

Auteurs : Jean-Baptiste Paire
Jean-Marc Vince

Télescopes, turbulences atmosphériques et optique adaptative

I. Etude et propriétés des télescopes.

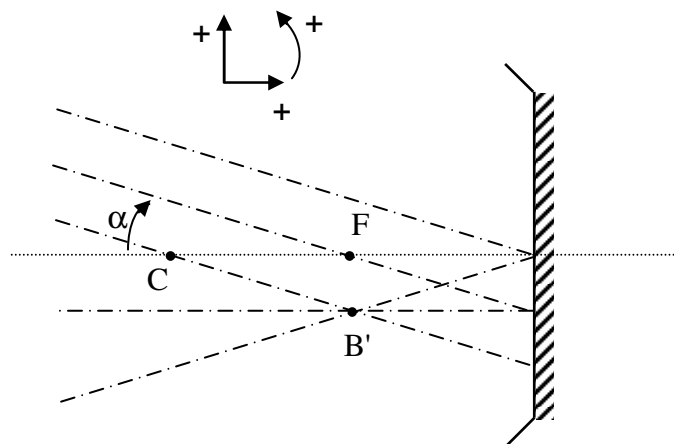
Q 1 : On éclaire un système optique centré en conditions de Gauss avec des rayons incidents peu inclinés par rapport à l'axe optique et peu éloignés de celui-ci. Dans ce cadre, les systèmes optiques centrés (lentilles minces, miroirs, ...) sont stigmatiques et aplanétiques (relations approchées).

Q 2 : Le foyer objet est le point conjugué d'une image placée à l'infini sur l'axe optique. Le foyer image est l'image d'un objet placé à l'infini sur l'axe optique.

En utilisant la relation de conjugaison fournie par l'énoncé, on en tire $\overline{SF} = \frac{\overline{SC}}{2}$ et $\overline{SF'} = \frac{\overline{SC}}{2}$. On obtient donc $f = \frac{1}{2} \cdot \overline{CF}$ (A noter que le texte ne définit pas le rayon R . En supposant que celui-ci est défini positif, on peut penser que $R = \overline{CS}$), soit $f = \frac{1}{2} \cdot R$

Q 3 : Une source lumineuse est placée en A, celle-ci émet une onde sphérique, les surfaces d'onde sont des sphères de centre A. Pour que celles-ci soient localement assimilées à des plans, il faut que leur rayon de courbure soit grand devant les distances considérées. Au niveau du miroir, situé à la distance L de A, le rayon de courbure vaut L . La condition cherchée est donc $L \gg R$. A est donc considéré comme étant à l'infini, son image sera donc confondue avec le foyer F' .

Q 4 : Les rayons issus de B arrivent parallèles entre eux, ils vont donc converger dans le plan focal image du miroir. La taille $\overline{A'B'}$ sera donnée par le rayon qui se réfléchit sur le sommet S du miroir, avec des angles faibles on obtient : $\overline{A'B'} = \frac{R}{2} \cdot \alpha$ avec ici $\alpha < 0$.



La caméra distingue deux images si A' et B' sont placés sur deux pixels différents, donc distants d'au moins h . Ici, $\frac{R}{2} \cdot |\alpha| > h$ soit $|\alpha| > \frac{2 \cdot h}{R} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ rad} = 0,12 \text{ secondes d'arc}$.

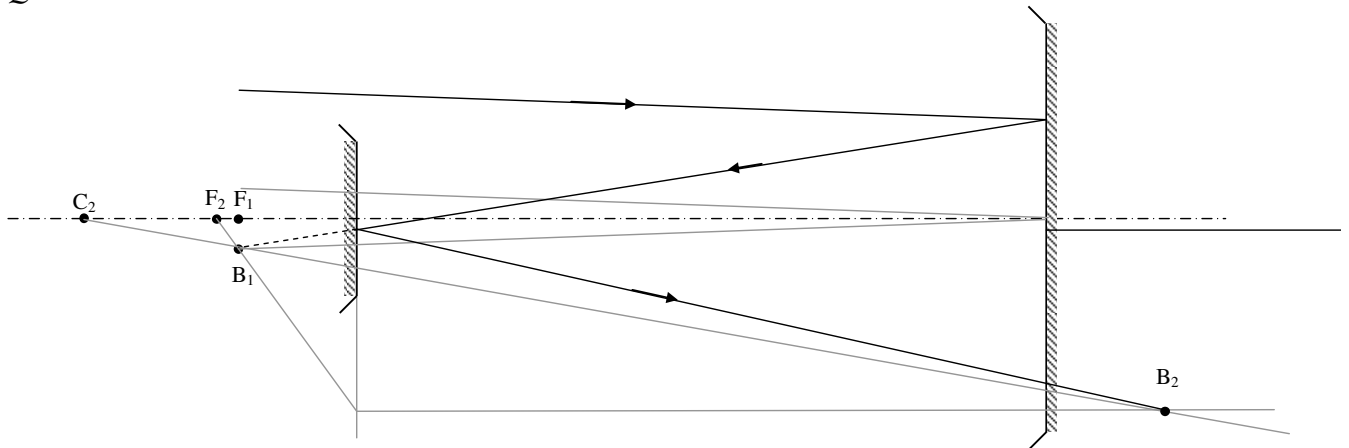
Q 5 : L'étoile A est à l'infini, son image par le miroir M_1 sera placée en F_1 . On cherche donc le conjugué de F_1 par M_2 . Avec la relation de conjugaison : $\frac{1}{S_2 A_2} + \frac{1}{S_2 A_1} = \frac{2}{S_2 C_2} = \frac{-2}{R_2}$

De plus : $\overline{S_2 A_1} = \overline{S_2 S_1} + \overline{S_1 A_1} = \overline{S_2 S_1} - \frac{R_1}{2}$

donc $\frac{1}{\overline{S_2 A_2}} = \frac{-1}{\overline{S_2 A_1}} - \frac{2}{R_2} = \frac{-1}{d - \frac{R_1}{2}} - \frac{2}{R_2}$ et $\overline{S_2 A_2} = \frac{-R_2 \cdot (\frac{1}{2} R_1 - d)}{R_1 - R_2 - 2d} = 18,33 \text{ m}$ et $\overline{S_1 A_2} = 5,53 \text{ m}$.

L'encombrement de ce télescope est la distance $S_2 A_2 = 18,33 \text{ m}$, alors que l'encombrement du miroir de la partie 1 est égale à la distance $FS = \frac{1}{2} R = 15 \text{ m}$.

Q 6 : Construction à l'échelle :



Construction de B_1 : Deux rayons parallèles provenant de B_∞ convergent vers le même point du plan focal de M_1 après réflexion sur celui-ci. On choisit le rayon se réfléchissant sur S_1 . Son point de rencontre avec le plan focal de M_1 est B_1 .

On choisit un rayon issu de F_2 passant par B_1 , il est parallèle à l'axe optique après réflexion sur M_2 , de même le rayon passant par B_1 et C_2 se réfléchit sur lui-même. Ces deux rayons se croisent en B_2 .

On en tire $\overline{A_1 B_1} = \frac{R}{2} \cdot \alpha$ avec la même orientation qu'à la question Q4. Puis en utilisant le rayon

$C_1 B_1 B_2$, on obtient : $\frac{\overline{A_2 B_2}}{\overline{A_1 B_1}} = \frac{\overline{C_2 A_2}}{\overline{C_2 A_1}}$ d'où $\overline{A_2 B_2} = \frac{R}{2} \cdot \alpha \cdot \frac{\overline{C_2 A_2}}{\overline{C_2 A_1}}$

Or : $\overline{C_2 A_2} = \overline{C_2 S_2} + \overline{S_2 S_1} = 23,33 \text{ m}$

et $\overline{C_2 A_1} = \overline{C_2 S_2} + \overline{S_2 S_1} + \overline{S_1 F_1} = 5 + 12,8 - 15 = 2,80 \text{ m}$

soit : $\overline{A_2 B_2} = + 125 \alpha$ avec les longueurs en mètre et α en radian.

Les deux images sont séparées si $|\overline{A_2 B_2}| > h$ soit $\alpha > \alpha'_{\min} = 7,2 \cdot 10^{-8} \text{ rad} = 0,015 \text{ secondes d'arc}$.

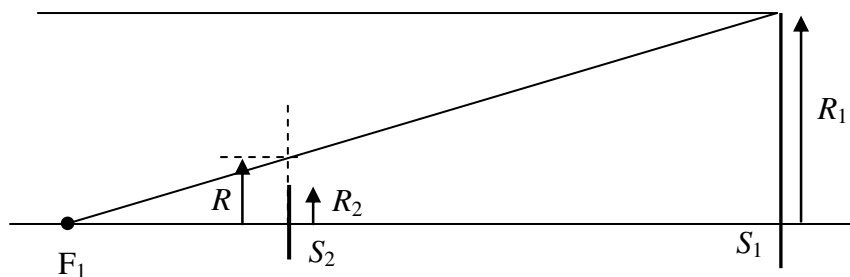
On avait $\alpha_{\min} = 0,12 \text{ secondes d'arc}$, on a gagné un facteur 10.

Q 7 : Si le miroir est perpendiculaire au faisceau incident, on obtient $P_0(A) = I_0 \cdot \pi \cdot \left(\frac{D_1}{2}\right)^2$.

Si l'axe du miroir fait un angle α avec la direction incidente : $P_0(A) = I_0 \cdot \pi \cdot \left(\frac{D_1}{2}\right)^2 \cos \alpha$

En ce qui concerne le montage Cassegrain, la puissance totale arrivant sur le télescope est $P_T(A) = I_0 \cdot \pi \cdot \left(\frac{D_1}{2}\right)^2$, mais toute cette puissance n'arrive pas sur le miroir primaire (occulté par le secondaire), une fraction $\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2$ étant éliminée, si le texte (particulièrement peu clair dans cette question) demande la puissance arrivant sur le miroir M_1 alors $P_0(A) = I_0 \cdot \pi \cdot \left[\left(\frac{D_1}{2}\right)^2 - \left(\frac{D_2}{2}\right)^2 \right]$.

On peut également remarquer que toute cette puissance n'arrive pas sur le miroir secondaire, en effet, en regardant le rayon extrême frappant M_1 , celui-ci ne rencontre pas M_2 :



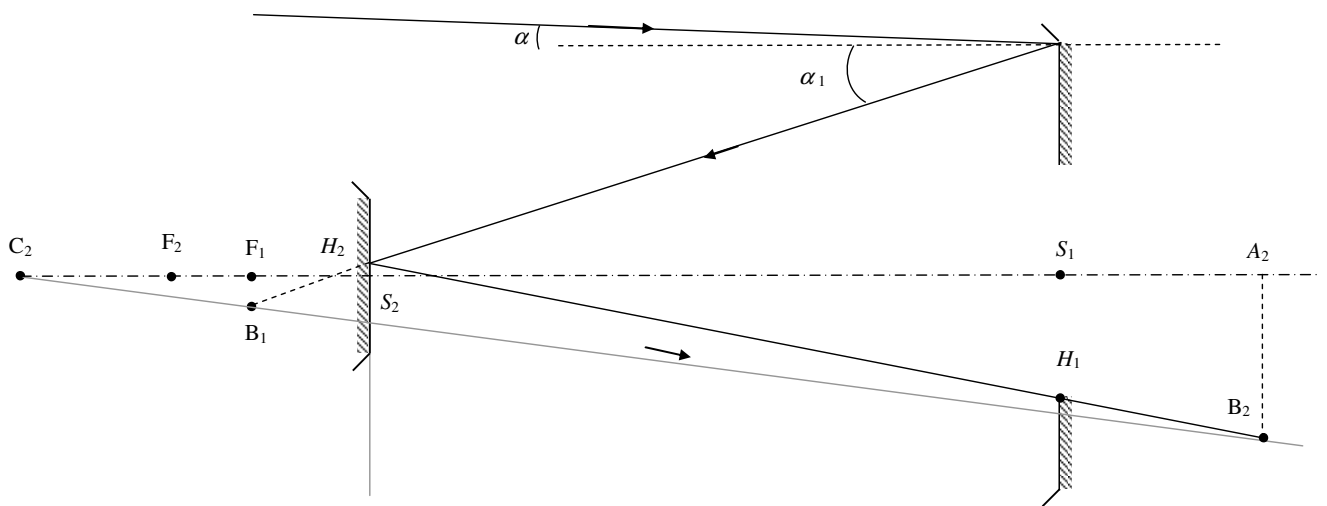
On obtient : $2 \cdot R' = D' = \frac{F_1 S_1}{F_1 S_2} D_1 = 0,147 \cdot D_1 = 1,176 \text{ m}$ et $D_2 = 1 \text{ m}$

Le miroir M_2 ne récupère donc que la fraction $\left(\frac{D_2}{D'}\right)^2$ de la puissance précédente

Au final : $P_T(A) = P_0(A) \cdot \frac{D_1^2 - D_2^2}{D_1^2} \cdot \frac{D'^2}{D_2^2} = 0,71 \cdot P_0(A)$ pour l'intensité de l'image A à travers le télescope (et pas la puissance arrivant sur le télescope)

Pour des angles faibles, on peut négliger à l'ordre 1 en α les variations de surface, et on aura la même formule pour $P_T(B) = P_0(B) \cdot \frac{D_1^2 - D_2^2}{D_1^2} \cdot \frac{D'^2}{D_2^2} = 0,71 \cdot P_0(B)$, donc une intensité relative égale pour les deux montages...

Q 8 : Pour ce calcul, il faut de nouveau interpréter la question, peu claire : on cherche l'angle maximum d'inclinaison pour qu'aucun rayon ne puisse passer par le trou de diamètre D percé dans le miroir M_1 . On va choisir un rayon arrivant d'une étoile placée au-dessus de l'axe optique, incliné d'un angle α , tel que ce rayon, après réflexion sur M_1 et M_2 , soit arrêté par le bord inférieur du trou. Le schéma est donc le suivant pour ce rayon particulier :



Avec $\overline{F_1 B_1} = \frac{R}{2} \cdot \alpha_m$ On a aussi la taille de l'image $\overline{A_2 B_2} = 125 \cdot \alpha_{\max}$

Il s'agit de calculer l'équation de la droite $H_2 B_2$ et d'écrire qu'à la limite, le rayon est arrêté par H_1 .

Calcul de la hauteur $\overline{S_2 H_2} = h'$. On utilise l'angle $\alpha_1 = \frac{D_1}{R} + \alpha_m$ car $\frac{D_1}{2R}$ est l'angle entre la normale au miroir et la direction horizontale.

On en tire donc : $h' = \delta \cdot \left(\frac{D_1}{R} + \alpha_m \right) - \frac{R}{2} \cdot \alpha_m$ avec $\delta = \overline{F_1 S_2} = 2,2 \text{ m}$.

Il ne reste plus qu'à écrire que $H_1 \in H_2 B_2$

On cherche l'équation affine de cette droite dans le repère $S_1 z$ (horizontal) $S_1 x$ (vertical)

soit $x = a \cdot z + b$

On passe en semi numérique car les expressions sont lourdes...

pour H_2 : $h' = a \cdot (-15) + b$ et pour B_2 : $-125 \cdot \alpha_m = a \cdot 5,53 + b$

on en tire : $a = \frac{-112,2 \cdot \alpha_m - 1,173}{20,53}$ et $b = -5,53 \cdot \left(\frac{-112,2 \cdot \alpha_m - 1,173}{20,53} \right) - 125 \cdot \alpha_m$

et en écrivant que $H_1 \in$ à cette droite, on en tire $\alpha_m = 8,08 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 0,463^\circ$

la limite pour le miroir seul ne dépend que du respect des conditions de Gauss.

Q 9 : On a $\overline{A_2 B_2} = -125 \cdot \alpha_m = f' \cdot \alpha_m$ pour une lentille, soit $f' = 125 \text{ m}$

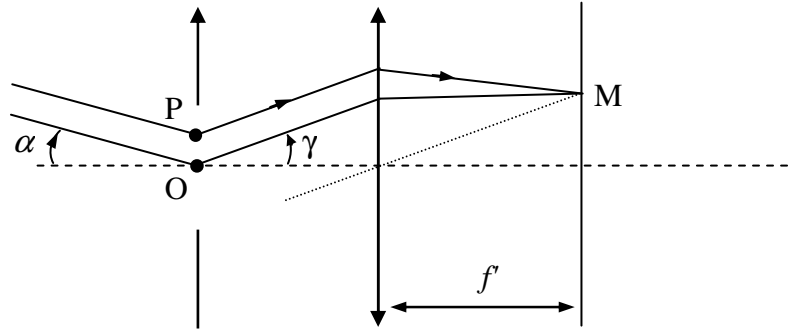
I.3. Prise en compte de la diffraction

Q 10 : Principe de Huygens Fresnel : Chaque point P atteint par une onde de fréquence ν se comporte comme une source secondaire qui émet une onde hémisphérique de même fréquence, d'amplitude proportionnelle à l'amplitude de l'onde incidente en P et à l'élément de surface découpé au voisinage de P, de phase égale à la phase de l'onde incidente en P.

Q 11 : Dans le cas d'une pupille de grande dimension sur y (devant la longueur d'onde λ_0), le motif ne limite pas le faisceau incident, on n'aura donc pas de modification de $\underline{s}_0$.

Si la dimension du faisceau sur y est L alors $\underline{S}(M) = K \cdot L \cdot \int \underline{S}_0(P(x, y)) \cdot \exp \left[i \frac{2\pi \cdot n}{\lambda_0} x \gamma \right] dx$

Q 12 :



$\underline{S}_O(P)$ est donc l'amplitude complexe de l'onde incidente en P. En appelant E l'étoile observée à l'infini et considérée comme une source ponctuelle, on aura : $\underline{S}_O(P) = A_0 \cdot \exp[i(\omega t - k_0 \cdot (EP))]$

où $\vec{k}_0$ est le vecteur d'onde dans le vide et (EP) le chemin optique source – point P.

En faisant apparaître la phase φ_0 de l'onde incidente en O : $\varphi_0 = k_0 \cdot (EO)$,

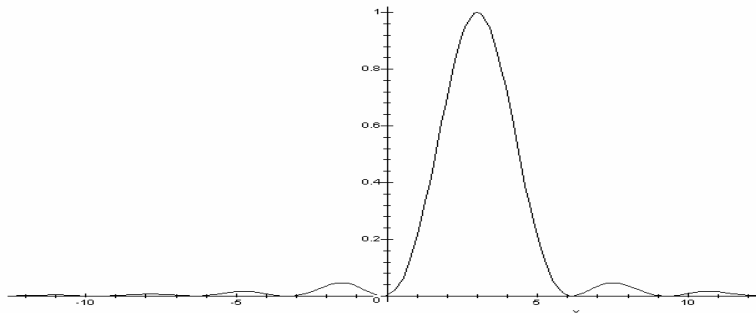
on en tire $k_0 \cdot (AP) = k_0 \cdot [(EP) - (EO) + (EO)] = \vec{k}_0 \cdot \vec{OP} + \varphi_0$.

Soit $\underline{S}_O(P) = A_0 \cdot \exp[i(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda_0} n \cdot x \cdot \alpha) \cdot \exp[-i\varphi_0]]$

Or la lentille est utilisée dans les conditions de Gauss, l'angle γ est faible, on peut assimiler l'angle et sa tangente soit $X = f' \cdot \tan \gamma \approx f' \cdot \gamma$.

$$\begin{aligned} \underline{S}(M) &= KL \int A_0 \cdot e^{i(\omega t - \varphi_0)} \cdot e^{i \frac{2\pi}{\lambda_0} n \cdot x (\gamma + \alpha)} dx = KL \cdot A_0 \cdot e^{i(\omega t - \varphi_0)} \cdot \frac{1}{i \frac{2\pi}{\lambda_0} n (\gamma + \alpha)} \cdot \left[e^{i \frac{\pi}{\lambda_0} na(\alpha + \gamma)} - e^{-i \frac{\pi}{\lambda_0} na(\alpha + \gamma)} \right] \\ &= KL \cdot A_0 \cdot a \cdot e^{i(\omega t - \varphi_0)} \cdot \frac{\sin \left[\frac{\pi}{\lambda_0} na(\alpha + \gamma) \right]}{\frac{\pi}{\lambda_0} na(\alpha + \gamma)} = KL \cdot A_0 \cdot a \cdot e^{i(\omega t - \varphi_0)} \cdot \frac{\sin \left[\frac{\pi}{\lambda_0} na \left(\alpha + \frac{X}{f'} \right) \right]}{\frac{\pi}{\lambda_0} na \left(\alpha + \frac{X}{f'} \right)} \\ \text{On en tire l'intensité en M : } I(M) &= k \cdot \underline{S}(M) \cdot \underline{S}^*(M) = k \cdot K^2 \cdot L^2 \cdot A_0^2 \cdot a^2 \cdot \left[\frac{\sin \left[\frac{\pi}{\lambda_0} na \left(\alpha + \frac{X}{f'} \right) \right]}{\frac{\pi}{\lambda_0} na \left(\alpha + \frac{X}{f'} \right)} \right]^2 \end{aligned}$$

On retrouve bien l'expression proposée avec $I_0 = k \cdot K^2 \cdot L^2 \cdot A_0^2 \cdot a^2$.



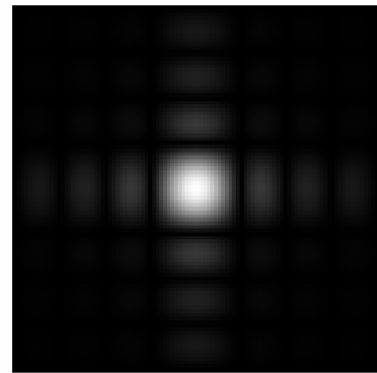
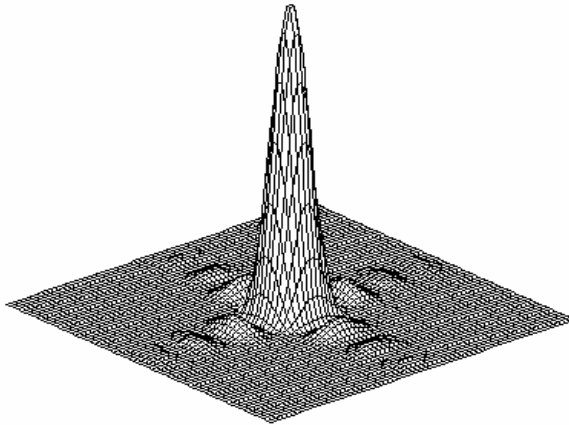
le maximum principal est obtenu pour $X = -f' \cdot \alpha$ ($\alpha < 0$)

Les premières annulations sont distantes de $\frac{\lambda_0}{na}$ de part et d'autre du maximum principal.

Q 13 : Si la pupille est rectangulaire, on obtient un produit de deux sinus cardinaux. Soit en supposant que l'étoile est dans le plan (x, z) :

$$I(X,Y) = I_0 \cdot \left[\frac{\sin \left[\frac{\pi}{\lambda_0} na \left(\alpha + \frac{X}{f'} \right) \right]}{\frac{\pi}{\lambda_0} na \left(\alpha + \frac{X}{f'} \right)} \right]^2 \cdot \left[\frac{\sin \left[\frac{\pi}{\lambda_0} nb \cdot \frac{Y}{f'} \right]}{\frac{\pi}{\lambda_0} nb \cdot \frac{Y}{f'}} \right]^2$$

dont l'allure est :



Q 14 : Les symétries doivent être conservées : on a un axe de symétrie pour le motif diffractant, la figure de diffraction aura elle aussi cet axe comme axe de symétrie : la tache centrale sera donc un disque.

Q 15 : Pour le carré de rayon D_1 on aura une tache centrale de demi largeur $\frac{\lambda_0}{n.D_1} \cdot f'$

Le carré le plus petit a un diamètre égal à $\frac{D_1}{\sqrt{2}}$, la tache centrale de la figure de diffraction aura une demi largeur égale à $\frac{\sqrt{2} \cdot \lambda_0}{n.D_1} \cdot f'$

Pour le disque, dont les dimensions sont comprises entre les deux carrés diffractants précédents, on aura un rayon R_0 de la tache centrale telle que $\frac{\lambda_0}{n.D_1} \cdot f' < R_0 < \frac{\sqrt{2} \cdot \lambda_0}{n.D_1} \cdot f'$

Q 16 : D'après le critère de Rayleigh, le maximum d'intensité de la tache centrale pour B doit être à une distance du maximum de A supérieure à la distance séparant ce maximum du premier minimum de la figure de diffraction, soit : $\alpha \cdot f' > 1,22 \cdot \frac{\lambda_0}{n.D_1} \cdot f'$

$$\text{soit } \alpha > \alpha_d = 1,22 \cdot \frac{\lambda_0}{n.D_1} = 7,628 \cdot 10^{-8} \text{ rad} \approx 0,016 \text{ seconde d'arc.}$$

On obtient $\alpha_d > \alpha_{\min}$ la limite est bien imposée par la diffraction et pas par la taille des cellules CCD. Néanmoins, les valeurs sont proches, on peut penser que la taille des cellules est bien adaptée au problème.

Partie II Effet de la turbulence atmosphérique

Q 17 : $\vec{F} = -e \left[\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right]$. Dans le cas d'une Onde Progressive Plane Harmonique (OPPH) se propageant dans un milieu LHI d'indice n , on a $\|\vec{E}\| = \frac{c}{n} \cdot \|\vec{B}\|$.

On aura donc $\|\vec{E}\| \gg \|\vec{v} \wedge \vec{B}\|$ si $v \ll \frac{c}{n}$

Vérification : Pour l'azote $Z = 7$. On prend comme système l'électron, dans le référentiel lié au noyau de l'azote supposé galiléen. Bilan des actions : la forces d'origine coulombienne. On applique le principe fondamental de la dynamique et on le projette sur le vecteur radial :

$$m \cdot \frac{v^2}{r} = \frac{Z \cdot e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} \quad \text{soit} \quad v = \sqrt{\frac{Z \cdot e^2}{4\pi\epsilon_0 m \cdot r}}$$

Application Numérique : $r \approx 10^{-10} \text{ m}$; $e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; $\epsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$; $m \approx 9 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

On en tire $v \approx 4,2 \cdot 10^6 \text{ m.s}^{-1}$ soit $\frac{v}{c} \approx 0,014$ l'approximation peut être considérée comme vérifiée dans ces conditions de calcul.

Q 18 : $k \cdot z = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot z$ avec $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$ et une variation pour z de l'ordre de 10^{-10} m

on aura $k \cdot \Delta z \approx 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$. On considère donc que sur une dimension de l'ordre de l'atome, le champ électrique est uniforme : on néglige donc pour des dimensions de cet ordre de grandeur le terme propagatif.

Soit en considérant $z \approx z_0$: $\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot e^{i(\alpha x - k z)} \approx \vec{E}_0 \cdot e^{-ikz_0} \cdot e^{i\alpha x} = \vec{E}_0 \cdot e^{i\alpha x}$ avec $\vec{E}_0 = \vec{E}_0 \cdot e^{-ikz_0}$

Q 19 : On applique le PFD à l'électron dans le référentiel lié au noyau supposé galiléen. Les actions subies sont : la force de Lorentz et la force de rappel élastique.

soit : $m \cdot \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -e \cdot \vec{E}_0 \cdot e^{i\alpha x} - m\omega_0^2 \cdot \vec{r}$ On cherche $\vec{r}$ en régime sinusoïdal forcé, soit en complexe

une solution de la forme : $\vec{r} = \vec{r}_0 \cdot e^{i\alpha x}$. Dans l'équation : $(-m \cdot \omega^2 + m \cdot \omega_0^2) \cdot \vec{r}_0 = -e \cdot \vec{E}_0$

Soit $\vec{r} = \frac{e}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \cdot \vec{E}_0 \cdot e^{i\alpha x}$

Par définition du moment dipolaire : $\vec{p} = -e \cdot \vec{r} = \frac{e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cdot \vec{E} = \chi \cdot \vec{E}$ soit $\chi = \frac{e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$

Q 20 : Avec $n = \sqrt{1 + \frac{N_v \chi}{\epsilon_0}} = \sqrt{1 + \frac{N_v \cdot e^2}{m \cdot \epsilon_0 \cdot (\omega_0^2 - \omega^2)}} \approx \sqrt{1 + \frac{N_v \cdot e^2}{m \cdot \epsilon_0 \cdot \omega_0^2}}$

De plus, la masse volumique s'exprime comme $\rho = M \cdot \frac{N_v}{Na}$, dans l'indice, on en tire :

$$n \approx \sqrt{1 + \frac{Na.e^2}{m.\epsilon_0.\omega_0^2.M} \cdot \rho}$$

Q 21 : Pour un gaz parfait de masse molaire M, on a : $\rho = PM/RT$.

Pour l'air, sous $P = 10^5$ Pa et $T = 293$ K, $\rho \approx 1,19$ kg.m⁻³

$\frac{Na.e^2}{m.\epsilon_0.\omega_0^2.M} \cdot \rho \approx 6,5.10^{-4} \ll 1$, on peut donc faire un développement limité à l'ordre 1 de l'indice n :

$$n \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{Na.e^2}{m.\epsilon_0.\omega_0^2.M} \cdot \rho$$

Q 22 : Système : ce qu'il y a dans le volume τ (limité par la surface fermée Σ) fixe dans le référentiel (R) de travail. On effectue un bilan de matière entre les dates t et $t+dt$:

$$m(t+dt) = m(t) + \text{ce qui entre} - \text{ce qui sort entre } t \text{ et } t + dt = m(t) - \oint_{\Sigma} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} dt$$

$$\iiint_{\text{volume } \tau} \rho(M, t+dt) \cdot d\tau = \iiint_{\text{volume } \tau} \rho(M, t) \cdot d\tau - \iiint_{\text{volume } \tau} \text{div}(\rho(M, t) \cdot \vec{v}(M, t)) \cdot d\tau dt \quad \text{en utilisant le théorème}$$

d'Ostrogradski

$$\text{Soit } \iiint_{\tau} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) \right] \cdot d\tau \cdot dt = 0 \quad \text{valable pour tout } \tau \text{ soit } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

On note $P = P_0 + p$ et $\rho = \rho_0 + \delta\rho$

On linéarise à l'ordre 1 soit $\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho_0 \cdot \text{div}(\vec{v}) = 0$

Q 23 : Equation de d'Alembert pour la grandeur vitesse des ondes sonores, avec c_s la célérité :

$$\Delta \vec{v} - \frac{1}{c_s^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = 0$$

On en tire la relation usuelle de la vitesse de phase : $\omega = c_s \cdot k$

On fait une recherche sous la forme d'une onde plane soit $\text{div}(\vec{v}) = -i \cdot \vec{k} \cdot \vec{v}$ et $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = i\omega \cdot \vec{v}$, de même pour les grandeurs p et $\delta\rho$.

Dans la conservation de la masse, on en tire $i\omega \cdot \delta\rho - i\rho_0 \cdot \vec{k} \cdot \vec{v} = 0$.

L'onde plane sonore étant une onde longitudinale, on obtient $\vec{k} \cdot \vec{v} = k \cdot v$ et donc $\delta\rho = \frac{\rho_0 v}{c_s}$.

Si le milieu est linéaire, on peut décomposer l'onde réaliste en une somme continue d'ondes harmoniques (par transformation de Fourier), étudier le comportement de chaque onde harmonique et reconstruire le signal obtenu par synthèse de Fourier.

Q 24 : On reprend l'expression de l'indice obtenue à la question 21, et pour une variation $\delta\rho$ de la masse volumique on obtient une variation δn de l'indice selon la formule :

$$\delta n = \frac{1}{2} \cdot \frac{Na.e^2}{m.\epsilon_0.\omega_0^2.M} \cdot \delta\rho = \frac{1}{2} \cdot \frac{Na.e^2}{m.\epsilon_0.\omega_0^2.M} \cdot \frac{\rho_0}{c_s} \cdot v$$

On obtient $K = 9,57.10^{-7} \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}$

Pour une couche d'air d'épaisseur e , la différence de marche entre un rayon qui la traverse avec un indice n et un rayon qui traverserait la même épaisseur d'indice 1 est $\delta = (n - 1) \cdot e$

On veut $\delta = \lambda_0$ soit $v = \lambda_0 / K.e = 5,22.10^{-5} \text{ m.s}^{-1}$.

C'est très peu, ce qui signifie que les variations dues à la vitesse v de déplacement de l'air sont très importantes.

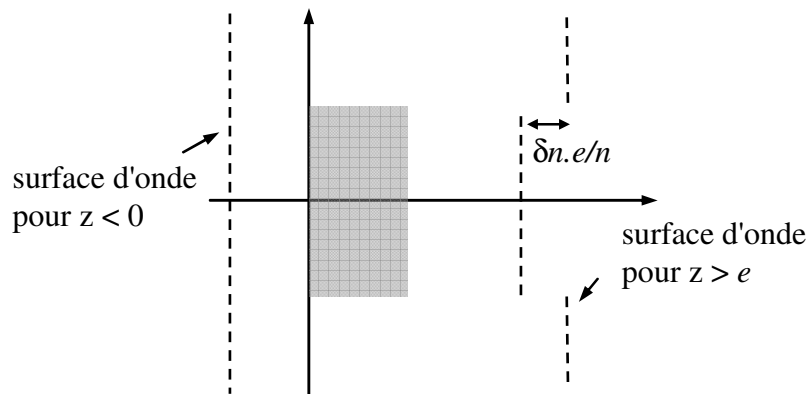
Q 25 : Une surface d'onde est l'ensemble des points pour lesquels la phase de l'onde émise par une source ponctuelle est la même.

Théorème de MALUS : Après un nombre quelconque de réflexions et de réfractions, les rayons lumineux issus d'une source ponctuelle sont perpendiculaires aux surfaces d'onde.

Q 26 : Pour $|x| < \frac{1}{2}.r_0$ pour $z < e$ on aura $\varphi(x,z) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n + \delta n).z$

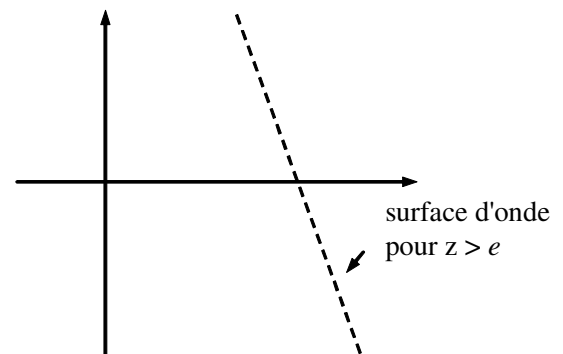
pour $z > e$ on aura $\varphi(x,z) = \frac{2\pi}{\lambda_0}[(n + \delta n).e + n.(z - e)] = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n.z + \delta n.e)$

Pour $|x| > \frac{1}{2}.r_0$ on aura $\varphi(x,z) = \frac{2\pi}{\lambda_0}.n.z$



Q 27 : Il suffit de remplacer δn par $b.x$ dans l'expression précédente pour avoir $\varphi(x,z)$ pour $z > e$, soit $\varphi(x,z) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n.z + b.x.e)$

Une surface d'onde sera obtenue pour $\varphi(x,z) = \text{Constante}$, on aura donc une droite affine, de pente négative $x = -\frac{n}{b.e}.z + \text{Cste}$



Q 28 : L'onde au niveau du télescope aura traversé une couche d'épaisseur e et pour $x \in [p.r_0 - \frac{1}{2}.r_0, p.r_0 + \frac{1}{2}.r_0]$ d'indice $n + \delta n_p$. Sa phase sera donc $\varphi_p = \varphi_0 + \frac{2\pi}{\lambda_0}(n.e + (\delta n_p + b.x).e)$ avec O pris comme origine des phases soit $\varphi_0 = 0$.

L'amplitude complexe sera donc : $\underline{S}(P(x, z = e)) = A_0.\exp[-i.\frac{2\pi}{\lambda_0}(n.e + (\delta n_p + b.x).e)]$

Q 29 : On a : $\underline{S}(M) = K. \iint_{\text{pupille}} \underline{S}_0(P(x, z = e)).\exp\left(i\frac{2\pi.nX}{\lambda_0.f'}x\right).dxdy$

On remplace $\underline{S}(P(x, z = e))$ par son expression vue à la question précédente, et on obtient :

$$\underline{S}(M) = A_0 \cdot K \cdot L \cdot \sum_{p=-N}^N \int_{pr_0 - \frac{1}{2}r_0}^{pr_0 + \frac{1}{2}r_0} \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda_0} (n + b \cdot x + \delta n_p) \cdot e\right) \cdot \exp\left(i \frac{2\pi \cdot nX}{\lambda_0 \cdot f'} x\right) \cdot dx$$

$$\underline{S}(M) = A_0 \cdot K \cdot L \cdot \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda_0} n \cdot e\right) \cdot \sum_{p=-N}^N \cdot \exp\left(-i \frac{2\pi \cdot \delta n_p \cdot e}{\lambda_0}\right) \cdot \int_{pr_0 - \frac{1}{2}r_0}^{pr_0 + \frac{1}{2}r_0} \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(b \cdot e - \frac{nX}{f'}\right) x\right) \cdot dx$$

On calcule $I = \int_{pr_0 - \frac{1}{2}r_0}^{pr_0 + \frac{1}{2}r_0} \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(b \cdot e - \frac{nX}{f'}\right) x\right) \cdot dx$

$$I = \frac{1}{-i \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(b \cdot e - \frac{nX}{f'}\right)} \cdot \left[\exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(b \cdot e - \frac{nX}{f'}\right) (p \cdot r_0 + \frac{1}{2} r_0)\right) - \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(b \cdot e - \frac{nX}{f'}\right) (p \cdot r_0 - \frac{1}{2} r_0)\right) \right]$$

$$I = \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(b \cdot e - \frac{nX}{f'}\right) p \cdot r_0\right) \cdot \frac{\sin\left[\frac{r_0 \cdot \pi}{\lambda_0} \left(b \cdot e - \frac{nX}{f'}\right)\right]}{\frac{\pi}{\lambda_0} \left(b \cdot e - \frac{nX}{f'}\right)}$$

Soit :

$$\underline{S}(M) = A_0 \cdot K \cdot L \cdot r_0 \cdot \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda_0} n \cdot e\right) \cdot \sum_{p=-N}^N \cdot \exp\left(-i \frac{2\pi \cdot \delta n_p \cdot e}{\lambda_0} - i \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(b \cdot e - \frac{nX}{f'}\right) p \cdot r_0\right) \cdot \frac{\sin\left[\frac{r_0 \cdot \pi}{\lambda_0} \left(b \cdot e - \frac{nX}{f'}\right)\right]}{\frac{r_0 \cdot \pi}{\lambda_0} \left(b \cdot e - \frac{nX}{f'}\right)}$$

On a bien la forme recherchée avec : $g(X) = r_0 \cdot \left(b \cdot e - \frac{nX}{f'}\right)$

et $\Phi_p(X) = -\frac{2\pi \cdot \delta n_p \cdot e}{\lambda_0} - \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(b \cdot e - \frac{nX}{f'}\right) p \cdot r_0$

Q 30 : On a donc $\sum_{p=-N}^N \sum_{q=-N}^N \cdot \exp\left(-i \frac{2\pi \cdot (\delta n_p - \delta n_q) \cdot e}{\lambda_0} - i \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(b \cdot e - \frac{nX}{f'}\right) (p - q) \cdot r_0\right)$, ce qui revient à

faire la somme des $\exp(-i\varphi_n)$ avec un grand nombre de φ_n pris aléatoirement entre 0 et 2π (modulo 2π) pour les termes où $p \neq q$. C'est donc équivalent à $\int_0^{2\pi} e^{-ix} dx = 0$. Il ne reste plus qu'à faire la

somme des termes pour lesquels $p = q$ pour lesquels l'exponentielle vaut 1, soit $\sum_{p=-N}^N 1 = 2N + 1$.

On obtient donc bien $\sum_{p=-N}^N \exp[i[\Phi_p(X) - \Phi_q(X)]] \approx 2N + 1$, l'approximation sera d'autant meilleure que N sera grand.

Q 31 : On calcule donc l'intensité reçue au point M :

$$I(M) = k \cdot A_0^2 \cdot K^2 \cdot L^2 \cdot r_0^2 \cdot (2N + 1) \cdot \left(\frac{\sin\left[\frac{\pi}{\lambda_0} g(X)\right]}{\frac{\pi}{\lambda_0} g(X)} \right)^2 \quad \text{avec } g(X) = r_0 \cdot \left(b \cdot e - \frac{nX}{f'}\right)$$

On obtient une tache de diffraction de même allure que la tache sans turbulences avec cependant quelques différences notables :

- Le centre n'est plus en $X = 0$, mais en $X = \frac{f' b e}{n}$ (du à l'inclinaison du front d'onde)
- Les annulations ont lieu pour $r_0 \cdot \left(b e - \frac{n X}{f'} \right) = m \cdot \lambda_0$ où m est un entier relatif non nul

La tache centrale a donc une largeur de $\Delta X = \frac{2 \lambda_0 f'}{n r_0}$, ce qui correspond à une fente de

largeur r_0 : on a donc augmentation de la largeur de la tache centrale.

- L'intensité maximale vaut ici $I_{MAX} = k \cdot A_0^2 \cdot K^2 \cdot L^2 \cdot r_0^2 \cdot (2N + 1)$ or la fente est de largeur $a = (2N + 1) \cdot r_0$ soit $I_{MAX} = k \cdot A_0^2 \cdot K^2 \cdot L^2 \cdot a^2 \cdot \frac{1}{2N + 1} = \frac{I_0}{2N + 1}$ l'intensité maximale est donc $2N + 1$ fois plus petite (l'intensité est plus petite car il y a au centre des interférences constructives et non constructives dues aux variations aléatoires).

Q 32 : On a : $\alpha_{dt} \cdot f' = \frac{\lambda_0 f'}{n r_0}$ avec le critère de Rayleigh, soit $\alpha_{dt} = \frac{\lambda_0}{n r_0} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ rad} = 1,03 \text{ sec}$ d'angle.

On aura donc $\alpha_{dt} = \alpha_d \cdot \frac{D_1}{r_0} = (2N + 1) \cdot \alpha_d$

C'est 64 fois plus grand qu'avant, le télescope a perdu en résolution. La turbulence atmosphérique diminue donc énormément la résolution (la même que celle d'un télescope de diamètre d'une dizaine de cm).

Q 33 : On a répondu à la question précédente : $D_{1\max} \approx 10 \text{ cm}$. Le flux incident est une fonction croissante du diamètre, on pourra détecter des sources d'intensité plus faible.

Partie III : Utilisation de l'optique adaptative

Q 34 : La séparatrice est placée après le système correcteur car elle envoie une partie du signal corrigé sur l'analyseur : cela permet d'avoir un système avec contre réaction.

Q 35 : $\tau_c = \frac{r_0}{v} = 0,1 \text{ s}$. La fréquence doit être supérieure à 10 Hz.

Q 36 : Il faut travailler en quasi monochromatique pour éviter d'avoir du brouillage dû à l'incohérence temporelle de la source.

Pour cet interféromètre le chemin optique ajouté est de l'ordre de $2H$ (on cherche ici une estimation), on aura donc un ordre $p = \frac{2H}{\lambda_0}$ pour λ_0 et $p' = \frac{2H}{\lambda_0 + \Delta \lambda}$ pour $\lambda_0 + \Delta \lambda$.

On aura brouillage pour $p = p' + 1$ (puisque on va ajouter les phases de 0 à 2π),

soit pour $\frac{2H_{\max}}{\lambda_0} = \frac{2H_{\max}}{\lambda_0 + \Delta \lambda} + 1$ avec $\Delta \lambda \ll \lambda_0$ soit $H_{\max} = \frac{\lambda_0^2}{2 \cdot \Delta \lambda} \approx 12,5 \mu\text{m}$

Q 37 : $\Delta\varphi = \varphi(x+a) + \frac{2\pi}{\lambda_0} (2H-a) - \varphi(x)$ (le texte précise $n \approx 1$).

Q 38 : C'est un cas d'interférences à deux ondes : $I(x) = \frac{1}{2} \cdot I_0 (1 + \cos \Delta\varphi)$ (on somme deux rayons d'intensité $\frac{1}{4} \cdot I_0$ dont les amplitudes complexes sont déphasées de $\Delta\varphi$).

Avec un développement limité à l'ordre 1 on obtient $\Delta\varphi \approx \frac{4\pi.H}{\lambda_0} + a \cdot \frac{d\varphi}{dx}(x)$

Soit $I(x) = \frac{1}{2} \cdot I_0 (1 + \cos \left(\frac{4\pi.H}{\lambda_0} + a \cdot \frac{d\varphi}{dx}(x) \right)) \approx \frac{1}{2} \cdot I_0 \cdot \left(1 + \cos \left(\frac{4\pi.H}{\lambda_0} \right) - a \cdot \frac{d\varphi}{dx}(x) \cdot \sin \left(\frac{4\pi.H}{\lambda_0} \right) \right)$

On a bien l'expression proposée par le texte avec $A = \frac{1}{2} \cdot I_0 \cdot \left(1 + \cos \left(\frac{4\pi.H}{\lambda_0} \right) \right)$

et $B = -\frac{1}{2} \cdot I_0 \cdot a \cdot \sin \left(\frac{4\pi.H}{\lambda_0} \right)$

Si $2H = (2j+1) \cdot \frac{\lambda_0}{4}$, alors $\cos \left(\frac{4\pi.H}{\lambda_0} \right) = 0$ et $\sin \left(\frac{4\pi.H}{\lambda_0} \right) = (-1)^j$

soit

$$A = \frac{1}{2} \cdot I_0$$

$$B = (-1)^{j+1} \cdot \frac{1}{2} \cdot I_0 \cdot a$$

Q 39 : La surface d'onde de la question 27 a comme équation : $x = -\frac{n}{b \cdot e} \cdot z + \text{Cste}$, soit sa normale a une angle

avec la direction z valant β tel que $\beta = \arctan \frac{be}{n}$

Pour un miroir incliné d'un angle $\frac{3\pi}{4} + \theta$, par rapport à Oz

(dans le sens positif, non précisé dans le texte...)

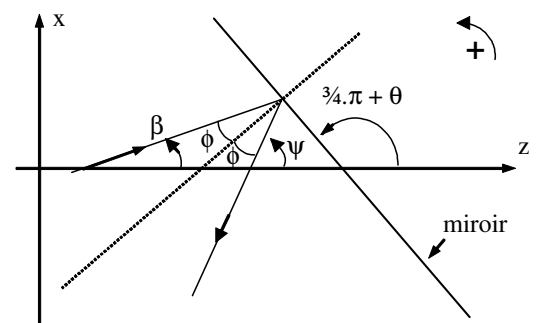
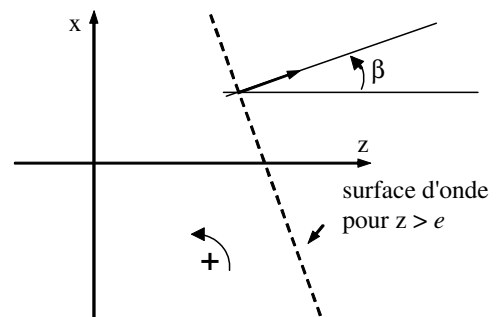
L'angle de la normale au miroir avec Oz est $\frac{\pi}{4} + \theta$

l'angle d'incidence $\phi = \frac{\pi}{4} + \theta - \beta$

et $\psi = \frac{\pi}{4} + \theta + \phi = \frac{\pi}{2} + 2\theta - \beta$

On veut $\psi = \frac{\pi}{2}$ soit $\theta = \frac{1}{2} \arctan \frac{be}{n}$, et comme be est petit

devant 1, on aura $\theta \approx \frac{be}{2n}$



Q 40 : Lorsqu'on déplace la $p^{\text{ième}}$ facette d'une longueur h_p perpendiculairement au miroir, on ajoute un chemin optique valant $\sqrt{2} \cdot h_p$ (indice 1).

On a donc compensation de $\delta n_p \cdot e$ si $\delta n_p \cdot e - \sqrt{2} \cdot h_p = 0$ soit $h_p = \frac{\delta n_p \cdot e}{\sqrt{2}}$