

Biophysique de la bactérie *Escherichia coli* bois.fournier@nec.fr

IA Densité particulière en dioxygène

$$1. \vec{j} = -D \text{grad } \eta \rightarrow j(r) = -D \frac{d\eta(r)}{dr}$$

$$2. \phi(r) = \frac{dN_{O_2}}{dt} = \oint_{S(r)} \vec{j}(r) \cdot d\vec{S} = -j(r) 4\pi r^2 = -D 4\pi r^2 \frac{d\eta}{dr}$$

Pour $r > R$, il n'y a ni consommation ni production de O_2 . En régime stationnaire, l'équation de diffusion devient $\text{div } \vec{j} = 0$: $\vec{j}$ est à flux conservatif et son flux ϕ ne dépend pas de r .

$$3. \frac{d\eta}{dr} = \frac{\phi}{D 4\pi r^2} \rightarrow \eta(r) = \frac{\phi}{4\pi D r} + A. \quad \text{Pour } r \rightarrow +\infty, \eta(r) = A = N_A G$$

Alors $\boxed{\eta_1 = \eta(R^+) = \frac{\phi}{4\pi D R} + N_A G}$

IB Taille critique de la bactérie

$$1. \text{En R.S., tout ce qui entre est consommé} \quad \phi = \mathcal{V}_A \cdot \mu \frac{4\pi R^3}{3} A$$

$$2. \eta_1 = \mathcal{V}_A \left(G - \frac{\mu R^3 A}{3D} \right) \text{ Si } R \nearrow \eta_1 \searrow \text{ car la max de la Section et donc sa consommation augmentent.}$$

$$3. \eta_1 \equiv 0 \rightarrow \boxed{R_c = \sqrt{\frac{3DCG}{\mu A}}} \quad [R_c] = \left(\frac{L^6 T^{-1} [mol] L^{-3}}{M L^{-3} [mol] H^{-1} T^{-1}} \right)^{1/2} = L$$

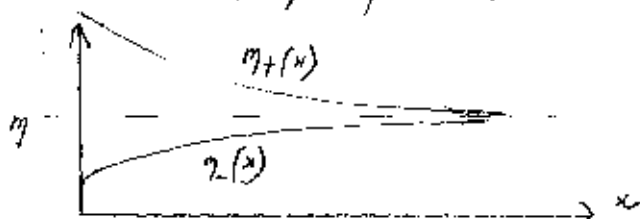
AN: $R_c = 8 \mu m$ C'est logiquement du même ordre de grandeur que $R = 1 \mu m$ et plus grand.

$$4. \phi = \mathcal{V}_A \mu \frac{4\pi R_c^3}{3} A = 2,6 \cdot 10^{10} s^{-1}$$

II A Etude préliminaire

1. Les cations se dirigent vers la plaque, les anions s'en éloignent.

Près de la plaque $\rho > 0$, très loin $\rho = 0$



cations

anions

cations

$$2. \vec{J}_{D+} = -e D_+ \vec{\text{grad}} q_+ = -e D_+ \frac{\partial \eta_+}{\partial x} \vec{e}_x ; \quad \vec{J}_{D-} = -(e \mu_- D_-) \frac{\partial \eta_-}{\partial x} \vec{e}_x = e D_- \frac{\partial \eta_-}{\partial x} \vec{e}_x$$

$$3. \vec{J}_i = q_i n_i \vec{v}_i \rightarrow \vec{J}_{e+} = q_+ e \mu_+ \vec{E} ; \quad \vec{J}_{e-} = \ominus q_- e \mu_- \vec{E} \quad (q_- = -e)$$

$$4. \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\text{rot} \vec{E} = \vec{0} \rightarrow \exists \varphi \mid \vec{E} = -\vec{\text{grad}} \varphi$$

$$5. a) \vec{J}_{D+} + \vec{J}_{e+} = \vec{0} \quad \vec{J}_{D-} + \vec{J}_{e-} = \vec{0}$$

$$-e D_+ \frac{\partial \eta_+}{\partial x} + e \mu_+ \eta_+ \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = 0 \rightarrow$$

$$e D_- \frac{\partial \eta_-}{\partial x} - e \mu_- \eta_- \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial \eta_+}{\partial x} + \frac{\mu_+ \eta_+}{D_+} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \eta_-}{\partial x} + \frac{\mu_- \eta_-}{D_-} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0 \end{aligned}}$$

$$b) \frac{d\eta_+}{\eta_+} = -\frac{\mu_+}{D_+} d\varphi \quad \xrightarrow{\int_x^{+\infty}} \ln\left(\frac{\eta_+}{\eta_+(x)}\right) = -\frac{\mu_+}{D_+} (0 - \varphi(x))$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{aligned} \eta_+(x) &= \eta \exp\left(\frac{\mu_+}{D_+} \varphi(x)\right) \\ \eta_-(x) &= \eta \exp\left(\ominus \frac{\mu_-}{D_-} \varphi(x)\right) \end{aligned}}$$

$$c) \mu_+/D_+ = \frac{e}{kT} \rightarrow$$

$$\mu_-/D_- = -\frac{e}{kT} \rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} \eta_+(x) &= \eta \exp\left(\frac{-e\varphi(x)}{kT}\right) \\ \eta_-(x) &= \eta \exp\left(\frac{e\varphi(x)}{kT}\right) \end{aligned}}$$

Les densités satisfont à la loi de Boltzmann

$$6. a) \rho(x) = \sum_i q_i n_i = e(\eta_+ - \eta_-) = \eta e \left[\exp\left(\frac{-e\varphi}{kT}\right) - \exp\left(\frac{e\varphi}{kT}\right) \right]$$

$$\text{pour } |e\varphi| \ll kT \quad \rho(x) = -\frac{2\eta e^2 \varphi}{kT}$$

$$b) \text{Maxwell-Gauss} \rightarrow \Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (\text{équation de Poisson}) \equiv \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon}$$

$$c) \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \frac{2\eta e^2}{kT \epsilon} \varphi = \frac{\varphi}{\lambda^2} \quad \lambda = \sqrt{\frac{kT \epsilon}{2\eta e^2}}$$

$$d) \varphi(x) = A e^{x/\lambda} + B e^{-x/\lambda} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0 \rightarrow A = 0$$

$$\vec{E} = -\frac{d\varphi}{dx} \vec{e}_x = +\frac{B}{\lambda} e^{-x/\lambda} \vec{e}_x \quad E(0+) = \frac{\sigma_{eff}}{\epsilon} \rightarrow \frac{\sigma_{eff}}{\epsilon} = +\frac{B}{\lambda}$$

$$\boxed{\varphi(x) = \frac{\lambda \sigma_{eff}}{\epsilon} \exp(-x/\lambda)} \quad < 0 \text{ car } \sigma_{eff} < 0 \quad (\epsilon < 0)$$

$$\rho(x) = - \frac{e n_e}{k T \epsilon} \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) = - \frac{\sigma_{eff}}{\lambda} \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) = \rho(x) \quad \geq 0$$

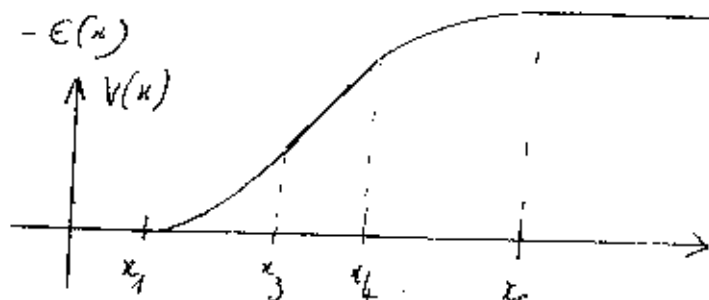
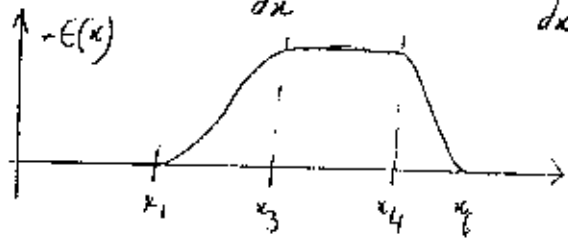
$$Q(x \rightarrow \infty) = \int_0^{\infty} \rho(x) \underbrace{(\sigma dx)}_{dQ} = - \sigma \sigma_{eff}$$

Or la plaque porte la charge $\sigma \sigma_{eff}$ d'où la neutralité.

ψ et ρ sont négligeables à partir de quelques λ , d'où 101.

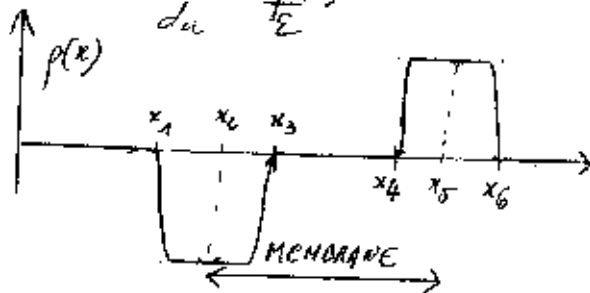
II B Répartition des charges de part et d'autre de la membrane

1. $\vec{E} = -\text{grad } V = -\frac{dV}{dx} \vec{e}_x \rightarrow \frac{dV}{dx} = -E(x)$



Rq: V est défini à une constante près

2. $\text{div } \vec{E} = \frac{dE}{dx} = \frac{\rho(x)}{\epsilon}$



3. a) $\lambda \approx 1 = \left(\frac{k T \epsilon}{2 e^2} \right)^{1/2}$ b) Soit $c = 5,0 \text{ gL}^{-1}$ la concentration massique de NaCl .
 $\eta = \frac{N_A c}{(M_{Na} + M_{Cl})} \cdot 10^3 \text{ mol} = 1,0 \text{ mol}$

→ Seuls les éléments de la membrane (1/10e de son épaisseur) sont chargés.

II C Potentiel de repos de la membrane de la cellule

1. Les ions K^+ sont plus concentrés dans le cytoplasme : il y a création d'un champ $\vec{E}$ dirigé vers la droite (selon P_{Na} en coexistence)

2. a) On tire cette relation entre x_2 et x_5 : $\ln\left(\frac{\eta_{\text{ext}}}{\eta_{\text{int}}}\right) = \frac{e}{k T} (\psi_{\text{int}} - \psi_{\text{ext}})$
 $\rightarrow \Delta\psi = \psi_{\text{int}} - \psi_{\text{ext}} = \frac{k T}{e} \ln\left(\frac{\eta_{\text{ext}}}{\eta_{\text{int}}}\right)$

b) $\Delta\psi = -0,12 \text{ V}$ ce qui correspond à la donnée du TP A4. !!

Partie III - Propulsion d'un micro-organisme par flagelle

II A. Chute d'un bâtonnet dans un fluide visqueux

1) En RP, $\vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$ la force de traînée est donc toujours la même quelle que soit la configuration.

Pour les expressions: $\vec{F}_x = F_y = F_z \rightarrow \lambda_{\perp} \vec{n}_x = \lambda_{\parallel} \vec{n}_z$ $\frac{\lambda_{\perp}}{\lambda_{\parallel}} = \frac{\vec{n}_z}{\vec{n}_x} = 2$ conforme à l'isotropie.

2) $[F] = [\eta] \frac{[\sigma]}{L^2} \cdot L^3 \quad (\vec{f}_\sigma = \eta \vec{\Delta} \vec{\sigma}) \rightarrow [\lambda] = \frac{[F]}{[\eta \sigma]} = L$
d'où $\lambda = 1$ et $\lambda_{\parallel} = 4L$

3) 
$$\vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp} = -\eta \lambda_{\parallel} \vec{n}_{\parallel} - \eta \lambda_{\perp} (\vec{n} - \vec{n}_{\parallel})$$
$$= -\eta 4L \vec{n}_{\parallel} - \eta (24L) (\vec{n} - \vec{n}_{\parallel}) = -\eta 4L (2\vec{n} - \vec{n}_{\parallel})$$

III B. Propulsion par flagelle

1) a) 1 tour complet, la bactérie avance de $2\pi b$. d'où $v = \frac{2\pi b}{T} = \frac{2\pi b}{2\pi/\Omega} = \Omega b$
 $v = 2h = 7 \cdot 10^{-5} \text{ m.s}^{-1}$

b) $Re = \frac{\rho v R}{\eta} = \frac{10^3 \cdot 7 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-6}}{10^{-3}} = 7 \cdot 10^{-5} \ll 1$ Rq: on peut aussi utiliser a comme longueur caractéristique.

2) a) $\vec{n}(t) = a \Omega \vec{e}_\theta$

b) $\vec{n}_{\parallel} = (\vec{n} \cdot \vec{u}) \vec{u} = \frac{a^2 \Omega}{a^2 + b^2} \vec{u} = \frac{a^2 \Omega (a \vec{e}_\theta + b \vec{e}_z)}{a^2 + b^2}$

III C. Existence d'une force propulsive

1) a) $d\vec{F}_1 = -4\pi\eta \left(2a \vec{e}_\theta - \frac{a^2 \Omega (a \vec{e}_\theta + b \vec{e}_z)}{a^2 + b^2} \right) \frac{dL}{\sqrt{a^2 + b^2} d\theta}$

Or $\int \vec{e}_\theta d\theta = \int \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} d\theta = \int d\vec{e}_\theta = \vec{0}$ pour un nombre entier p

$\rightarrow d\vec{F}_1 = \frac{4\pi\eta a^2 \Omega b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \underbrace{\int d\theta}_{+\frac{2\pi L}{2\pi a}} \cdot \vec{e}_z = 4\pi\eta \frac{L a b \Omega}{\sqrt{a^2 + b^2}} \vec{e}_z$ dL est positif, $d\theta$ aussi.

La bactérie se propulse selon z positif si la force de traînée est négative soit $\Omega < 0$

II. C.
 2) $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \left[4\pi\epsilon_0 \frac{La^2\Omega}{\sqrt{a^2+b^2}} - 4\pi\epsilon_0 v \frac{b^2+ca^2}{a\sqrt{a^2+b^2}} \right] \vec{e}_3$

3) a) $|\vec{F}_2| \sim (\pi q v) \times 8 \cdot 10^{-5} \text{ N}$
 $|\vec{T}| \sim (\pi q v) \times 0,3 \cdot 10^{-5} \text{ N} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{|\vec{T}|}{|\vec{F}_2|} \sim 0,04 \quad T \ll F_2 \end{array} \right.$

b) En RP, le PFD projeté selon l'horizontale donne $\vec{F} = 0$

la force de frottement totale est nulle $\rightarrow$

$$\Omega = \frac{h\Omega \cdot a^2}{\epsilon a^2 + b^2} \stackrel{AN}{=} 3,1 \cdot 10^{-5} \text{ rps}^{-1}$$

III. D. Aspect énergétique

1) $d\vec{H}_0 = \vec{OM}_A (d\vec{F}_1 + d\vec{F}_2) = (a\vec{e}_x + b\vec{e}_y)_A (d\vec{F}_1 + d\vec{F}_2)$

2) $H_0 = 4,37 \cdot 10^{-18} \text{ N.m}$

3) T au régime des R $P_\eta + H_0 \Omega = \frac{dE_0}{dt} = 0$
 $P_\eta = |H_0 \Omega| = 3,06 \cdot 10^{-15} \text{ W}$

Partie IV. Moteur rotatif biologique

A. Source d'énergie du moteur

1. $W = -\Delta G$ si la transformation est réversible.

2. $\delta W = -dG = -\left[(\mu_i - \mu_e) + e(\psi_i - \psi_e) \right] \frac{dn_i}{dn} = -\left[kT \ln \left(\frac{[H^+]_i}{[H^+]_e} \right) + e\Delta\psi \right] dm$

$\delta W = -e \left[\frac{kT}{e} \ln \left(\frac{[H^+]_i}{[H^+]_e} \right) + \Delta\psi \right] dm \quad [] = \Delta p$

3. $\Delta p = -(\ln 10) \frac{kT}{e} \Delta_p H + \Delta\psi \stackrel{AN}{=} -0,059 \Delta_p H + \Delta\psi$

4. $\Delta_p = -0,17 \text{ V}$ conforme à la donnée de IV C 3) : $\Delta_p = -0,17 \text{ V}$

B. Caractéristique couple-fréquence de rotation

1. $\vec{r} = r \vec{\delta} \vec{n} \rightarrow [\gamma] = [F] L^{-3} L^6 = [F] L^{-3} T \quad \text{or } [\omega] = T^{-1}$

Ainsi $[\Gamma] = ([F] L^{-3} T) \cdot L^3 \cdot T^{-1} = [F] L$ requiert la dimension d'un couple.

En RP (THC), $\Gamma = -\Gamma_\eta = 8\pi a^3 \gamma \omega$ ne correspond pas aux courbes proposées!

on peut faire varier γ en ω .

3. $\Gamma_{\max} = 8\eta a_0^3 \gamma (2\pi f)$

AN: $\Gamma_{\max} = 4,0 \cdot 10^{-18} \text{ N/m}$

4. Si on néglige la force de viscosité, alors $\Gamma_0 = \Gamma = 0 \rightarrow f \approx 350 \text{ Hz}$

IV C Evaluation du rendement du moteur

1. $P_\gamma = \Gamma \cdot \omega = 2,5 \cdot 10^{-16} \text{ W}$

2. $\phi = \frac{m_p}{\tau}$ avec $2\pi f = \omega \tau = 2\pi / \tau$

3. $P_n = \frac{\delta W}{dt} = -e \Delta p \frac{dm}{dt} = -e \Delta p \phi \stackrel{\text{AN}}{=} 3,3 \cdot 10^{-16} \text{ W}$

4. $\eta = \frac{P_n}{P_\gamma} = 0,76$

bas régime: η est constant
(P_n et P_γ proportionnels à f).

haut-régime

$\Gamma = \Gamma_{\max} \left(2 - \frac{f}{175}\right)$ $P_\gamma = \Gamma_{\max} \left(2 - \frac{f}{175}\right) 2\pi f$
 η est proportionnel à $\left(2 - \frac{f}{175}\right)$ et diminue avec f

IV D. Moteur pas à pas

1. $\Gamma_{\max} = 8n F$ $\bar{\Gamma} = \frac{\Gamma_{\max}}{8n} \stackrel{\text{AN}}{=} 2,5 \cdot 10^{-11} \text{ N}$

$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} = F \rightarrow d = 3 \text{ nm}$

2. $d = n \frac{2\pi}{52} = 2,4 \text{ nm}$ $W = Fd = 6,0 \cdot 10^{-20} \text{ J}$

3. $\lambda = 1 \rightarrow \delta W(\text{quadrup. } \mathbb{R}Ae) = W(\mathbb{R}DZ)$

$\downarrow$
 $-e \Delta p dm$

$\left\{ \begin{aligned} dm &= \frac{W}{8e \Delta p} = 2,2 \end{aligned} \right.$

il faut donc 3 protons.