diffraction est plus importante que la déviation due à la turbulence. On observe une tache de rayon $\frac{\Delta}{\lambda} f_{\mu}$.

Pour que la tache de diffraction reste contenue dans un carré de la taille d'une microlentille il faut que $(\frac{\Delta}{\lambda} + i) f_{\mu} \leq \frac{a_{\mu}}{2}$ A la limite $f_{\mu} = \frac{a_{\mu}}{2(\frac{\Delta}{\lambda} + i)} = 14 \text{ cm}$.

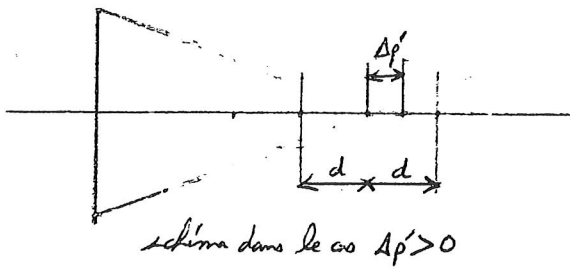
3) Mesure de courbure du profil du front d'onde

3.1) Onde incidente possédant au niveau de la lentille une courbure $C = \frac{1}{p}$ $\rightarrow$ elle semble provenir d'un point A tel que $OA = p$ où O est le centre de la lentille. Le faisceau converge en A' conjugué de A par rapport à la lentille donc $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f}$, où $p' = OA' \rightarrow \boxed{p' = p f' / (p + f')}$

$$\Delta p' = p' - f' = -\frac{f'^2}{p + f'}$$

- 21 -

3.2) Aires éclairées pour les 2 positions du détecteur



détecteur à la distance $(f' + d) \rightarrow A_+ = A_0 \left(\frac{d - \Delta p'}{f' + \Delta p'} \right)^2$

à la distance $(f' - d) \rightarrow A_- = A_0 \left(\frac{d + \Delta p'}{f' + \Delta p'} \right)^2$

Les aires A_+ et A_- sont dans un rapport égal au carré du rapport d'échelle de la figure plane.

3.3) Prise en compte de la diffraction : pour $d=0$, on a un cercle de rayon $r \approx f' \frac{\lambda}{2a_0}$ et non pas un point.

où a_0 est le rayon de la lentille. En l'absence de diffraction, pour $d \neq 0$, on a un cercle de rayon $\frac{a_0}{2} \frac{d}{f'}$ pour une onde incidente plane. Il faut que la distance d soit suffisante pour que la diffraction ne "margue" pas la variation d'intensité entre les deux positions. La diffraction devient prépondérante pour $d \leq d^*$

où d^* satisfait à la relation $f' \frac{\lambda}{a_0} = \frac{a_0}{2} \frac{d^*}{f'} \rightarrow \boxed{d^* = 2N^2 \lambda}$ avec $N = \frac{f'}{a_0}$ A.N. $d^* = 0,4 \text{ mm}$.

3.4) Flux collecté par unité de surface $\Phi_{\pm}$: pour un éclairage uniforme, la conservation de l'énergie

écrit $\Phi_0 A_0 = \Phi_+ A_+ = \Phi_- A_- \rightarrow$ Flux surfacique est inversement proportionnel à l'aire éclairée A .

3.5) "Contraste" $\Delta \Phi = (\Phi_+ - \Phi_-) / (\Phi_+ + \Phi_-)$

$$\Delta \Phi = \frac{A_- - A_+}{A_+ + A_-} = \frac{2d\Delta p'}{d^2 + \Delta p'^2}$$

3.6) Approximation de courbure faible

$$C \ll \frac{1}{f'} \rightarrow p \gg f' \rightarrow \Delta p' \approx -\frac{f'^2}{p} = -C f'^2 \rightarrow \Delta \Phi \approx -\frac{2d f'^2 C}{d^2 + \Delta p'^2}$$

Pour de faibles courbures, on peut supposer que l'on aura $|\Delta p'| \ll d \rightarrow \Delta \Phi \approx -\frac{2f'^2}{d} C$

La grandeur $\Delta \Phi$ est alors proportionnelle à la courbure.

IV) Boucle d'asservissement

1) Fonction de transfert des éléments de la boucle

1.1) On veut obtenir une onde plane grâce réflexion sur le miroir principal $\rightarrow$ on veut une erreur nulle en sortie de l'analyseur du front d'onde.

1.2) Le calculateur doit intégrer le signal d'erreur pour assurer la correction de la turbulence

2) Analyseur de front d'onde

2.1) Analyseur moyenne le signal d'entrée $\langle x_n(t) \rangle = \frac{1}{T_a} \int_{t-T_a}^t x_n(t') dt' = \int_{-\infty}^{\infty} x_n(t') \Pi(t-t') dt' = x_n(t)$

où $\Pi(t-t') = 1/T_a$ si $t-T_a < t' < t \rightarrow 0 < t-t' < T_a$
 $\Pi(t-t') = 0$ si $t' < t-T_a$ ou $t' > t$ $\Pi(t)$ est la fonction porte.

L'expression est le produit de convolution de $x_n(t)$ par la fonction porte $\Pi(t)$

2.2) $U(p)$ est le produit des transformées de Laplace de $x_n(t)$ et de $\Pi(t)$ donc $A(p) = \frac{U(p)}{X_n(p)}$ est la

transformée de Laplace de $\Pi(t)$ soit $\int_0^{\infty} \Pi(t) e^{-pt} dt = \boxed{\frac{1}{T_a} \frac{1 - e^{-pT_a}}{p} = A(p)}$

2.3) $A(j\omega) = \frac{1}{\omega T_a} \sin \frac{\omega T_a}{2} e^{-j\omega T_a/2}$ si $\omega \ll \frac{2}{T_a}$ $\sin \frac{\omega T_a}{2} \approx \frac{\omega T_a}{2} \rightarrow A(j\omega) \approx e^{-j\omega T_a/2}$ retard pur égal à $T_a/2$