

Partie I. Etude préliminaire

I.A $\vec{a}_e = \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OM}) = -\Omega^2 \vec{OX}$. On: $X = v't$, d'où: $\vec{a}_e = -\Omega^2 v't \vec{u}_x$

$\vec{a}_e = 2 \vec{\Omega} \wedge \vec{v}'$ d'où: $\vec{a}_e = 2 \Omega v' \vec{u}_y$

I.B.1 PFD à M dans (R') : $m \vec{a}_{M/(R')} = m \vec{g} + \vec{R}_{T \rightarrow M} - m \vec{a}_e - m \vec{a}_c + \vec{F}$
 $= \vec{0}$ car $\vec{v}'$ constante $\perp \vec{u}_x$ car il n'y a pas de frottements

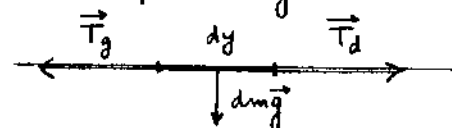
D'où: $\vec{R}_{T \rightarrow M} = -m \vec{g} + m \vec{a}_e$ soit: $\vec{R}_{T \rightarrow M} = mg \vec{u}_z + 2m\Omega v' \vec{u}_y$

I.B.2 Principe des actions réciproques: $\vec{R}_{M \rightarrow T} = -mg \vec{u}_z - 2m\Omega v' \vec{u}_y$

Partie II. Principe du délimètre à effet Coriolis

II.A.1 Le tube étant sans raideur, les forces de tension sont tangentes au tube.
 L'élément de tube de longueur dy est soumis à $\vec{T}_d$, $\vec{T}_g$ et à son poids $dm\vec{g}$

A l'équilibre, on doit avoir: $dm\vec{g} + \vec{T}_g + \vec{T}_d = \vec{0}$



La figure ci-contre montre que cette relation ne peut pas être vérifiée pour un tube horizontal, sauf si on néglige le poids.

II.A.2 PFD à l'élément dl : $dm\vec{a} = \vec{T}_g + \vec{T}_d$

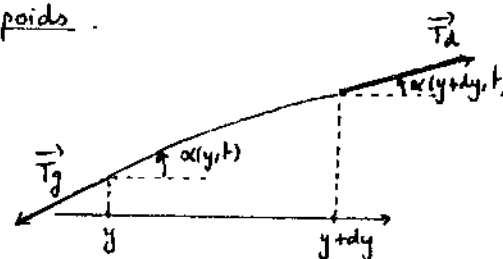
selon Oy : $0 = -T(y,t) \cos \alpha(y,t) + T(y+dy,t) \cos \alpha(y+dy,t)$

selon Oz : $\mu dl \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} = -T(y,t) \sin \alpha(y,t) + T(y+dy,t) \sin \alpha(y+dy,t)$

d'où: $0 = \frac{\partial}{\partial y} [T(y,t) \cos \alpha(y,t)]$ et $\mu dl \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial y} [T(y,t) \sin \alpha(y,t)] dy$

Au premier ordre en α : $\cos \alpha \approx 1$; $\sin \alpha \approx \alpha$; $dl = dy$

D'où: $\frac{\partial T}{\partial y}(y,t) = 0$ $\mu \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2}(y,t) = \frac{\partial}{\partial y} [\alpha(y,t) T(y,t)]$



II.A.3 On en déduit: $T(y,t) = T_0$ et $\mu \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2}(y,t) = T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial y}(y,t)$

On: $\alpha \approx \tan \alpha = \frac{\partial \delta}{\partial y}$ d'où: $\frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2}(y,t) = \frac{\mu}{T_0} \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2}(y,t)$ (E1)

II.A.4 Equation d'onde classique de D'Alembert à une dimension.

Solution générale du type: $\delta(y,t) = f(t - \frac{y}{c}) + g(t + \frac{y}{c})$ avec: $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$

Les fonctions f et g sont des ondes planes progressives dans les deux sens de l'axe Oy .

II.A.5 a) Ces solutions sont du type onde plane stationnaire.

b) On reporte $z(y,t) = f(y)g(t)$ dans (E_1) : $f''(y)g(t) = \frac{1}{c^2} f(y)g''(t)$

Donc: $\frac{g''(t)}{g(t)} = c^2 \frac{f''(y)}{f(y)} = \text{constante} = -\omega^2 \Rightarrow \begin{cases} g''(t) + \omega^2 g(t) = 0 \\ f''(y) + \frac{\omega^2}{c^2} f(y) = 0 \end{cases}$

ne dépend que de t ne dépend que de y

D'où: $\boxed{g(t) = g_0 \cos(\omega t - \varphi)} \quad \boxed{f(y) = f_0 \cos(ky - \psi)} \quad \text{avec: } k = \frac{\omega}{c}$

c) Conditions aux limites: $z(0,t) = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow \cos \psi = 0 \Rightarrow \psi = \frac{\pi}{2}$ par exemple
 $z(L,t) = 0 \Rightarrow f(L) = 0 \Rightarrow \cos(kL - \frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow \sin(kL) = 0$

d'où: $kL = m\pi \quad m \in \mathbb{N}^*$ donc: $\boxed{k = m \frac{\pi}{L}}$ et $\boxed{\omega = m \frac{\pi c}{L}}$ $m \text{ entier} > 0$

II.B.1 Le débit massique $D_m = \rho s \|\vec{v}(M)\|$ se conserve le long du tube car l'écoulement est stationnaire.

Donc: $\|\vec{v}(M)\| = v$ ne dépend pas du point M

II.B.2 Écoulement parfait $\Rightarrow$ pas de frottement $\Rightarrow d\vec{F}_{T \rightarrow F}$ perpendiculaire à $\vec{v}_y$

- II.B.3 • poids: $dm \vec{g}$ ($dm = \rho s dl \approx \rho s dy$ à l'ordre 1 en α)
 • force exercée par le tuyau: $d\vec{F}_{T \rightarrow F}$
 • force de pression en amont: $P(y) \cdot s \vec{v}_y(y)$
 • force de pression en aval: $-P(y+dy) \cdot s \vec{v}_y(y+dy)$
 • force d'inertie d'entraînement: $-dm \vec{a}_e$
 • force d'inertie de Coriolis: $-dm \vec{a}_c$

II.B.5 Système ouvert (S): le fluide dans le volume $A_0 B_0 C_0 D_0$ du tube

Système fermé (S^*): le volume de fluide hachuré ABCD qui coïncide avec (S) à l'instant t.

On a: $\frac{d(d\vec{p}^*)}{dt} = \frac{d\vec{p}^*(t+dt) - d\vec{p}^*(t)}{dt}$

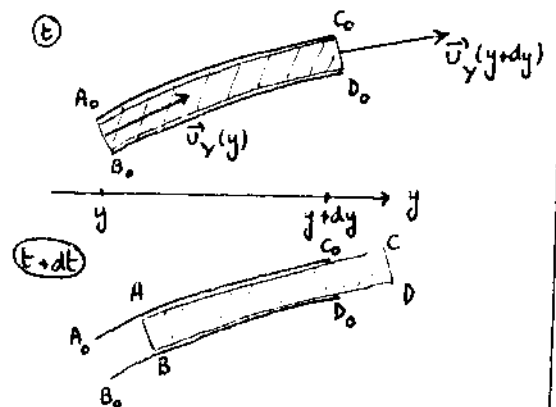
On a: $d\vec{p}^*(t) = d\vec{p}(t)$

• $d\vec{p}^*(t+dt) = d\vec{p}(t+dt) + d\vec{p}^{\text{stationnaire}}_{C_0 D_0 C D} - d\vec{p}^{\text{stationnaire}}_{A_0 B_0 A B}$
 $= d\vec{p}(t) + D_m dt v \vec{v}_y(y+dy) - D_m dt v \vec{v}_y(y)$

Donc: $\frac{d(d\vec{p}^*)}{dt} = D_m v [\vec{v}_y(y+dy) - \vec{v}_y(y)] = D_m v \left[\begin{pmatrix} \cos \alpha(y+dy) \\ \sin \alpha(y+dy) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos \alpha(y) \\ \sin \alpha(y) \end{pmatrix} \right]$
 $\approx D_m v \frac{\partial \alpha}{\partial y} dy \vec{v}_y \quad \text{car } \begin{cases} \cos \alpha \approx 1 \\ \sin \alpha \approx \alpha \end{cases}$

et $\alpha \approx \tan \alpha = \frac{\partial z}{\partial y}$; $\vec{v}_y \approx \vec{v}_z$ à l'ordre 1 en α

d'où: $\boxed{\frac{d(d\vec{p}^*)}{dt} = D_m v \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy \vec{v}_z}$



II.B.4
$$d\vec{F}_{ie} = -\rho s dy \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \vec{u}_z$$

$$d\vec{F}_{ic} = -2\rho s dy \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial y} \vec{u}_x \wedge \vec{v}_y = -2 \underbrace{\rho s v}_{= D_m} dy \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial y} \vec{u}_z \text{ d'où: } d\vec{F}_{ic} = -2 D_m dy \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial y} \vec{u}_z$$

II.B.6 On écrit le PFD pour (s^*) dans (R') :

$$\frac{d(d\vec{p}^*)}{dt} = -\rho s dy g \vec{u}_z + d\vec{F}_{T \rightarrow F} - \rho s dy \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \vec{u}_z - 2 D_m dy \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial y} \vec{u}_z + P(y) s \vec{u}_y(y) - P(y+dy) s \vec{u}_y(y+dy)$$

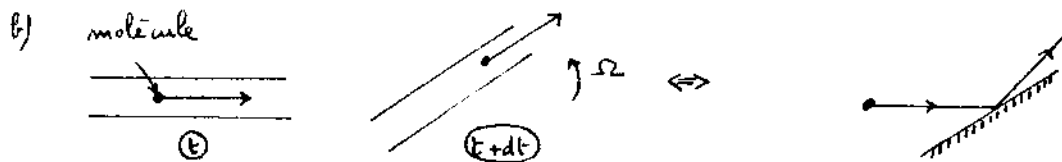
On suppose que: $\vec{u}_y(y+dy) \approx \vec{u}_y(y)$ et $\vec{u}_z = \vec{u}_z^*$ car $\cos \alpha \approx 1$ à l'ordre un en α

La relation précédente projetée dans le plan perpendiculaire à $\vec{u}_y$ donne:

$$D_m v \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy \vec{u}_z = -\rho s dy g \vec{u}_z + d\vec{F}_{T \rightarrow F} - \rho s dy \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \vec{u}_z - 2 D_m dy \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial y} \vec{u}_z$$

d'où:
$$d\vec{F}_{F \rightarrow T} = -dy \left[\rho s g + \rho s \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + 2 D_m \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial y} + D_m v \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right] \vec{u}_z$$

- II.B.7a) 1^{er} terme: poids
 2^e terme: force d'inertie d'entraînement
 3^e terme: force d'inertie de Coriolis
 4^e terme: taux de variation de quantité de mouvement



Le changement d'orientation dans (R) de la vitesse d'une molécule de fluide équivaut à une collision sur la paroi inférieure du tube.

D'où une force dirigée selon $-\vec{u}_z$ et proportionnelle à la vitesse angulaire de rotation $\Omega = \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial y}$, qui correspond au 3^e terme de $d\vec{F}_{F \rightarrow T}$.

II.C.1. On néglige le poids, donc le terme $\rho s g$ dans l'expression de $d\vec{F}_{F \rightarrow T}$

II.C.2 PFD à l'élément de tube; dans (R) : $dm \vec{a} = \vec{T}_g + \vec{T}_d + d\vec{F}_{F \rightarrow T}$

Par projection selon Oy , on obtient toujours: $T(y,t) = T_0$

Par projection selon Oz : $\mu dy \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T_0 [\alpha(y+dy,t) - \alpha(y,t)] - dy \rho s \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - dy 2 D_m \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial t} - dy D_m v \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

$$\begin{aligned} (\mu + \rho s) \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial y} - 2 D_m \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial t} - D_m v \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \\ &= (T_0 - D_m v) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 D_m \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial t} \end{aligned}$$

donc:
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\mu + \rho s}{T_0 - D_m v} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \frac{2 D_m}{T_0 - D_m v} \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial y} = 0$$

On en déduit:
$$K_1 = \frac{\mu + \rho s}{T_0 - D_m v} \quad K_2 = \frac{1}{T_0 - D_m v}$$

II.C.3 a) (3) donne: $G''(y) + K_1 \omega^2 G(y) - 2j\omega K_2 D_m G'(y) = 0$ (4)

b) Conditions aux limites: $z(0,t)=0 \Rightarrow G(0)=0 \Rightarrow A+B=0$
 $z(L,t)=0 \Rightarrow G(L)=0 \Rightarrow A \exp(j\sqrt{\omega} L) + B \exp(-j\sqrt{\omega} L) = 0$
 $\Rightarrow A [\exp(j\sqrt{\omega} L) - \exp(-j\sqrt{\omega} L)] = 0$
 $\Rightarrow 2j A \sin[\sqrt{K_1 + K_2^2 D_m^2} \omega L] = 0$

d'où: $\sqrt{K_1 + K_2^2 D_m^2} L = m\pi$ soit: $\omega_m = \frac{m^2 \pi^2}{L^2 (K_1 + K_2^2 D_m^2)}$ $m \in \mathbb{N}^*$

On a alors: $G(y) = 2j A \sin\left(\frac{m\pi}{L} y\right) \exp(j K_2 D_m \omega_m y)$

II.C.4 a) Pour $D_m = 0$, l'équation (3) devient: $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\mu + \rho s}{T_0} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0$

C'est analogue à l'équation (E1) à condition de remplacer la masse linéique μ du tuyau vide par la masse linéique $\mu + \rho s$ du tuyau rempli de fluide.

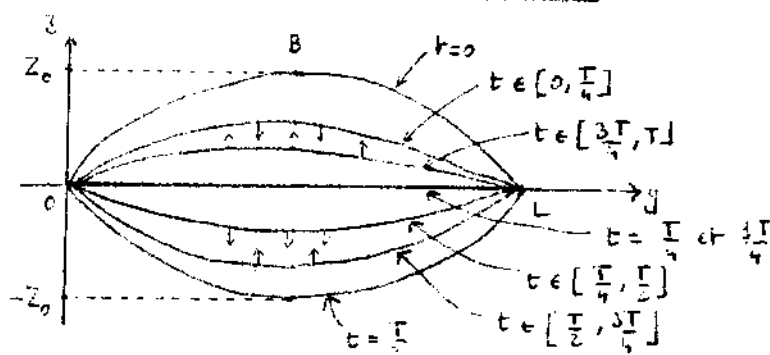
b) $\omega_1 = 2\pi f = \frac{\pi c}{L}$ avec $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu + \rho s}} \Rightarrow 4\pi^2 f^2 = \frac{\pi^2}{L^2} \frac{T_0}{\mu + \rho s} \Rightarrow T_0 = 4f^2 L^2 (\mu + \rho s)$

A.N: $T_0 = 195 \text{ N}$

c) On a: $z(y,t) = A \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) \cos(2\pi f t)$ pour le mode $m=1$

On doit avoir: $z\left(\frac{L}{2}, t\right) = Z_0 \cos(2\pi f t)$ d'où: $A = Z_0$

d'où: $z(y,t) = Z_0 \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) \cos(2\pi f t)$



d) Deux points symétriques par rapport à B ont le même mouvement.

II.C.5 $z(y,t) = G(y) e^{j\omega t} = 2j A \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) e^{j K_2 D_m 2\pi f t} e^{j 2\pi f t}$
 $= 2A \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) e^{j [2\pi f t + 2\pi f K_2 D_m y + \frac{\pi}{2}]}$

$z(y,t) = 2A \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) \cos\left[2\pi f t + 2\pi f K_2 D_m y + \frac{\pi}{2}\right]$

On doit avoir: $z\left(\frac{L}{2}, t\right) = Z_0 \cos(2\pi f t) = 2A \cos\left[2\pi f t + 2\pi f K_2 D_m \frac{L}{2} + \frac{\pi}{2}\right]$

Pour que ce soit vrai à tout t , il faut: $Z_0 = 2A$ et $2\pi f K_2 D_m \frac{L}{2} = -\frac{\pi}{2}$

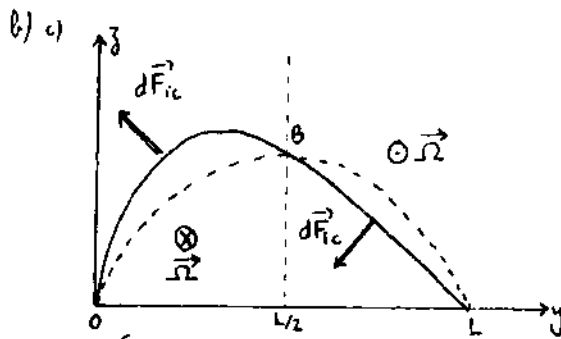
d'où: $z(y,t) = Z_0 \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) \cos\left[2\pi f t + 2\pi f K_2 D_m y - \frac{\pi}{2}\right]$

soit: $z(y,t) = Z_0 \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) \cos\left[2\pi f \left(t + K_2 D_m y - \frac{1}{4f}\right)\right]$ $K_2 = 2\pi f K_2 D_m$

II. C. 6 a) Pour $D_m = 0$, on avait une loi en $\cos(2\pi f t)$

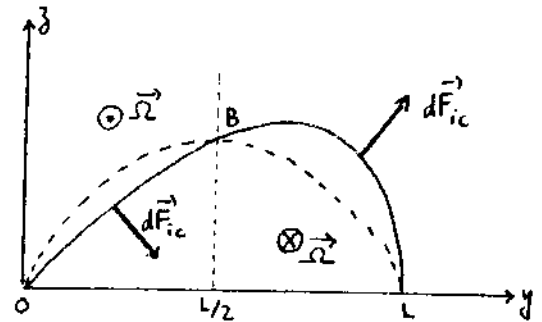
Pour $D_m \neq 0$, on a : $\cos(2\pi f t + \varphi)$ avec : $\varphi > 0$ pour les points entre B et D
 $\varphi < 0$ pour les points entre O et B

⇒ Les points entre B et D sont en avance par rapport à la situation où $D_m = 0$
 Les points entre O et B sont en retard par rapport à la situation où $D_m = 0$



$0 < t < \frac{T}{4}$
 (mouvement descendant)

pour cette région : $d\vec{F}_{ic} = -dm \, 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{\text{fluide}/R'}$



$\frac{3T}{4} < t < T$
 (mouvement ascendant)

II. C. 7 a) $Z_1 = Z_0 \sin \frac{\pi}{4}$ A.N. : $Z_1 = 0,71 \text{ mm}$

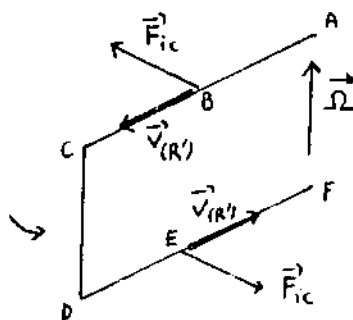
b) $z(\frac{L}{4}, t) = Z_1 \cos(2\pi f t - K \frac{L}{4})$; $z(\frac{3L}{4}, t) = Z_1 \cos(2\pi f t + K \frac{L}{4})$

D'où : $\varphi = \frac{KL}{4} - (-\frac{KL}{4}) = \frac{KL}{2}$ donc : $\varphi = \pi f K_2 L D_m$

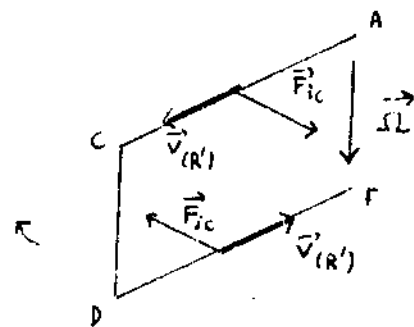
c) Si K_2 est une constante, alors φ est proportionnel à D_m d'après la relation ci-dessus.
 A.N. : $\pi f K_2 L = 0,26$

II. D. 1 En absence d'écoulement, les points B et E ont le même mouvement

II. D. 2 sens > 0 :



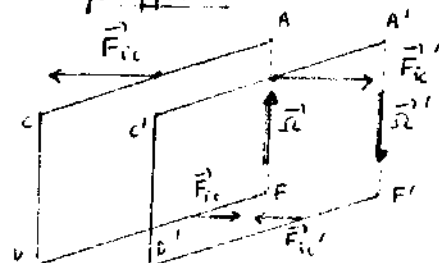
sens < 0



II. D. 3 La branche CD ne subit pas de force ayant pour origine la force de Coriolis (car $\vec{\Omega} \parallel \vec{v}_{(R')}$) mais elle va subir une torsion due aux forces opposées sur les branches AC et DF.

II. D. 4 Les points B et E vont avoir des mouvements relatifs opposés.

II. D. 5 Pour augmenter la vitesse relative d'un tube par rapport à l'autre, il faut les faire tourner en sens inverse



III.A.1 Les lignes du champ magnétique crée par l'aimant s'écartent quand z augmente
 $\Rightarrow$ $\|\vec{B}_{aimant}\|$ diminue quand z augmente
 $\Rightarrow \Phi$ diminue quand z augmente, donc Φ dépend de z

III.A.2 La bobine est un conducteur mobile dans une région où règne un champ magnétique
 $\Rightarrow$ phénomène d'induction
 $\Rightarrow$ force électromotrice induite dans la bobine

III.A.3 a) ARQS: on néglige les phénomènes de propagation du champ électromagnétique
 validité: temps de propagation $\tau = \frac{D}{c}$ sur la distance $D \ll$ période T du régime sinusoïdal

b) Loi d'ohm locale pour un conducteur mobile en présence de $\vec{B}$ variable:

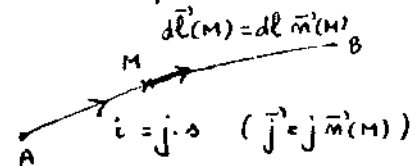
$$\vec{j} = \sigma (-\text{grad } V + \vec{E}_m) \quad \text{avec: } \vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v}_{\text{conducteur}} \wedge \vec{B} \quad \text{champ électromoteur induit}$$

On intègre de A à B:

$$\int_A^B \frac{\vec{j}}{\sigma} \cdot d\vec{l} = \int_A^B -\text{grad } V \cdot d\vec{l} + \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$$

$$= i \int_A^B \frac{d\ell}{\sigma S} = V_A - V_B = \mathcal{E}_{AB} \quad \text{force induite}$$

$$= Ri$$



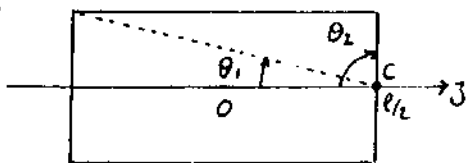
Donc: $\boxed{U = Ri - \mathcal{E}_{AB}}$

III.A.4 approximation: la bobine est fermée sur elle-même $\rightarrow$ circuit fermé
 loi de Faraday: $\mathcal{E}_{PQ} = - \frac{d\Phi}{dt}$

La relation du III.A.3 b), sachant que $i=0$, donne: $\boxed{\mathcal{E}_{PQ} = \frac{d\Phi}{dt}}$

III.A.5 $\Phi = \Phi(z)$ avec $z(t) \Rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi}{dz} \cdot \frac{dz}{dt}$ et $\frac{dz}{dt} = v(t)$ donc: $\boxed{\mathcal{E}_{PQ} = \frac{d\Phi(z)}{dz} \cdot v(t)}$

III.B.1



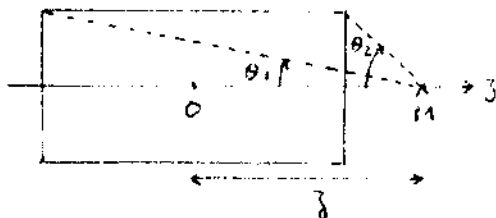
$$\vec{B}(C) = \frac{1}{2} \mu_0 I l \cos \theta_1 \vec{u}_z \quad \text{avec: } \cos \theta_1 = \frac{l}{\sqrt{R^2 + l^2}}$$

$$\|\vec{B}(C)\| = \frac{1}{2} \mu_0 I l \frac{l}{\sqrt{R^2 + l^2}}$$

A.N: $\|\vec{B}(C)\| = 0,33 \text{ T}$

Pour une bobine de $n = 1000 \text{ spires.m}^{-1}$, parcourue par $i = 1 \text{ A}$: $\|\vec{B}(C)\| = \frac{1}{2} \mu_0 n i \frac{l}{\sqrt{R^2 + l^2}} = 6 \cdot 10^{-4} \text{ T}$
 Le champ magnétique obtenu est plus faible que avec l'aimant.

III.B.2



$$\cos \theta_1 = \frac{z + \frac{l}{2}}{\sqrt{R^2 + (z + \frac{l}{2})^2}} \quad \cos \theta_2 = \frac{z - \frac{l}{2}}{\sqrt{R^2 + (z - \frac{l}{2})^2}}$$

donc: $\boxed{B(z) = \frac{1}{2} \mu_0 I l \left[\frac{z + l/2}{\sqrt{R^2 + (z + l/2)^2}} - \frac{z - l/2}{\sqrt{R^2 + (z - l/2)^2}} \right]}$

III.B.3 $B(z) = \frac{1}{2} \mu_0 I l f(z)$ avec $f(z) = \dots$ On choisit $l \ll R$ pour avoir les plus belles relations la $B(z)$, donc $f(z) \approx \dots$

$$\begin{aligned} \text{III.C.1} \quad \Phi &= N \iint_{\text{surface}} \vec{B}(M) \cdot (dS \vec{u}_z) = N \int_0^R \int_0^{2\pi} B_z(r, z) r dr d\theta \\ &= 2\pi N \int_0^R \left[B(z) - \frac{\pi^2}{4} \frac{d^2 B(z)}{dz^2} \right] r dr \\ &= 2\pi N \left[B(z) \cdot \frac{R^2}{2} - \frac{d^2 B(z)}{dz^2} \cdot \frac{R^4}{16} \right] \end{aligned}$$

donc : $\Phi = N \pi R^2 \left[B(z) - \frac{R^2}{8} \frac{d^2 B(z)}{dz^2} \right]$

III.C.2 On a aussi : $\Phi = N \pi R^2 \cdot \frac{1}{2} \mu_0 n \left[\int(z) - \frac{R^2}{8} \int''(z) \right]$ or : $\frac{R^2}{8} = \frac{1}{2}$ avec $R = 2 \text{ mm}$

donc : $\Phi = \frac{1}{2} N \pi R^2 \mu_0 n g(z)$ avec g en mm

La courbe de la figure 11 montre que $g(z)$ est quasiment rectiligne pour $5-0,7 < z < 5+0,7$
 Φ est donc une fonction affine de z sur cet intervalle.

La pente de $g(z)$ pour $z = 5 \text{ mm}$ est : $\frac{0,75 - 1,25}{5,3 - 4,6} = -0,7 \text{ mm}^{-1} = -700 \text{ m}^{-1} = g'(z)$

La pente de $\Phi(z)$ est donc : $\Phi'(z) = \frac{1}{2} N \cdot \pi R^2 \mu_0 n g'(z) = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot \pi \cdot (2 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 5 \cdot 10^5 \cdot (-700)$

A.N : $\Phi'(z) = -0,3 \text{ Wb} \cdot \text{m}^{-1}$

III.C.3 Le tube est solidaire de la bobine, donc $v(y, t) = v(0')$

On : $U_{PQ} = \Phi'(z) \cdot v(0')$

Donc U_{PQ} est proportionnelle à $v(y, t)$, le coefficient de proportionnalité étant $\Phi'(z) = -0,3 \text{ Wb} \cdot \text{m}^{-1}$

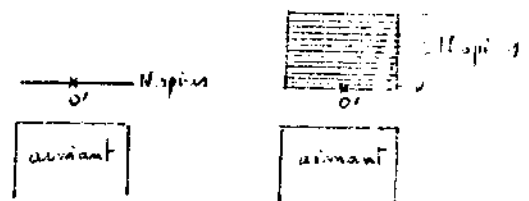
III.C.4 L'amplitude de la vitesse des points A et C est : $\omega Z_1 = 2\pi f Z_1$ ($f = 50 \text{ Hz}$)

Donc : $U_0 = |\Phi'(z)| \cdot 2\pi f \cdot Z_1$ A.N : $U_0 \approx 0,1 \text{ V}$

III.C.5 a) On a utilisé une expression approchée de $B_z(r, z)$

.. On a supposé la bobine plate (N spires au même endroit) alors qu'il s'agit en fait d'un solénoïde (bobine cylindrique)

Ce deuxième point implique que l'on a surestimé le flux à travers la bobine car les N spires de la bobine plate sont plus proches de l'aimant que les N spires du solénoïde.



b) Il n'est pas nécessaire de connaître exactement le coefficient car on ne s'intéresse pas à la précision de la vitesse mais à sa plausibilité.

Partie IV. Filtrage du signal et mesure du déphasage

IV.A.1 On peut avoir un signal parasite du secteur à 50 Hz.

Des effets non linéaires peuvent donner un signal de fréquence $2f$
(car $\cos^2(2\pi ft) = \frac{1}{2}(1 + \cos(4\pi ft)) \Rightarrow$ fréquence $2f$)

IV.A.2 Pour atténuer les fréquences inférieures et supérieures à f , on peut utiliser un filtre pass-bande de fréquence centrale f .

IV.A.3 Pour les deux schémas, on a: $v_- = \frac{n U_s}{n + (k-1)n}$ (diviseur de tension) donc: $U_s = k v_-$

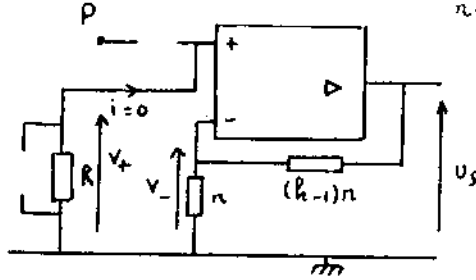


schéma basse-fréquence: les condensateurs se comportent comme des circuits ouverts

On a: $v_+ = R_i = 0$ donc $v_- = v_+ = 0$
D'où: $U_s = 0$

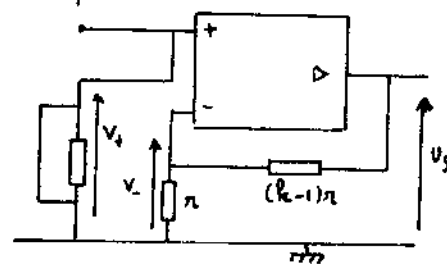


schéma haute-fréquence: les condensateurs se comportent comme des fils.

On a $v_+ = 0$ (tension aux bornes d'un fil)
D'où: $v_- = v_+ = 0$ puis $U_s = 0$

Les hautes et basses fréquences sont coupées, il s'agit d'un filtre pass-bande.

$$\text{IV.A.4 } H = \frac{k \cdot \frac{1}{R} \cdot j\omega C}{\left(\frac{1}{R} + j\omega C\right)\left(\frac{2}{R} + j\omega C\right) + j\omega C\left(\frac{1}{R} + (1-k)\frac{1}{R}\right)} = \frac{j\omega C k}{(1 + j\omega RC)\left(\frac{2}{R} + j\omega C\right) + j\omega C(2-k)}$$

$$= \frac{j\omega C k}{\frac{2}{R} + j\omega C + 2j\omega C + \omega^2 RC^2 + 2j\omega C - k j\omega C} = \frac{k}{5 - k + j\omega RC + \frac{2}{j\omega RC}}$$

$$\text{soit: } H = \frac{\frac{k}{5-k}}{1 + j\left(\frac{RC\omega}{5-k} - \frac{2}{(5-k)RC}\right)} \Rightarrow \frac{Q}{\omega_0} = \frac{RC}{5-k} \quad Q\omega_0 = \frac{2}{(5-k)RC}$$

$$\text{d'où: } \boxed{Q = \frac{\sqrt{2}}{5-k}} \quad \boxed{\omega_0 = \frac{\sqrt{2}}{RC}} \quad \boxed{G_0 = \frac{k}{5-k}}$$

G_0 : gain maximum
 ω_0 : pulsation centrale sélectionnée
 Q : facteur de qualité

$$\text{IV.A.5 On a: } \left[1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right] U_s = G_0 U_c \quad \text{On: } j\omega \leftrightarrow \frac{d}{dt} \quad \frac{1}{j\omega} \leftrightarrow \int dt$$

$$\text{Donc: } U_s(t) + \frac{Q}{\omega_0} \frac{dU_s(t)}{dt} + Q\omega_0 \int U_s(t) dt = G_0 U_c(t)$$

$$\text{En dérivant par rapport à } t, \text{ on a: } \left[\frac{d^2 U_s(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0^2}{k} \frac{dU_s(t)}{dt} + \omega_0^2 U_s(t) \right] = G_0 \frac{dU_c(t)}{dt}$$

Le filtre est stable si $\frac{\omega_0^2}{k} > 0$ d'où: $k \leq 5$

IV.A.6 Puisque ce filtre doit sélectionner la fréquence $f = 80 \text{ Hz}$, on en déduit que: $\omega_0 = 2\pi f = 160\pi$.

	fréquence	$\frac{\omega}{\omega_0}$	$\log \frac{\omega}{\omega_0}$	$G_{dB} = 20 \log H $	$ H $	φ	tension de sortie
$U_{e1}(t)$	50 Hz	0,63	-0,2	11	3,5	$\frac{\pi}{2}$	$U_{s1}(t) = 3,5 E \cos(100 \pi t + \frac{\pi}{2})$
$U_{e2}(t)$	80 Hz	1	0	37	71	0	$U_{s2}(t) = 71 E \cos(160 \pi t)$
$U_{e3}(t)$	100 Hz	1,25	0,1	17	7,1	$-\frac{\pi}{2}$	$U_{s3}(t) = 7,1 E \cos(200 \pi t - \frac{\pi}{2})$

Le signal utile de fréquence $f = 80 \text{ Hz}$ est fortement amplifié par rapport aux autres. La sélection est bonne.

IV.A.7 Ce n'est pas en accord avec la partie III où l'on supposait : $i_e = 0$
Pour y remédier, il suffit de placer un montage suiveur à l'entrée du filtre.

IV.B.1 Les tensions $u(t)$ et $u'(t)$ n'ayant pas de composantes continues, les couplages AC et DC sont équivalents.

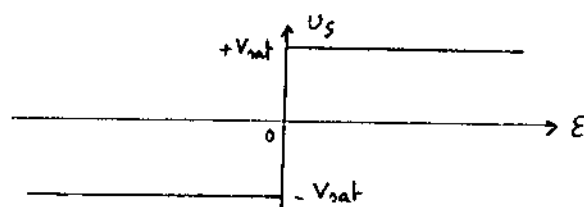
IV.B.2 La période des signaux correspond à 3,8 cm sur la figure.
Le décalage entre les deux courbes correspond à 0,6 cm.

Donc : $\varphi = 2\pi \cdot \frac{0,6}{3,8}$

A.N : $\varphi = 1 \text{ rad} = 57^\circ$

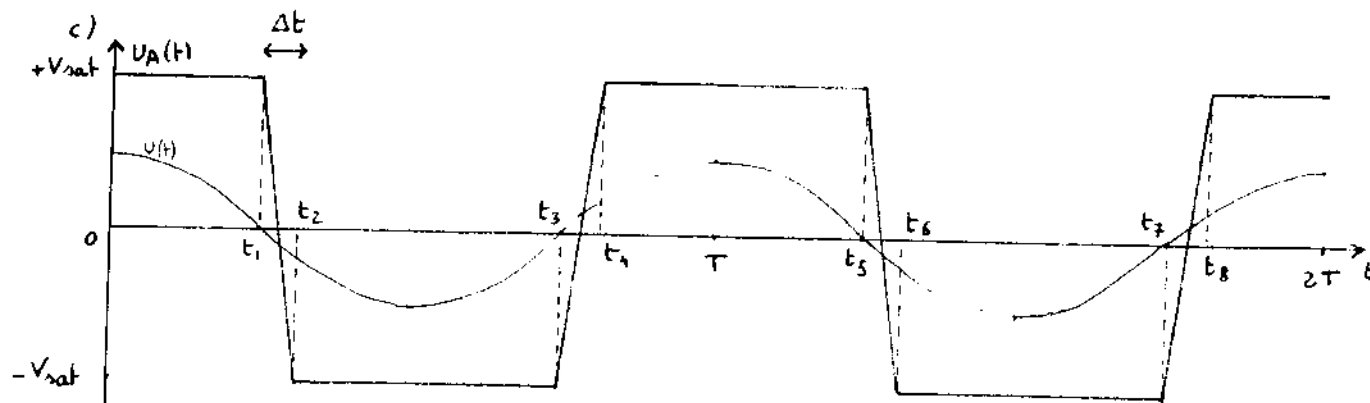
IV.B.3 Pour améliorer la précision, on choisit la sensibilité la plus petite afin d'avoir des courbes étalées au maximum sur l'écran.

IV.C.1 a)

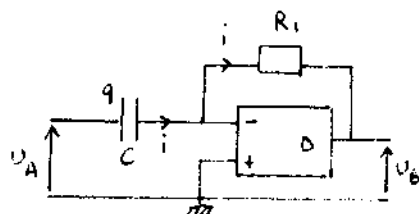


b) $E = U_e$, donc : $U_e > 0 \Rightarrow U_s = +V_{sat}$; $U_e < 0 \Rightarrow U_s = -V_{sat}$

On connaît le signe de U_e grâce à la valeur de U_s . On a donc bien une comparaison à 0.



IV.C.2 a)



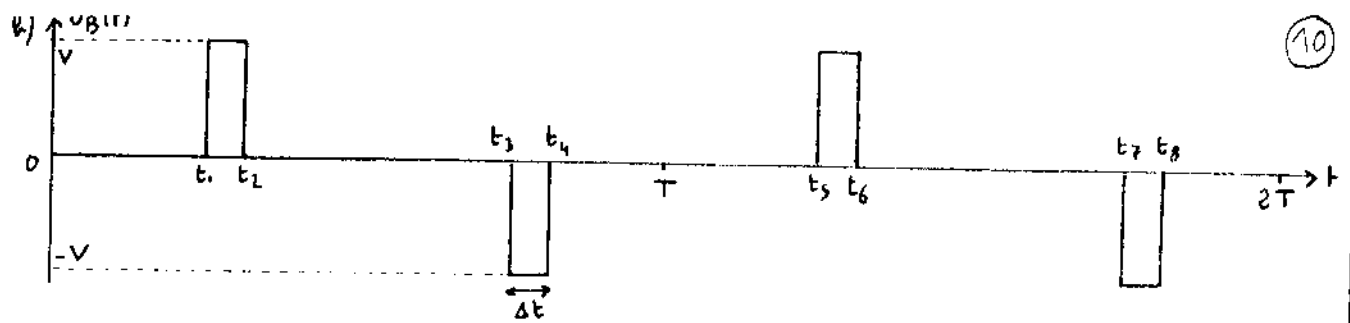
$U_A = \frac{q}{C}$

$R_1 i + U_B = 0$

$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dU_A}{dt}$

d'où : $U_B = -R_1 C \frac{dU_A}{dt}$

circuit d'intégrateur

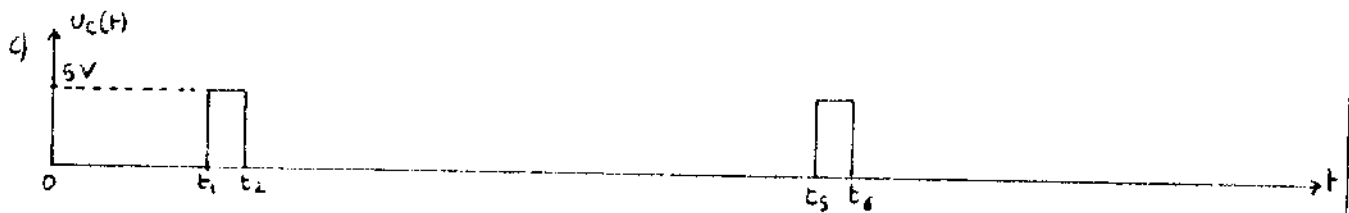


remarque: $V = R_1 C \frac{2V_{sat}}{\Delta t}$

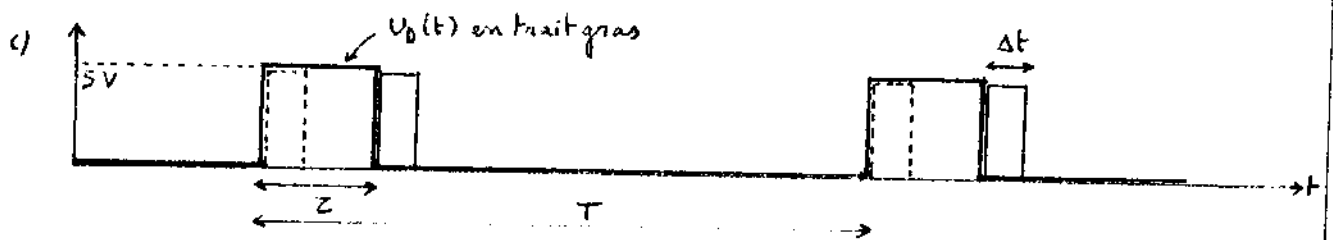
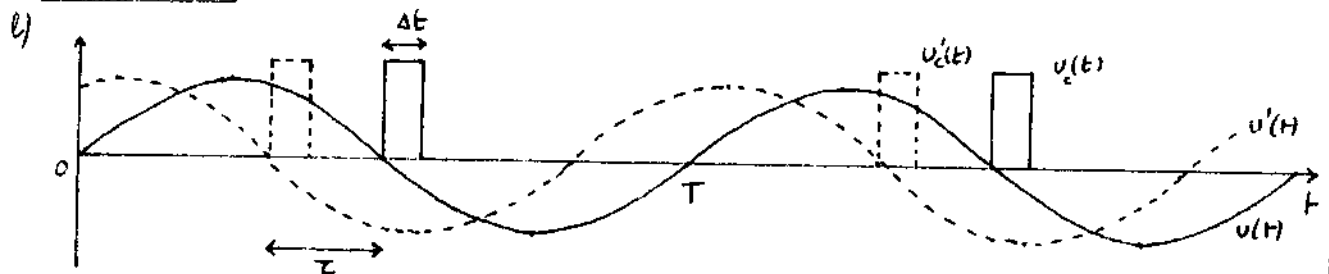
IV.C.3 a) i_c circule aussi dans R_3 (impédance d'entrée infinie du bloc D) $\Rightarrow U_B - U_C = R_2 i_c$

b) $U_B > U_C \Rightarrow i_c > 0$ (d'après a) $\Rightarrow U_C = 5V$ (d'après la caractéristique)
 $U_B < U_C \Rightarrow i_c < 0$ (d'après a) $\Rightarrow U_C = 0V$ (d'après la caractéristique)

Conclusion: $U_B > 5V \Rightarrow U_C = 5V$; $U_B < 5V \Rightarrow U_C = 0$



IV.C.4 a) $CP = 2\pi f \tau$



IV.C.5 le théorème de Millman sur l'entrée -, en notation complexe, donne: $0 = \frac{U_D}{R_0} + (\frac{1}{R_0} + j\omega C_0) U_S$

Donc: $U_S + j\omega R_0 C_0 U_S = -\frac{R_0}{1} U_D$

En revenant au cas général: $U_S(t) + R_0 C_0 \frac{dU_S}{dt} = -\frac{R_0}{1} U_D(t)$

Si $R_0 C_0 \gg T$, on peut négliger U_S devant $R_0 C_0 \frac{dU_S}{dt}$. Il reste: $\frac{dU_S(t)}{dt} = -\frac{1}{R_0 C_0} U_D(t)$

En intégrant pendant la durée τ où $U_D(t) = \text{constante} = 5V$ et en supposant $U_S = 0$ à l'instant initial, on a: $U_S = -\frac{5}{R_0 C_0} \tau$

On $\tau = \frac{CP}{2\pi f}$ donc: $U_S = -\frac{5}{R_0 C_0} \cdot \frac{CP}{2\pi f}$ est bien proportionnel à f