

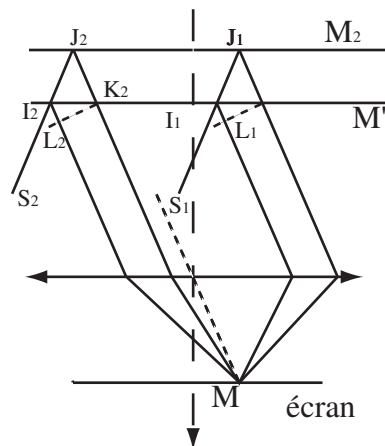
I Principe de la tomographie par cohérence optique (OCT).

A Préliminaires

1. Pour que deux ondes lumineuses produisent un phénomène d'interférences en un point M , il faut qu'elles soient cohérentes, c'est-à-dire qu'elles soient isochrones et que le déphasage entre les deux ondes soit constant au point M . Pour réaliser expérimentalement cette condition on réalise deux sources secondaires à partir d'une même source primaire et on veille à ce que la différence de marche n'excède pas la longueur typique de cohérence temporelle de la source (dans le modèle des trains d'ondes c'est la longueur moyenne d'un train d'onde).
2. Une onde monochromatique est une onde qui dépend sinusoidalement du temps, une fréquence donnée correspond à une couleur donnée.

En pratique : Si on dispose d'une lampe spectrale, on l'associe à un filtre qui ne laisse passer qu'une longueur d'onde particulière ; si on ne dispose que d'une source de lumière blanche on peut décomposer la lumière à l'aide d'un prisme ou d'un réseau, puis isoler une partie du faisceau lumineux émergent correspondant à un secteur angulaire donné, on isole ainsi longueur d'onde particulière. Enfin, si on dispose d'un laser, il génère une lumière monochromatique.

3. (a) Pour réaliser une source quasi-monochromatique et quasi-ponctuelle à distance finie, on peut utiliser une lampe spectrale, puis un filtre qui ne laisse passer qu'une raie de la lampe et éclairer un diaphragme de faible rayon que l'on assimilera à une source ponctuelle.
Si on utilise un laser, comme il génère une onde plane, il faut placer une lentille à la sortie du laser, on prend souvent un objectif de microscope.
- (b) On peut placer l'écran où l'on veut dans le champ d'interférence. Il suffit qu'il soit parallèle aux plans des miroirs, si on souhaite observer des anneaux.
On observe alors des anneaux dits « d'égale inclinaison », centrés sur l'axe zz' .
- (c) Si on remplace la source ponctuelle par une source étendue, si de plus l'écran est placé à distance finie, alors l'éclairement de l'écran devient uniforme, car les figures d'interférences relatives aux différents points de la source ne se recouvrent pas, elles se brouillent.
Il faut éloigner l'écran des miroirs, si on veut voir des franges à nouveau, car les franges sont localisées à l'infini.
4. (a) Si on considère la construction des rayons qui interfèrent au même point M , issus de S_1 , la différence de marche en M est $\delta(M) = (I_1 J_1) + (J_1 K_1) - (I_1 L_1)$



La construction des rayons qui interfèrent au même point M , mais issus d'un point source S_2 différent, fait apparaître une différence de marche identique, elle ne dépend pas du point source considéré, ce qui justifie que lorsque l'interféromètre en lame d'air est utilisé avec une source étendue, alors la surface de localisation des franges d'interférences est à l'infini.

- (b) L'angle d'inclinaison i des rayons qui interfèrent en M est : $i = \frac{r}{f'}$, donc la différence de marche est

$$\delta = 2.(z - z_0) \cos\left(\frac{r}{f'}\right).$$

B OCT. Domaine temporel

1. Lorsque $z = z_0$, l'épaisseur est nulle, $e = z - z_0 = 0$, la position particulière s'appelle le contact optique. Théoriquement, l'écran devrait être uniformément éclairé avec la couleur de la source, car la différence de marche est nulle partout, c'est la teinte plate

En pratique, l'éclairement est constitué de taches car l'épaisseur de la lame d'air que constitue les miroirs n'est pas rigoureusement nulle.

2. Avec la source de lumière blanche, on observe les teintes de Newton, au contact optique, et lorsqu'on translate le miroir, les anneaux n'apparaissent jamais, car les figures d'interférences des différentes couleurs se recouvrent, la teinte est uniformément blanche.

Avec la lumière verte, lorsqu'on translate à partir du contact optique, on voit apparaître des anneaux, dont le nombre s'accroît, les anneaux se resserrent. Au bout de quelques millimètres, la différence de marche en tout point atteint la longueur de cohérence temporelle de la source à vapeur de mercure, on ne peut plus voir les figures d'interférences.

Avec un laser He-Ne, la longueur de cohérence est très supérieure au centimètre, alors les anneaux se resserrent, mais la figure ne se brouille pas.

3. Comme le photodétecteur est placé en F' , l'angle i des rayons avec l'axe du système est nul, alors $\delta(F') = 2.(z - z_0)$ et l'intensité lumineuse :

$$\begin{aligned} I(F') &= 2.I_0.(1 + \cos(2.\pi.\sigma_0.2.(z - z_0))) \\ &= 2.I_0.(1 + \cos(4.\pi.\sigma_0.(z - z_0))) \end{aligned}$$

4. (a) Deux ondes dont les nombres d'onde sont dans deux intervalles spectraux différents n'interfèrent pas entre elles, l'intensité résultante est la somme des intensités dues à chaque onde.

L'intensité résultante d'une source non monochromatique est :

$$I(F') = \int_{-\infty}^{\infty} 2.G(\sigma).(1 + \cos(4.\pi.\sigma.(z - z_0))).d\sigma$$

(b)

$$\begin{aligned} I(F') &= \int_{-\infty}^{\infty} 2.G(\sigma).(1 + \cos(4.\pi.\sigma.(z - z_0))).d\sigma \\ &= \int_{\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}}^{\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2}} 2.G_0.(1 + \cos(4.\pi.\sigma.(z - z_0))).d\sigma \\ &= G_0.\left[\sigma + \frac{1}{4.\pi.(z - z_0)}. \sin(4.\pi.\sigma.(z - z_0))\right]_{\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}}^{\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2}} \\ &= 2.G_0.\left(\Delta\sigma + \frac{1}{4.\pi.(z - z_0)}. [\sin(4.\pi.(\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2}).(z - z_0)) - \sin(4.\pi.(\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}).(z - z_0))]\right) \\ &= 2.G_0.\left(\Delta\sigma + \Delta\sigma.\frac{1}{4.\Delta\sigma\pi.(z - z_0)}. [2.\sin(4.\pi.(\frac{\Delta\sigma}{2}).(z - z_0)).\cos(4.\pi.\sigma_0.(z - z_0))]\right) \\ &= 2.G_0.\Delta\sigma(1 + \text{sinc}(2.\Delta\sigma\pi.(z - z_0)).\cos(4.\pi.\sigma_0.(z - z_0))) \\ &= 2.G_0.\Delta\sigma.[1 + \text{sinc}(2.\Delta\sigma\pi.(z - z_0)).\cos(4.\pi.\sigma_0.(z - z_0))] \end{aligned}$$

Soit :

$$I(F') = 2.G_0.\Delta\sigma.[1 + \text{sinc}(2.\Delta\sigma\pi.(z - z_0)).\cos(4.\pi.\sigma_0.(z - z_0))]$$

On peut alors identifier :

$$C = 2.G_0.\Delta\sigma \text{ et } V = \text{sinc}(2.\Delta\sigma\pi.(z - z_0)).$$

- (c) Sur la figure 2 on lit $z_0 = 5,000\text{mm}$, position du maximum d'intensité lumineuse.

La première annulation de V , est obtenue pour $z_1 = 5,0025\text{mm}$, on en déduit $\frac{1}{2.\Delta\sigma} = (z_1 - z_0)$ soit $\Delta\sigma = 2.10^5\text{m}^{-1}$.

Il y a 20 maxima successifs entre les deux annulations de V situées de part et d'autre du maximum, on en déduit $\frac{1}{\Delta\sigma} = 20.\frac{1}{2.\sigma_0}$ soit $\sigma_0 = 10.\Delta\sigma$, finalement $\sigma_0 = 0,2.10^7\text{m}^{-1}$, ce qui correspond à $\lambda_0 = 500\text{nm}$, longueur d'onde qui correspond au maximum de sensibilité de l'oeil.

- (d) Oui, cette modélisation permet d'expliquer les observations du I.B.3., on en déduit les largeurs spectrales : pour la source de lumière blanche de l'ordre de grandeur de 10^6m^{-1} , pour la source verte de l'ordre de grandeur de 10^3m^{-1} et pour le laser très inférieur à 10^3m^{-1} .

La longueur de cohérence est l'inverse de $\Delta\sigma$.

5. Il faut reprendre le calcul de l'intensité obtenue lorsque deux ondes d'amplitudes différentes interfèrent entre elles. Notons A_0 l'amplitude d'une onde et $\rho.A_0$ l'amplitude de la deuxième, déphasée de $\varphi = 2.\pi.\sigma_0.\delta(F')$ par rapport à la première.

L'amplitude de l'onde résultante, en valeur complexe est $\underline{A} = A_0.(1 + \rho.e^{j.\varphi})$, l'intensité s'en déduit, si on note c un coefficient constant de dimensionnement :

$$\begin{aligned} I &= c. \frac{\underline{A}.\underline{A}^*}{2} \\ &= c. \frac{1}{2}. A_0.(1 + \rho.e^{j.\varphi}).A_0.(1 + \rho.e^{-j.\varphi}) \\ &= c. \frac{1}{2}. A_0^2.(1 + \rho^2 + 2.\rho.\cos(\varphi)) \\ &= c. \frac{1}{2}. A_0^2.(1 + \rho^2). \left(1 + \frac{2.\rho}{(1 + \rho^2)}.\cos(\varphi)\right) \end{aligned}$$

On peut en conclure que :

$$I = (1 + \rho^2).I_0.\left(1 + \frac{2.\rho}{(1 + \rho^2)}.\cos(4.\pi.\sigma_0.(z - z_0))\right)$$

La nouvelle figure d'interférence est moins contrastée, car l'intensité lumineuse ne peut plus s'annuler.

6. (a) L'amplitude de l'onde résultante $\underline{A} = A_0.(1 + \sum_{i=1}^N \rho_i.e^{j.\varphi_i})$
Son intensité est :

$$\begin{aligned} I &= c. \frac{\underline{A}.\underline{A}^*}{2} \\ &= c. \frac{1}{2}. A_0.(1 + \sum_{i=1}^N \rho_i.e^{j.\varphi_i}).A_0.(1 + \sum_{i=1}^N \rho_i.e^{-j.\varphi_i}) \\ &= c. \frac{1}{2}. A_0^2.(1 + 2.\sum_{i=1}^N \rho_i.\cos(\varphi_i)) \end{aligned}$$

Soit :

$$I = I_0.(1 + 2.\sum_{i=1}^N \rho_i.\cos(\varphi_i))$$

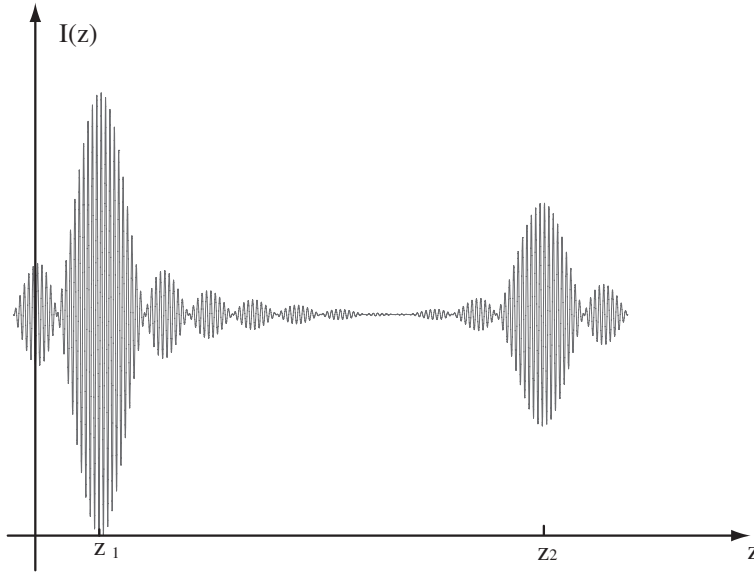
En se limitant au premier ordre en ρ_i , et en notant $\varphi_i = 4.\pi.\sigma_0(z - z_i)$.

- (b) On peut reprendre le calcul précédent, et en identifiant, on établit :

$$I(z) = G_0.\Delta\sigma.[1 + 2.\sum_{i=1}^N V(z - z_i).\rho_i.\cos(4.\pi.\sigma_0(z - z_i))]$$

- (c) Cas particulier $N = 2$.

$$I(z) = G_0.\Delta\sigma.[1 + 2.(\rho_1.\text{sinc}(2.\pi.\Delta\sigma.(z - z_1)).\cos(4.\pi.\sigma_0(z - z_1)) + \rho_2.\text{sinc}(2.\pi.\Delta\sigma.(z - z_2)).\cos(4.\pi.\sigma_0(z - z_2)))]$$



- (d) Il est en effet possible de mesurer ρ_i et z_i à condition que le graphe de l'intensité fasse apparaître des maxima bien séparés les uns des autres, à savoir pour $z_{i+1} - z_i$ bien supérieur à $\frac{1}{\Delta\sigma}$, ou encore pour $z_{i+1} - z_i$ bien supérieur à la longueur de cohérence de la source. Il faut donc utiliser la source dont la longueur de cohérence est la plus faible possible, à savoir la source de lumière blanche.

C OCT. Domaine fréquentiel

1. L'intensité obtenue par interférences des ondes de nombre d'onde compris entre σ et $\sigma + d\sigma$, lorsque les deux miroirs sont parfaitement réfléchissants est :

$$dI = 2.G(\sigma).(1 + \cos(4.\pi.\sigma.z_0)).d\sigma$$

On en déduit :

$$f(\sigma) = 2G(\sigma).(1 + \cos(4.\pi.\sigma.z_0))$$

2. (a) Pour une source de profil spectral rectangulaire, on calcule $R(u)$:

$$\begin{aligned} R(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma) \cos(4.\pi.\sigma.u).d\sigma \\ &= \int_{\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}}^{\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2}} 2.G_0.(1 + \cos(4.\pi.\sigma.z_0)).\cos(4.\pi.\sigma.u).d\sigma \\ &= \int_{\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}}^{\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2}} 2.G_0.\cos(4.\pi.\sigma.u).d\sigma \\ &\quad + \int_{\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}}^{\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2}} 2.G_0.\frac{1}{2}(\cos(4.\pi.\sigma.(u + z_0)) + \cos(4.\pi.\sigma.(u - z_0)))d\sigma \\ &= 2.G_0.\Delta\sigma.[\text{sinc}(2.\pi.\Delta\sigma.u).\cos(4.\pi.\sigma_0.u) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\text{sinc}(2.\pi.\Delta\sigma.(u - z_0)).\cos(4.\pi.\sigma_0.(u - z_0)) + \text{sinc}(2.\pi.\Delta\sigma.(u + z_0)).\cos(4.\pi.\sigma_0.(u + z_0)))] \end{aligned}$$

On identifie alors $r(u) = 2.G_0.\Delta\sigma.\text{sinc}(2.\pi.\Delta\sigma.u)$.

- (b) Le premier graphe de la figure 4 fait apparaître les deux enveloppes en sinuscordinal bien séparées, car z_0 est choisi très supérieur à $\frac{1}{\Delta\sigma} = 2,5 \mu m$.

Le deuxième graphe ne permet pas de déterminer z_0 avec certitude, car on peut confondre l'enveloppe en $\frac{1}{2}.\text{sinc}(2.\pi.\Delta\sigma.(u - z_0))$ avec le premier maximum secondaire de $\text{sinc}(2.\pi.\Delta\sigma.(u))$. Ici z_0 est presque égal à $\frac{1}{\Delta\sigma} = 2,5 \mu m$.

On constate en effet que pour $z_0 > d$ avec $d = \frac{2}{\Delta\sigma}$ environ, on peut écrire :

$$R(u > d) = \frac{1}{2}.r(u - z_0).\cos(4.\pi.\sigma_0.(u - z_0)),$$

car dans ce domaine de valeurs de u , les autres termes présents dans $R(u)$ sont négligeables.

3. (a) En se limitant à nouveau aux termes d'ordre 1 en ρ_i :

$$f(\sigma) = G(\sigma) \cdot \left(1 + 2 \cdot \sum_{i=1}^N \rho_i \cdot \cos(4\pi \cdot \sigma \cdot z_i)\right)$$

- (b) Dans le cas de la source à profil rectangulaire, on en déduit qu'on obtiendra :

$$R(u) = r'(u) \cdot \cos(4\pi \cdot \sigma_0 \cdot u) + \sum_{i=1}^N \rho_i \cdot [r'(u - z_i) \cdot \cos(4\pi \cdot \sigma_0 \cdot (u - z_i)) + r'(u + z_i) \cdot \cos(4\pi \cdot \sigma_0 \cdot (u + z_i))]$$

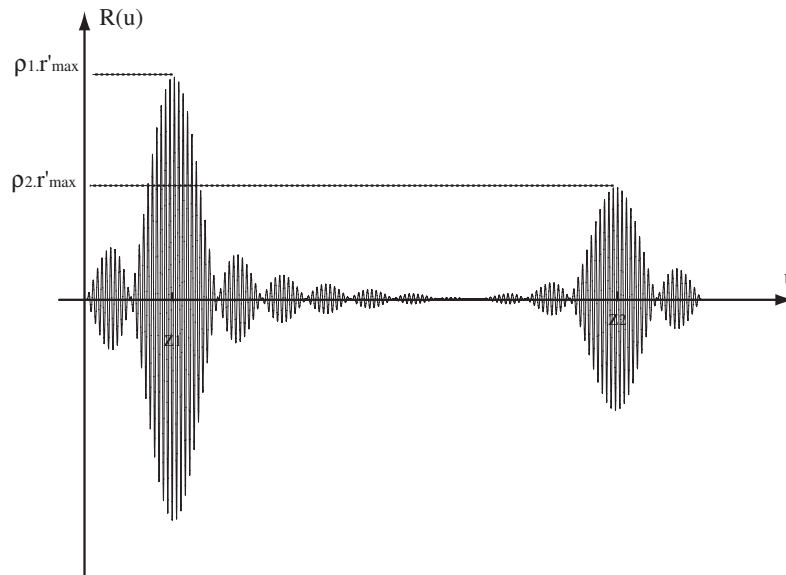
La fonction $r'(u) = G_0 \cdot \Delta\sigma \cdot \text{sinc}(2\pi \cdot \Delta\sigma \cdot u)$ est la même que précédemment au coefficient 2 près. On note que le coefficient 2 présent dans $f(\sigma)$ disparaît avec le coefficient $\frac{1}{2}$ de la linéarisation du produit des cosinus.

- (c) Lorsque $z_1 > d$,

$$R(u > d) = \sum_{i=1}^N \rho_i \cdot r'(u - z_i) \cdot \cos(4\pi \cdot \sigma_0 \cdot (u - z_i))$$

Car tous les autres termes de $R(u)$ sont négligeables dans ce domaine de valeurs de u .

L'allure de $R(u)$ est alors :



- (d) Pour pouvoir discerner deux surfaces adjacentes, il faut que la fonction $R(u)$ permette de bien séparer les maxima de deux surfaces successives, l'ordre de grandeur de la distance est encore la longueur de cohérence de la source, à nouveau on a intérêt à choisir une source de faible longueur de cohérence. Le résultat est le même qu'à la question I.B.6.
- (e) Avantage : il est inutile de translater les miroirs, donc on ne perd pas en précision sur leur position. Inconvénient il faut calculer $R(u)$, ce qui peut être fait de façon numérique, avec une source d'erreur à la numérisation.

D Mesure du spectre avec un réseau

1. Pour observer un pic d'intensité lumineuse dans la direction qui fait un angle θ avec la direction incidente, il faut que la différence de marche entre les ondes qui traversent deux traits successifs soit un multiple entier de la longueur d'onde.

$$\frac{1}{n} \cdot \sin(\theta) = p \cdot \lambda$$

L'ordre du pic visible dans la direction θ est :

$$p = \frac{\sin(\theta)}{n \cdot \lambda}$$

2. La largeur angulaire d'un pic est égale à $\Delta(\sin\theta)$, ce qui correspond à une largeur de tache :

$$\begin{aligned}\Delta x &= f' \cdot \Delta(\tan\theta) \\ &= f' \cdot \Delta(\theta) \\ &= \frac{f' \cdot 2 \cdot \lambda}{L}\end{aligned}$$

Soit :

$$\Delta x = \frac{f' \cdot 2 \cdot \lambda}{L}$$

Remarque :

Ici, je considère l'approximation des petits angles valide, du fait de l'utilisation de la lentille mince dans les conditions de Gauss, $\theta \simeq \sin\theta \simeq \tan\theta$. Mais cette approximation semble contestable, puisque le calcul de $\sin\theta$ à l'ordre 1 pour la position du maximum d'intensité du rouge donne 0,37 soit un angle de 22 degrés. Si on veut utiliser correctement le dispositif, il faut prévoir un système qui le mette en rotation (type plateau de goniomètre) de sorte que la lentille soit toujours utilisée dans les conditions de Gauss. Comme ce dispositif n'est pas décrit, je continue dans l'approximation de Gauss.

Alors, numériquement $\Delta x = 7,5 \mu m$.

La limitation de la résolution vient donc du capteur C.C.D., il est apte à séparer les taches dès qu'elles ne se forment pas sur la même cellule de capteur.

La tache est plus grande qu'en théorie, car la source n'est pas rigoureusement ponctuelle.

3. Par contre une cellule du capteur ne peut pas distinguer deux taches dont l'écart angulaire est égal à : $\Delta\sin\theta = \frac{a}{f'}$, ce qui, dans un ordre "p" donné, correspond à $\frac{1}{n} \cdot \Delta(\sin(\theta)) = p \cdot (\delta\lambda)$ soit

$$\begin{aligned}\delta\lambda &= \frac{1}{n \cdot p} \cdot \frac{a}{f'} \\ &= \frac{a}{f' \cdot n \cdot p}\end{aligned}$$

La largeur correspondante en nombre d'onde est alors :

$$\delta\sigma = \frac{\delta\lambda}{\lambda^2}$$

Soit :

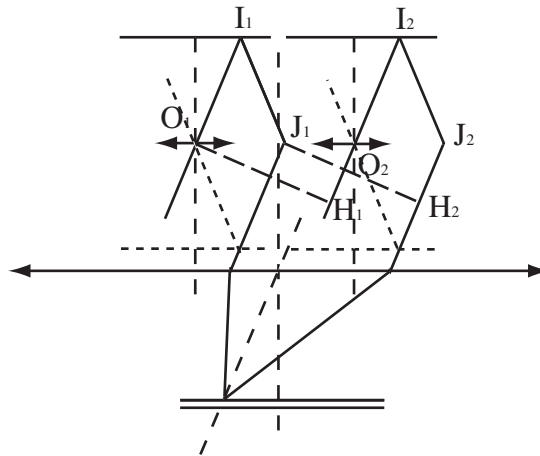
$$\delta\sigma = \frac{a}{f' \cdot n \cdot p \cdot \lambda^2}$$

Et numériquement, en choisissant l'ordre $p = 1$ (ici, il manque l'indication de l'ordre à utiliser dans l'énoncé) : $\delta\sigma_{rouge} = 3555 m^{-1}$ et $\delta\sigma_{bleu} = 12500 m^{-1}$.

Pour obtenir la même largeur spectrale pour toutes les cellules du capteur, il faut les utiliser toutes dans le même ordre. Pour modifier l'ordre d'observation en restant dans les conditions de Gauss, il faudrait pouvoir faire tourner le réseau par rapport au faisceau incident, en utilisant un goniomètre par exemple.

E Mise en oeuvre. Réglage de l'interféromètre

1. Les rayons lumineux issus de la source sont peu inclinés par rapport à l'axe et traversent les objectifs de microscope à l'aller et au retour, lorsque ceux-ci sont mis en place. Comme l'observation se fait dans le plan focal image de la lentille (L_P), si on veut observer l'image des miroirs dans le plan focal de la lentille, il faut que le plan d'observation soit le plan conjugué de chaque miroir à travers (L_P) et l'un ou l'autre des objectifs, alors les distances entre les objectifs et leur miroir respectifs sont toutes deux égales à la distance focale.
2. On devrait observer la teinte plate, identique à l'aspect de l'écran au plus près du contact optique.
3. (a) La marche des rayons qui passent par les centres des lentilles :



- (b) Le théorème de Malus dit que les rayons lumineux sont perpendiculaires aux surfaces d'ondes, qui sont des surface équiphas.

Les deux rayons incidents qui arrivent en O_1 et O_2 sont issus d'un même point de la source étendue, le théorème de Malus entraîne que les ondes qui correspondent à ces deux rayons sont en phase en O_1 et H_1 , car ces points sont situés sur la même surface d'onde.

En appliquant le raisonnement ci-dessus aux deux rayons réfléchis, les chemins optiques (J_1M) et (H_2M) sont égaux.

La différence de marche est :

$$\delta(M) = (H_1O_2) + (J_2H_2)$$

Soit

$$\begin{aligned}\delta(M) &= 2.d.\sin(i) \\ &= 2.d.\frac{x}{f'_P}\end{aligned}$$

Alors une frange brillante d'ordre p se trouve en x_p tel que $x_p = \frac{p.\lambda.f'_P}{2.d}$, on en déduit l'interfrange, distance sur l'écran entre deux franges brillantes successives :

$$\Delta x = \frac{\lambda.f'_P}{2.d}$$

Pour réaliser l'alignement des miroirs, il faut régler l'interféromètre de sorte que l'interfrange observé sur l'écran soit le plus grand possible, puisque plus d est faible, plus Δx est grand.

4. (a) La source est une lampe qui émet de la lumière blanche, si on l'assimile à une source de profil rectangulaire dont les nombres d'onde extrêmes sont $\frac{1}{\lambda_R}$ et $\frac{1}{\lambda_B}$, alors sa longueur de cohérence est $\frac{1}{\frac{1}{\lambda_B} - \frac{1}{\lambda_R}}$, soit

numériquement une longueur de cohérence de $0,9 \mu m$.

- (b) On a établi que l'interfrange est $\Delta x = \frac{\lambda.f'_P}{2.d}$, or l'intervalle pour lequel les franges sont visibles est de

$$D = 0,6 mm, \text{ soit } D = 12.\frac{\lambda.f'_P}{2.d} \text{ alors } d = 12.\frac{\lambda.f'_P}{2.D}.$$

Numériquement :

$$d = 1 mm.$$

- (c) Cette expression est à rapprocher de la différence de marche obtenue pour l'interféromètre en coin d'air. Si le contact optique n'est pas réalisé au début avec le plus grand soin, alors le deuxième terme dans la différence de marche est important dès le début, car l'arête du coin d'air n'est pas centrale et le facteur de α est supérieur à $f'.i$.

II Oscillateur à boucle de rétroaction.

A

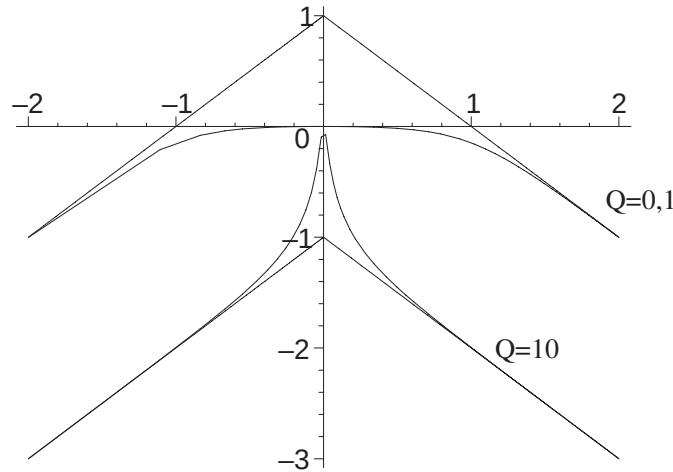
La condition d'existence des oscillations spontanées est :

$$\underline{H}(j\omega_0).\underline{F}(j\omega_0) = 1$$

Quand la condition est réalisée, les oscillations démarrent sur un bruit, qui doit être amplifié par une instabilité.

B

- La chaîne de retour est un filtre passe-bande, puisque qu'on constate que $\underline{F}(j\omega)$ est nul pour ω nul et ω infini. Les diagrammes de bode pour les facteurs de qualité $Q = 0, 1$ et $Q = 10$ sont ci-dessous.



2.

$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega_0) \cdot \underline{F}(j\omega_0) &= 1 \\ H_0 \cdot F_0 \cdot \frac{j \frac{\omega}{Q \cdot \omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{Q \cdot \omega_0} - (\frac{\omega}{\omega_0})^2} &= 1 \\ H_0 \cdot F_0 \cdot j \frac{\omega}{Q \cdot \omega_0} &= 1 + j \frac{\omega}{Q \cdot \omega_0} - (\frac{\omega}{\omega_0})^2 \\ j \frac{\omega}{Q \cdot \omega_0} \cdot (H_0 \cdot F_0 - 1) + ((\frac{\omega}{\omega_0})^2 - 1) &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit que les oscillations sinusoïdales si elles existent sont obtenues pour : $H_m = H_0$ avec

$$H_m = \frac{1}{F_0} \text{ et } \omega = \omega_0$$

C

Pour établir l'équation différentielle vérifiée par $u_e(t)$ ou $u_s(t)$, transposons $\underline{H}(j\omega_0) \cdot \underline{F}(j\omega_0) \cdot \underline{u}_s = \underline{u}_s$. Soit :

$$\begin{aligned} H_0 \cdot F_0 \cdot j \frac{\omega}{Q \cdot \omega_0} \cdot \underline{u}_s &= (1 + j \frac{\omega}{Q \cdot \omega_0} + (j \frac{\omega}{\omega_0})^2) \cdot \underline{u}_s \\ (H_0 \cdot F_0 - 1) \cdot \frac{1}{Q \cdot \omega_0} \cdot \frac{du_s}{dt} &= u_s + \frac{1}{\omega_0^2} \cdot \frac{d^2 u_s}{dt^2} \end{aligned}$$

Ordonnons l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_0^2} \cdot \frac{d^2 u_s}{dt^2} + (1 - H_0 \cdot F_0) \cdot \frac{1}{Q \cdot \omega_0} \cdot \frac{du_s}{dt} + u_s &= 0 \\ \frac{d^2 u_s}{dt^2} + (1 - H_0 \cdot F_0) \cdot \frac{\omega_0}{Q} \cdot \frac{du_s}{dt} + \omega_0^2 \cdot u_s &= 0 \end{aligned}$$

L'équation caractéristique est :

$$r^2 + (1 - H_0 \cdot F_0) \cdot \frac{\omega_0}{Q} \cdot r + \omega_0^2 = 0$$

Le discriminant : $\Delta = \omega_0^2 \cdot (\frac{(1 - H_0 \cdot F_0)^2}{Q^2} - 4)$

Pour que la solution soit oscillante il faut que $\Delta < 0$

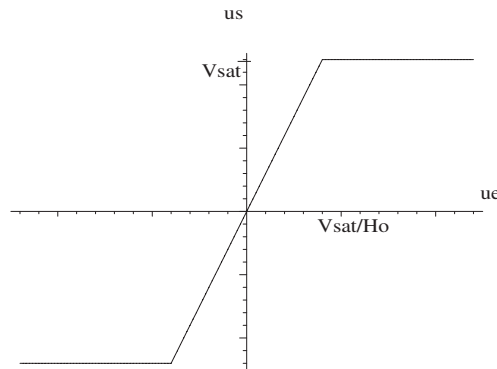
Pour $1 - H_0 \cdot F_0 < 0$ la solution diverge, les oscillations peuvent démarrer.

D

1. La formule du diviseur de tension :

$$u_e = u_s \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \text{ soit } \frac{u_s}{u_e} = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right).$$

$$\text{Soit } H_0 = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)$$

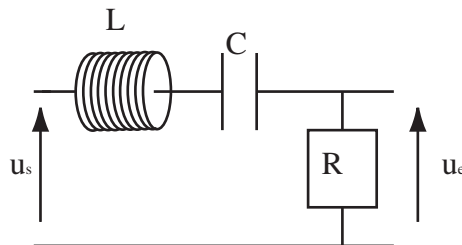


2. $a_0/2$ représente la valeur moyenne ou encore la composante continue de la tension $u_s(t)$. Ici, $a_0/2$ est nul.
3. Pour une valeur H_0 quelconque mais suffisante pour que les oscillations puissent démarrer, les signaux sont écrêtés. L'élément non linéaire est l'amplificateur opérationnel, on ne peut plus le modéliser par un simple gain H_0 .

Si on se limite à la contribution du premier harmonique, la pulsation des oscillations est ω_0 , le gain H_0 est à remplacer par $H_0 \cdot f(\theta) = \frac{a_1}{V_m}$, alors la condition d'oscillations sinusoïdales apportées par l'équation différentielle

est $H_0 \cdot f(\theta) = \frac{1}{F_0}$, ce qui impose bien l'angle d'écrêtage.

4. Il faut prélever la tension à la sortie du filtre passe-bande, pour avoir la tension qui se rapproche au mieux d'une sinusoïde. Le filtre passe bande le plus simple est le circuit $R - L - C$ série :



En haute fréquence la bobine équivaut à un interrupteur ouvert, en basse fréquence le condensateur équivaut à un interrupteur ouvert, donc dans ces deux cas la tension de sortie du montage est nulle, le circuit est un filtre passe bande.

E

1. i_e est nul, car la branche où ce courant est défini est reliée à une entrée d'amplificateur opérationnel idéal.

Par application de la formule du diviseur de tension, on établit :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{jRC\omega}{1 + 3jRC\omega + (jRC\omega)^2}$$

$$\text{On identifie } \omega_0 = \frac{1}{RC}, Q = \frac{1}{3}, F_0 = \frac{1}{3}.$$

Le circuit est bien un passe-bande, mais il n'est pas très sélectif, on peut prévoir que les signaux ne seront pas rigoureusement sinusoïdaux.

L'intérêt de cette chaîne de retour est sa simplicité de mise en oeuvre et le fait qu'elle fonctionne toujours linéairement, car elle ne comprend pas d'amplificateur opérationnel.

- En calculant les angles d'écrtages tels que $f(\theta) = \frac{1}{H_0.F_0}$ pour les différentes valeurs de R_1/R_2 on trouve :
 Pour $R_1/R_2 = 3$ un angle de 0,88 radians.
 Pour $R_1/R_2 = 4$ un angle de 1,06 radians.
 Pour $R_1/R_2 = 5$ un angle de 1,15 radians.
 On en conclut que plus H_0 est grand plus le signal ressemblera à un signal carré.

F

- La relation entre u_2 et i est $u_2 = R.i + k.u_2.u_1$, soit

$$u_2 = \frac{R}{1 - k.u_1}.i$$

Le dipôle équivaut à une résistance dont on peut commander la valeur par la tension u_1 .

- Il faut que la constante de temps du dipôle $R_d C_d$ soit très grande par rapport à la période du signal dont on veut détecter la crête.

Si la diode n'est pas idéale, la tension à l'issue du détecteur de crête est décalée par rapport à la crête d'une valeur égale à la tension de seuil de la diode.

- On peut calculer le rapport $\frac{R_d.C_d}{T}$, on trouve 111, on en conclut que les composants sont bien choisis pour détecter la crête du signal, par contre, on voit que le signal de sortie du détecteur est décalé par rapport à la crête, ce qui vient de la tension de seuil qui n'est pas négligeable (ici, la tension de seuil vaut environ 0,7 volts).
Principe de l'asservissement :

Lorsque les oscillations démarrent, l'amplitude de la tension u_s et par suite la valeur de u'_s croissent, or le gain variable du nouveau montage à amplificateur opérationnel s'écrit : $(1 + \frac{R_1.(1 - k.u'_s)}{R})$, donc il décroît quand u'_s croît, ce qui diminue l'angle d'écrtage, et tend à rendre le signal bien sinusoïdal.

- Une fois que le signal est devenu parfaitement sinusoïdal, l'équation différentielle, dans laquelle on prend en compte la nouvelle valeur du gain H'_0 s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_s}{dt^2} + (1 - H'_0.F_0) \cdot \frac{\omega_0}{Q} \cdot \frac{du_s}{dt} + \omega_0^2 u_s &= 0 \\ \frac{d^2 u_s}{dt^2} + (1 - (1 + \frac{R_1.(1 - k.u'_s)}{R}).F_0) \cdot \frac{\omega_0}{Q} \cdot \frac{du_s}{dt} + \omega_0^2 u_s &= 0 \end{aligned}$$

En y remplaçant $u_s(t)$ par $A.\cos(\omega.t)$:

$$\begin{aligned} -A.\omega^2.\cos(\omega.t) - (1 - H'_0.F_0).A.\omega.\sin(\omega.t) + \omega_0^2.A.\cos(\omega.t) &= 0 \\ -A.[\cos(\omega.t).(\omega^2 - \omega_0^2) + (1 - H'_0.F_0).\omega.\sin(\omega.t)] &= 0 \end{aligned}$$

Cette équation doit être valable pour tout t , on en déduit que les coefficients des termes en *sinus* et *cosinus* sont nécessairement nuls, soit :

$$\omega = \omega_0 \text{ et } 1 - H'_0.F_0 = 0$$

Cette dernière équation permet de déterminer l'amplitude des oscillations :

$$\begin{aligned} 1 - (1 + \frac{R_1.(1 - k.u'_s)}{R}).F_0 &= 0 \\ 1 - F_0 - \frac{F_0.R_1.(1 - k.u'_s)}{R} &= 0 \\ (1 - F_0).R &= F_0.R_1.(1 - k.u'_s) \end{aligned}$$

Finalement :

$$u'_s = \frac{1}{k} \cdot (1 - \frac{(1 - F_0).R}{F_0.R_1})$$

On en déduit V_m car si on suppose la diode idéale, $u'_s = V_m$, car la tension de seuil de la diode est nulle.

Pour avoir une amplitude V_m variable, il faudrait remplacer une des résistances R ou R_1 par un potentiomètre.

- L'application numérique me donne $V_m = 1 \text{ V}$ ce qui est bien différent du résultat expérimental. Cela provient de la tension de seuil de la diode, puisqu'on voit sur le graphe qu'il existe une différence de 0,7 V environ entre les crêtes de u_s et u'_s . La régulation se fait sur une tension plus faible que V_m , ce qui entraîne une valeur supérieure de V_m .