

PARTIE A : Paramètres primaires d'une ligne coaxiale1.1) symétries:

- * le plan contenant Π et l'axe (Oz) est plan de symétrie de la distribution de charge
- * le plan contenant Π et perpendiculaire à l'axe (Oz) est aussi plan de symétrie de la distribution de charge
- * Or $\vec{E}$ est un vecteur polaire, il est donc contenu dans ces plans, donc $\vec{E}$ est porté par l'intersection de ces plans, il est donc radial: $\vec{E} = E \vec{u}_r$

invariances:

on a invariance de la distribution de charge par:

* rotation autour de (Oz) $\Rightarrow E(r, \phi, z)$

* translation suivant (Oz) $\Rightarrow E(r, \phi, z)$

$\Rightarrow$ E ne dépend que de r

$\Rightarrow \vec{E} = E(r) \vec{u}_r$

1.2.a) Théorème de Gauss: $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon}$ on suppose ϵ par ϵ

surface de Gauss: cylindre d'axe (Oz) , de rayon r , de hauteur l

$$\begin{aligned} \Rightarrow \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \oint_S E(r) \vec{u}_r \cdot d\vec{S} \\ &= \int_{base 1} E(r) \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_z + \int_{base 2} E(r) \vec{u}_r \cdot (-dS \vec{u}_z) + \int_{S_{lat}} E(r) \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r \\ &= \int_{S_{lat}} E(r) dS = E(r) \int_{S_{lat}} dS = E(r) 2\pi r l \end{aligned}$$

$\vec{u}_r \cdot \vec{u}_z = 0$

* $r < r_1$: $Q_{int} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{0}}$ pour $r < r_1$

normal car on est à l'intérieur d'un conducteur à l'équilibre électrostatique

* $r_1 < r < r_2$: $Q_{int} = +Q$

$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon l r} \vec{u}_r}$ pour $r_1 < r < r_2$

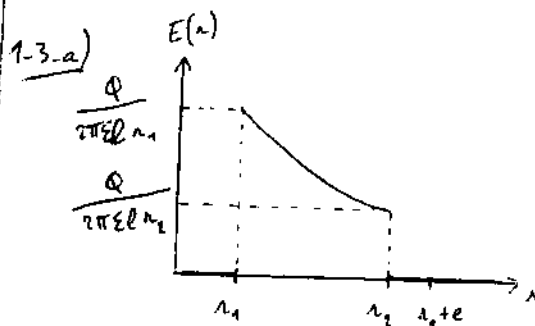
* $r_2 < r < r_2 + e$: $Q_{int} = (+Q) + (-Q) = 0$

$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{0}}$ pour $r_2 < r < r_2 + e$

1.2.b) $r > r_2 + e$: $Q_{int} = (+Q) + (-Q) = 0$

$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{0}}$ pour $r > r_2 + e$

(il n'y a pas de charges en $r = r_2 + e$).



1.3.b) On a discontinuité du champ électrique en r_1 et r_2 (surfaces chargées), mais pas en $r_2 + e$ (pas de charges)

$$\begin{aligned} \vec{E}(r_1^+) - \vec{E}(r_1^-) &= \frac{Q}{2\pi\epsilon l r_1} \vec{u}_r - \vec{0} = \frac{\sigma_1 2\pi r_1 l}{2\pi\epsilon l r_1} \vec{u}_r \\ &= \frac{\sigma_1}{\epsilon} \vec{u}_r \quad \text{condition de passage vérifiée} \\ &\quad (\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon} \vec{u}_r) \end{aligned}$$

idem en r_2 .

1.4) $\vec{E} = -\text{grad } V \Rightarrow dV = \text{grad } V \cdot d\vec{l} = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$

def. intrinsèque du gradient

$$\begin{aligned} U_{12} = V_1 - V_2 &= \int_{V_2}^{V_1} dV = \int_2^1 -\vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_1^2 E(r) dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{2\pi\epsilon l r} dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon l} \ln \frac{r_2}{r_1} \end{aligned}$$

$\boxed{U_{12} = \frac{Q}{2\pi\epsilon l} \ln \frac{r_2}{r_1}}$

1.5) $Q = C U_{12} \Rightarrow C = \frac{Q}{U_{12}} = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$

Par unité de longueur.

$$C_1 = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \quad \left(= \frac{C}{l} \right)$$

$$1.6) \quad W_c = \frac{1}{2} C U_{12}^2 \Rightarrow W_c = \frac{1}{2} C_1 l U_{12}^2$$

$$\Rightarrow W_c = \frac{\pi \epsilon l U_{12}^2}{\ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

$$1.7) \quad C_1 = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = \frac{2\pi\epsilon_0 \epsilon_1}{\ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \quad C_1 = 92,4 \text{ pF}$$

$$1.8) \quad W_c = \frac{1}{2} C_1 l U_{12}^2 \Rightarrow W_c = 4,62 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

2.1) * le plan contenant Π et l'axe (Oz) est plan de symétrie de la distribution de courant. Or $\vec{B}$ est un pseudo-vecteur, donc il est perpendiculaire à ce plan, il est donc orthoradial $\Rightarrow \vec{B} = B \vec{u}_\theta$

* invariance de la distribution de courant par :

• rotation autour de $(Oz) \Rightarrow B(r, \phi, z)$

• translation suivant $(Oz) \Rightarrow B(r, \phi, z)$

$\Rightarrow B$ ne dépend que de r

$$\Rightarrow \vec{B} = B(r) \vec{u}_\theta$$

$$2.2) \text{ Théorème d'Ampère : } \oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} \quad \vec{u}_\theta$$

choix du contour $\mathcal{C}$: cercle d'axe (Oz) de rayon r , orienté concentriquement (suivant $\vec{u}_\theta$)

$$\Rightarrow \oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{\mathcal{C}} B(r) \vec{u}_\theta \cdot d\vec{l} = \oint_{\mathcal{C}} B(r) dl$$

$$\stackrel{r \text{ cte sur } \mathcal{C}}{=} B(r) \oint_{\mathcal{C}} dl = B(r) 2\pi r$$

$$* r < \lambda_1 : I_{\text{enc}} = j_1 \pi r^2 = \frac{I}{\pi \lambda_1^2} \pi r^2 = I \frac{r^2}{\lambda_1^2}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi \lambda_1^2} \vec{u}_\theta \quad \text{pour } r < \lambda_1$$

$$* \lambda_1 < r < \lambda_2 : I_{\text{enc}} = +I = j_1 \pi \lambda_1^2$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta \quad \text{pour } \lambda_1 < r < \lambda_2$$

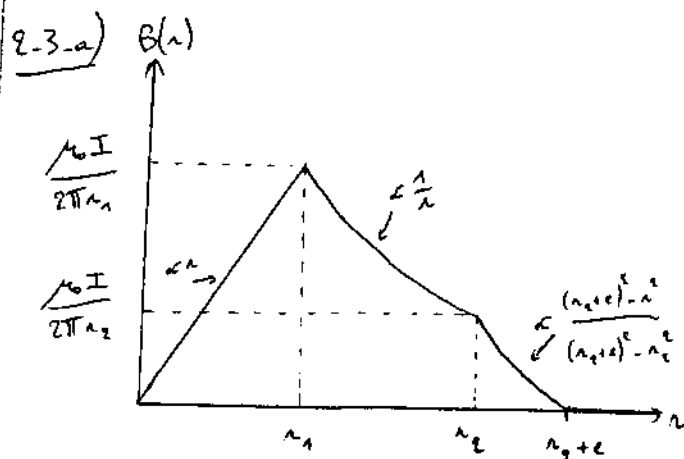
$$* \lambda_2 < r < \lambda_2 + e : I_{\text{enc}} = +I - j_2 (\pi r^2 - \pi \lambda_2^2)$$

$$I_{\text{enc}} = I - \frac{I}{\pi(\lambda_2 + e)^2 - \pi \lambda_2^2} (\pi r^2 - \pi \lambda_2^2) \\ = I \frac{(\lambda_2 + e)^2 - r^2}{(\lambda_2 + e)^2 - \lambda_2^2}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{(\lambda_2 + e)^2 - r^2}{(\lambda_2 + e)^2 - \lambda_2^2} \vec{u}_\theta \quad \text{pour } \lambda_2 < r < \lambda_2 + e$$

$$* r > \lambda_2 + e : I_{\text{enc}} = 0 \quad (= +I - I)$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \vec{0} \quad \text{pour } r > \lambda_2 + e$$



2.3-b) On n'a pas de discontinuité de $\vec{B}$ en λ_1, λ_2 ou $(\lambda_2 + e)$, car ici on a choisi un modèle volumique pour la distribution de courant (contrairement à la première partie). Or on a discontinuité de $\vec{B}$ à la traversée de nappes de courant ($\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_{12}$).

$$2.4.a) \quad \frac{dW_m}{dI} = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

$$2.4-b) \quad W_m = \iiint \frac{dW_m}{dI} dI = \iiint \frac{B^2}{2\mu_0} dI = \iiint \frac{B^2}{2\mu_0} r dr d\phi dz$$

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^l dz \int_0^\infty B^2 r dr$$

$$W_m = \frac{\pi l}{\mu_0} \int_0^\infty B^2 r dr = \frac{\pi l}{\mu_0} \left[\int_0^{\lambda_1} B^2 r dr + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} B^2 r dr + \int_{\lambda_2}^{\lambda_2+e} B^2 r dr + \int_{\lambda_2+e}^\infty B^2 r dr \right]$$

néglige

$$W_m = \frac{\pi l}{\mu_0} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} B_m^2 d\lambda = \frac{\pi l}{\mu_0} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi \lambda} \right)^2 \lambda d\lambda$$

$$W_m = \frac{\pi l \mu_0 I^2}{4\pi^2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{\mu_0 l}{4\pi} I^2 \ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

$$W_m = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 l \ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1}}{2\pi} I^2$$

$$2.5) W_m = \frac{1}{2} L I^2 \Rightarrow L = \frac{\mu_0 l \ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1}}{2\pi}$$

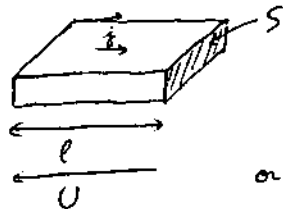
par unité de longueur : $L_1 = \frac{L}{l}$

$$\Rightarrow L_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

$$2.6) L_1 = 2,41 \cdot 10^{-3} \text{ H}$$

$$2.7) W_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} L_1 l I^2 \Rightarrow W_m = 1,21 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

3-1)



loi d'Ohm locale : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$

loi d'Ohm intégrale : $U = RI$

or $I = jS$ et $U = El$
($\vec{E} = -\text{grad } V$)

$$\Rightarrow \frac{I}{S} = \gamma \frac{U}{l} \Rightarrow U = \frac{1}{\gamma} \frac{l}{S} I = RI$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{\gamma} \frac{l}{S}$$

Par unité de longueur : $R = \frac{1}{\gamma S}$

$$R_1 = \frac{1}{8\pi \lambda_1^2} + \frac{1}{8(\pi \lambda_3^2 - \pi \lambda_2^2)} \quad (\text{les deux résistances sont en série}).$$

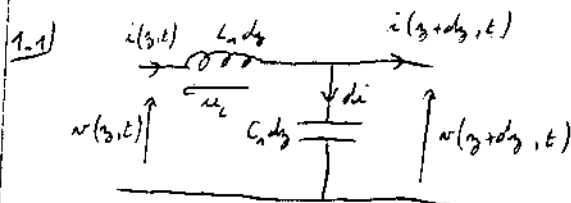
$$R_1 = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_3^2 - \lambda_2^2} \right)$$

$$3.2) R_1 = 2,3 \cdot 10^{-3} \Omega \text{ m}^{-1} \ll R_m$$

$$3.3) E_G = (R_m + R_1) I = R_m I = 10 \text{ V} = E_G$$

PARTIE B: Propagation des signaux dans une ligne sans perte.

1) Equation de propagation :



loi des nœuds : $i(z,t) = i(z+dz,t) + di$

or pour le condensateur en convention récepteur ($i = C \frac{dv}{dt}$)

$$di = C_1 dz \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\Rightarrow i(z,t) - i(z+dz,t) = di = C_1 dz \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial i}{\partial z} dz$$

$$\Rightarrow \frac{\partial i}{\partial z} = - C_1 \frac{\partial v}{\partial t} \quad (1)$$

1.2) bobine : $v = L \frac{di}{dt}$ en convention récepteur

loi des mailles : $v(z,t) = v_L + v(z+dz,t)$

$$\Rightarrow v(z,t) - v(z+dz,t) = v_L = L_1 dz \frac{\partial i}{\partial t} = - \frac{\partial v}{\partial z} dz$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial z} = - L_1 \frac{\partial i}{\partial t} \quad (2)$$

$$1.3) \begin{cases} \frac{\partial(1)}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial z} = - C_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial(2)}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = - L_1 \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = L_1 C_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial(1)}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial^2 i}{\partial z^2} = - C_1 \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial t} \\ \frac{\partial(2)}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial t} = - L_1 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 i}{\partial z^2} = L_1 C_1 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

$$1.4.a) \quad \frac{1}{c^2} = L_1 C_1 \Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}}$$

$$E: L_1 C_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{2\pi \epsilon}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \mu_0 \epsilon = \frac{1}{c^2}$$

$$\boxed{\mu_0 \epsilon c^2 = 1}$$

$$1.4.b) \quad c = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \text{ en } \frac{1}{\sqrt{H \cdot m^{-1} \cdot F \cdot m^{-1}}}$$

$$\text{en } \frac{m}{\sqrt{H F}} = \frac{m}{\sqrt{(V \cdot A^{-1}) (A \cdot V^{-1})}} = \frac{m}{\sqrt{V^2}} = \frac{m}{V}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $u = L \frac{di}{dt}$ $i = C \frac{du}{dt}$

c est bien en $m \cdot s^{-1}$

$$1.5) \quad c = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon}} = \boxed{2,99 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = c}$$

1.6) * on a des solutions de type onde plane car à t fixé,

$$z = c t \Rightarrow v = c t \text{ et } i = c t$$

$\Rightarrow$ les plans $z = c t$ sont des plans d'onde

* v_a et i_a sont des ondes planes progressives se propageant dans le sens des z croissant.

* v_b et i_b sont des ondes planes progressives se propageant dans le sens des z décroissant.

$$1.7.a) \quad \frac{\partial v_a}{\partial z} = -L_1 \frac{\partial i_a}{\partial t}$$

$$\frac{\partial v_a}{\partial z} = \frac{\partial v_a}{\partial (t - \frac{z}{c})} \cdot \frac{\partial (t - \frac{z}{c})}{\partial z} = -\frac{1}{c} v_a' (t - \frac{z}{c})$$

$$\frac{\partial i_a}{\partial t} = i_a' (t - \frac{z}{c}) \times \frac{\partial (t - \frac{z}{c})}{\partial t} = i_a' (t - \frac{z}{c}) \times 1$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{c} v_a' (t - \frac{z}{c}) = -L_1 i_a' (t - \frac{z}{c})$$

$$\Rightarrow v_a' (t - \frac{z}{c}) = L_1 c i_a' (t - \frac{z}{c})$$

$$\text{on intègre} \Rightarrow \boxed{v_a (t - \frac{z}{c}) = R_c i_a (t - \frac{z}{c}) + V_{a0}}$$

$$\text{avec } \boxed{R_c = L_1 c}$$

$$1.7.b) \quad \frac{\partial v_b}{\partial z} = -L_1 \frac{\partial i_b}{\partial t}$$

$$\frac{\partial v_b}{\partial z} = v_b' (w) \frac{\partial w}{\partial z} = v_b' (w) \times \frac{1}{c}$$

$$\frac{\partial i_b}{\partial t} = i_b' (w) \frac{\partial w}{\partial t} = i_b' (w) \times 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c} v_b' (w) = -L_1 i_b' (w) \Rightarrow v_b' (w) = -L_1 c i_b' (w)$$

$$\text{on intègre} \Rightarrow \boxed{v_b (t + \frac{z}{c}) = -R_c i_b (t + \frac{z}{c}) + V_{b0}}$$

$$1.8.a) \quad R_c = L_1 c = \frac{L_1}{\sqrt{L_1 C_1}} \Rightarrow \boxed{R_c = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}}$$

$$1.8.b) \quad \boxed{R_c = 51 \Omega}$$

2) Ligne en régime permanent sinusoïdal :

$$\begin{aligned} 2.1) \quad \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\underline{V}(z) \underline{I}^*(z) \right) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\underline{V}(z) e^{j\varphi_v(z)} \cdot (\underline{I}(z) e^{j\varphi_i(z)})^* \right) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\underline{V}(z) e^{j\varphi_v(z)} \underline{I}(z) e^{-j\varphi_i(z)} \right) \\ &= \frac{\underline{V}(z) \underline{I}(z)}{2} \operatorname{Re} \left(e^{j(\varphi_v(z) - \varphi_i(z))} \right) \\ &= \frac{\underline{V}(z) \underline{I}(z)}{2} \cos \left(\varphi_v(z) - \varphi_i(z) \right) = \frac{\underline{V}(z) \underline{I}(z)}{2} \cos \phi(z) \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\underline{V}(z) \underline{I}^*(z) \right) = \frac{\underline{V}(z) \underline{I}(z)}{2} \cos \phi(z) = \langle P \rangle}$$

Cette grandeur est donc la valeur moyenne de la puissance.

$\langle P \rangle = c^2$ $\forall z$ traduit la conservation de l'énergie.

(il n'y a pas de résistance dans ce modèle).

$\hookrightarrow$ pas de dissipation d'énergie

$$\underline{2.2)} \quad \begin{cases} \underline{V}(z) = \underline{V}_a e^{-j k z} + \underline{V}_b e^{j k z} \\ \underline{I}(z) = \frac{\underline{V}_a}{R_c} e^{-j k z} - \frac{\underline{V}_b}{R_c} e^{j k z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{V}(0) = \underline{V}_a + \underline{V}_b$$

$$\text{et} \quad \underline{I}(0) = \frac{1}{R_c} (\underline{V}_a - \underline{V}_b)$$

$$\underline{2.3)} \quad \underline{V}_a = \frac{\underline{V}(0) + R_c \underline{I}(0)}{2}$$

$$\underline{V}_b = \frac{\underline{V}(0) - R_c \underline{I}(0)}{2}$$

$$\text{on pose } \underline{Z}(0) = \frac{\underline{V}(0)}{\underline{I}(0)}$$

$$\underline{V}_a = \frac{\underline{V}(0)}{2} \left(1 + \frac{R_c}{\underline{Z}(0)} \right) \quad \text{et} \quad \underline{V}_b = \frac{\underline{V}(0)}{2} \left(1 - \frac{R_c}{\underline{Z}(0)} \right)$$

$$\underline{2.4)} \quad \underline{Z}(z) = \frac{\underline{V}(z)}{\underline{I}(z)} = \frac{\underline{V}_a e^{-j k z} + \underline{V}_b e^{j k z}}{\frac{\underline{V}_a}{R_c} e^{-j k z} - \frac{\underline{V}_b}{R_c} e^{j k z}}$$

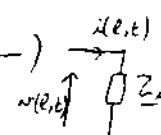
$$\text{on } \underline{V}_a = \frac{\underline{V}(0)}{2} \left(1 + \frac{R_c}{\underline{Z}(0)} \right) \text{ et } \underline{V}_b = \frac{\underline{V}(0)}{2} \left(1 - \frac{R_c}{\underline{Z}(0)} \right)$$

$$\Rightarrow \underline{Z}(z) = R_c \frac{\left(1 + \frac{R_c}{\underline{Z}(0)} \right) e^{-j k z} + \left(1 - \frac{R_c}{\underline{Z}(0)} \right) e^{j k z}}{\left(1 + \frac{R_c}{\underline{Z}(0)} \right) e^{-j k z} - \left(1 - \frac{R_c}{\underline{Z}(0)} \right) e^{j k z}}$$

$$\underline{Z}(z) = R_c \frac{(e^{j k z} + e^{-j k z}) - \frac{R_c}{\underline{Z}(0)} (e^{j k z} - e^{-j k z})}{-(e^{j k z} - e^{-j k z}) + \frac{R_c}{\underline{Z}(0)} (e^{j k z} + e^{-j k z})}$$

$$\underline{Z}(z) = R_c \frac{2 \cos k z - 2 j \frac{R_c}{\underline{Z}(0)} \sin k z}{-2 j \sin k z + 2 \frac{R_c}{\underline{Z}(0)} \cos k z}$$

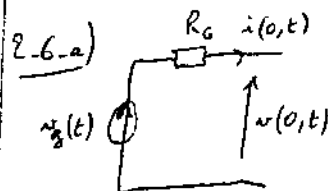
$$\underline{Z}(z) = R_c \frac{\underline{Z}(0) - j R_c \tan k z}{R_c - j \underline{Z}(0) \tan k z}$$

$$\underline{2.5)} \quad \underline{Z}(l) = \frac{\underline{V}(l)}{\underline{I}(l)} = \underline{Z}_m \quad (\text{li d'apr\u00e8s})$$


$$\Rightarrow \underline{Z}_m = R_c \frac{\underline{Z}(0) - j R_c \tan k l}{R_c - j \underline{Z}(0) \tan k l}$$

$$\Rightarrow R_c \underline{Z}_m - j \underline{Z}_m \underline{Z}(0) \tan k l = R_c \underline{Z}(0) - j R_c^2 \tan k l$$

$$\Rightarrow \underline{Z}(0) = R_c \frac{\underline{Z}_m + j R_c \tan k l}{R_c + j \underline{Z}_m \tan k l}$$



$$\text{loi des mailles : } v_g(t) = R_c i(0,t) + v(0,t)$$

$$\Rightarrow V_g = R_c \underline{I}(0) + \underline{V}(0) = R_c \frac{\underline{V}(0)}{\underline{Z}(0)} + \underline{V}(0)$$

$$\Rightarrow \underline{V}(0) = \frac{V_g}{1 + \frac{R_c}{\underline{Z}(0)}}$$

$$\underline{2.6.b)} \quad \underline{V}_a = \frac{\underline{V}(0)}{2} \left(1 + \frac{R_c}{\underline{Z}(0)} \right) = \frac{V_g}{2} \frac{1 + \frac{R_c}{\underline{Z}(0)}}{1 + \frac{R_c}{\underline{Z}(0)}}$$

$$\Rightarrow \underline{V}_a = \frac{1}{2} V_g \frac{\underline{Z}(0) + R_c}{\underline{Z}(0) + R_c}$$

$$\underline{V}_b = \frac{\underline{V}(0)}{2} \left(1 - \frac{R_c}{\underline{Z}(0)} \right) = \frac{1}{2} V_g \frac{1 - \frac{R_c}{\underline{Z}(0)}}{1 + \frac{R_c}{\underline{Z}(0)}}$$

$$\Rightarrow \underline{V}_b = \frac{1}{2} V_g \frac{\underline{Z}(0) - R_c}{\underline{Z}(0) + R_c}$$

$$\underline{2.7.a)} \quad \underline{Z}_m = R_c \text{ donc d'apr\u00e8s 2.5):}$$

$$\underline{Z}(0) = R_c \frac{R_c + j R_c \tan k l}{R_c + j R_c \tan k l} = R_c \Rightarrow \underline{Z}(0) = R_c$$

2.7.b) D'après 2.4) : $\underline{V}_l = \frac{1}{2} \underline{V}_g \frac{\underline{Z}(l) R_c}{\underline{Z}(l) + R_c}$

or $\underline{Z}(0) = R_c \Rightarrow \underline{V}_l = 0$

2.7.c)
$$\begin{cases} \underline{V}(z) = \underline{V}_a e^{-jkz} \\ \underline{I}(z) = \frac{\underline{V}_a}{R_c} e^{-jkz} \end{cases}$$

On a alors uniquement l'onde incidente se propageant à z croissant (phase en $t - \frac{z}{c}$). L'onde réfléchie est nulle ($\underline{V}_l = 0$).

2.7.d) $\underline{V}_a = \frac{1}{2} \underline{V}_g \frac{\underline{Z}(0) + R_c}{\underline{Z}(0) + R_c} = \frac{R_c \underline{V}_g}{R_c + R_c}$
 $\underline{Z}(0) = R_c$

$\Rightarrow \underline{V}(z) = \frac{R_c \underline{V}_g}{R_c + R_c} e^{-jkz}$

$\underline{v}(z, t) = \underline{V}(z) e^{j\omega t} = \frac{R_c \underline{V}_g}{R_c + R_c} e^{j(\omega t - kz)}$

$\Rightarrow v(z, t) = \frac{R_c \underline{V}_g}{R_c + R_c} \cos(\omega t - kz) \quad \text{or } k = \frac{\omega}{c}$

$\Rightarrow v(z, t) = \frac{R_c \underline{V}_g}{R_c + R_c} \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right]$

$\Rightarrow v(l, t) = \frac{R_c \underline{V}_g}{R_c + R_c} \cos\left[\omega\left(t - \frac{l}{c}\right)\right]$

or $v(l, t) = R_c i(l, t) \quad \text{or } \underline{Z}_m = R_c$

$\Rightarrow i(l, t) = \frac{\underline{V}_g}{R_c + R_c} \cos\left[\omega\left(t - \frac{l}{c}\right)\right]$

2.8.a) court-circuit $\Rightarrow \underline{Z}_m = 0$

D'après 2.5) $\Rightarrow \underline{Z}(0) = j R_c \tan kl$

2.8.b) $\operatorname{Re}(\underline{Z}(0)) = 0 \Rightarrow \underline{Z}(0)$ ne contient pas d'élément résistif $\Rightarrow$ pas de dissipation d'énergie (cohérent avec la question 2.1)

2.8.c) $l = \frac{\lambda}{4} \quad k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$

$\Rightarrow kl = \frac{\pi}{2}$

$\underline{Z}(0) = j R_c \tan \frac{\pi}{2} \rightarrow \infty$

$\underline{Z}(0) \rightarrow \infty$

2.9.a) circuit ouvert $\Rightarrow \underline{Z}_m \rightarrow +\infty$

D'après 2.5) $\Rightarrow \underline{Z}(0) = R_c \frac{1}{j \tan kl}$

$\underline{Z}(0) = \frac{-j R_c}{\tan kl}$

2.9.b) idem 2.8.b) : la ligne n'est pas résistive $\Rightarrow$ pas de dissipation d'énergie

2.9.c) $l = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow kl = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan kl \rightarrow +\infty$

$\Rightarrow \underline{Z}(0) = 0$

2.10) D'après 2.5)

$\underline{Z}(0) = R_c \frac{\underline{Z}_m + j R_c \tan kl}{R_c + j \underline{Z}_m \tan kl}$

$l = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow \tan kl = \tan \frac{\pi}{2} \rightarrow +\infty$

$\Rightarrow \underline{Z}(0) = R_c \frac{j R_c \tan kl}{j \underline{Z}_m \tan kl} = \frac{R_c^2}{\underline{Z}_m}$

or $\underline{Z}(0) = R_{\text{ant}} \Rightarrow R_c = \sqrt{R_{\text{ant}} \underline{Z}_m} = 150 \Omega$

3) Ligne en régime impulsionnel :

3.1) on a d'après 1.7a) : $v_a\left(t - \frac{l}{c}\right) = R_c i_a\left(t - \frac{l}{c}\right) + \int_0^t v_l\left(t - \frac{l}{c}\right) dt$

$v_l\left(t + \frac{l}{c}\right) = -R_c i_l\left(t + \frac{l}{c}\right)$

En plus, $v(l, t) = R_m i(l, t)$

$$\Rightarrow v_a(t - \frac{l}{c}) + v_b(t + \frac{l}{c}) = R_m \left[i_a(t - \frac{l}{c}) + i_b(t + \frac{l}{c}) \right]$$

$$\Rightarrow v_a + v_b = R_m \left[\frac{v_a}{R_c} - \frac{v_b}{R_c} \right]$$

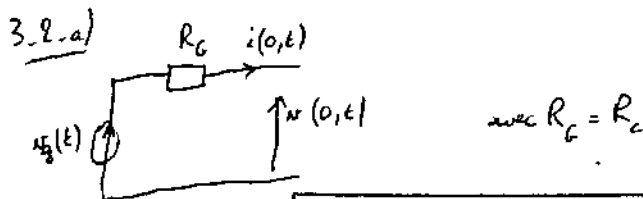
$$\Rightarrow v_a \left(1 - \frac{R_m}{R_c} \right) + v_b \left(1 + \frac{R_m}{R_c} \right) = 0$$

$$\Gamma = \frac{v_b(t + \frac{l}{c})}{v_a(t - \frac{l}{c})} = \frac{\frac{R_m}{R_c} - 1}{\frac{R_m}{R_c} + 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma = \frac{R_m - R_c}{R_m + R_c}}$$

$\Gamma = \frac{v_b(t + \frac{l}{c})}{v_a(t - \frac{l}{c})}$ C'est donc le rapport de la tension réfléchie sur la tension incidente en l.

C'est le coefficient de réflexion pour la tension en $z=l$.



loi des mailles $\Rightarrow v_g(t) = v(0,t) + R_c i(0,t)$

3.2.b)

$$\begin{cases} v_a(t) = R_c i_a(t) \\ v_b(t) = -R_c i_b(t) \\ v(0,t) = v_a(t) + v_b(t) \\ i(0,t) = i_a(t) + i_b(t) \\ E = v(0,t) + R_c i(0,t) \end{cases}$$

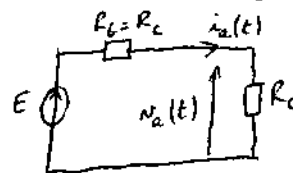
$$\Rightarrow \begin{cases} E = v(0,t) + R_c i(0,t) \\ v(0,t) = v_a(t) + v_b(t) \\ i(0,t) = \frac{1}{R_c} (v_a(t) - v_b(t)) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E = v(0,t) + R_c i(0,t) \\ v_a(t) = \frac{v(0,t) + R_c i(0,t)}{2} \\ v_b(t) = \frac{v(0,t) - R_c i(0,t)}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_a(t) = \frac{E}{2}}$$

3.2.c)

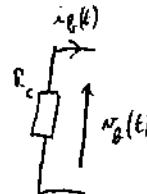
On a $v_a(t) = R_c i_a(t)$



$$\Rightarrow \begin{cases} v_a(t) = R_c i_a(t) \\ E = 2 R_c i_a(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_a(t) = \frac{E}{2}$$

Pour l'onde réfléchie :



$$\text{car } v_b(t) = -R_c i_b(t)$$

3.3.a) $\Gamma = \frac{R_m - R_c}{R_m + R_c}$ avec $R_m = R_c$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma = 0}$$

$\Rightarrow$ le coefficient de réflexion est nul

$$\Rightarrow v_b(t + \frac{l}{c}) = 0 \quad \forall t$$

$\Rightarrow$ il n'y a pas d'onde réfléchie (a retenir le résultat de la question 2.9))

$$\Rightarrow v_b(t + \frac{l}{c}) = 0 \quad \forall t \text{ et } \forall t$$

3.3.b) $\Rightarrow v(l, t) = v_a(t - \frac{l}{c}) + v_b(t + \frac{l}{c})$

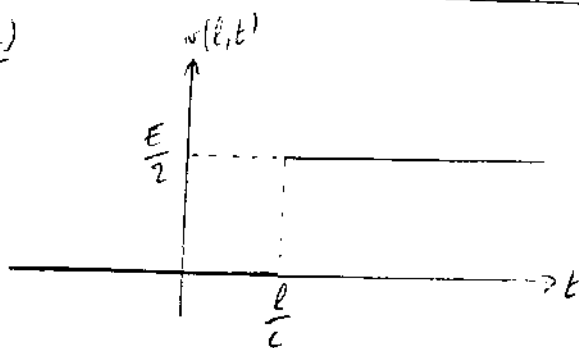
$$v(l, t) = v_a(t - \frac{l}{c})$$

or of 3.2.b), $v_a(t) = \frac{v_g(t)}{2}$

$$\Rightarrow v_a(t - \frac{l}{c}) = \frac{v_g(t - \frac{l}{c})}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{v(l, t) = \frac{v_g(t - \frac{l}{c})}{2}}$$

3.3.-1)



3.4.-a) circuit ouvert $\Rightarrow R_m \rightarrow \infty$

$$\Gamma = \frac{R_m - R_c}{R_m + R_c} \rightarrow 1 \Rightarrow \boxed{\Gamma = 1}$$

$$\Rightarrow v_b(t + \frac{l}{c}) = v_a(t - \frac{l}{c})$$

L'onde est totalement réfléchie

3.4.-b) * $v(l, t) = v_a(t - \frac{l}{c}) + v_b(t + \frac{l}{c})$

$$= 2 v_a(t - \frac{l}{c})$$

$$\boxed{v(l, t) = v_g(t - \frac{l}{c})}$$

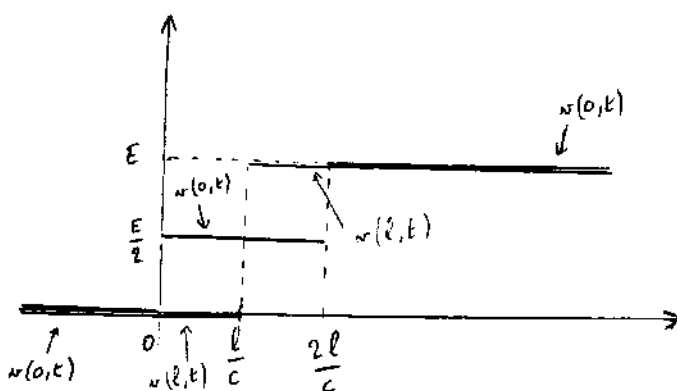
* $v(0, t) = v_a(t) + v_b(t)$ avec $v_a(t) = \frac{v_g(t)}{2}$

$$\text{or } v_b(t + \frac{l}{c}) = v_a(t - \frac{l}{c})$$

$$\Rightarrow v_b(t) = v_a(t - \frac{2l}{c})$$

$$\Rightarrow v(0, t) = \frac{v_g(t)}{2} + \frac{v_g(t - \frac{2l}{c})}{2}$$

$$\boxed{v(0, t) = \frac{v_g(t) + v_g(t - \frac{2l}{c})}{2}}$$



3.5.-a) court-circuit $\Rightarrow R_m = 0$

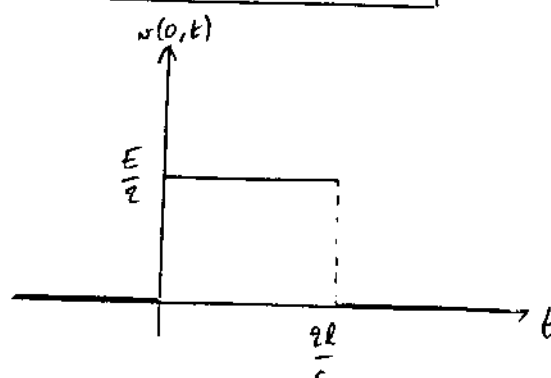
$$\Gamma = \frac{R_m - R_c}{R_m + R_c} = \frac{-R_c}{R_c} = -1 \Rightarrow \boxed{\Gamma = -1}$$

L'onde est totalement réfléchie, mais avec inversion du signe

$$\Rightarrow v_b(t + \frac{l}{c}) = -v_a(t - \frac{l}{c})$$

3.5.-b) $v(0, t) = v_a(t) + v_b(t) = \frac{v_g(t)}{2} - v_a(t - \frac{2l}{c})$

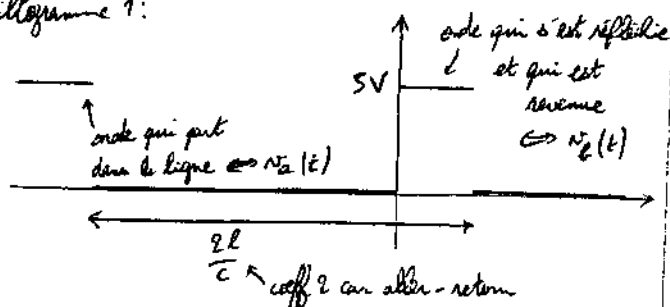
$$\boxed{v(0, t) = \frac{v_g(t) - v_g(t - \frac{2l}{c})}{2}}$$



3.6) Application : le réflectométrie temporel

3.6.-a)

oscillogramme 1:



* $SV = 2V_{div} \times 2,5 \text{ divisions}$

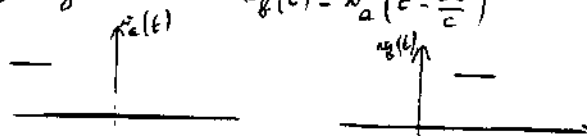
$$= \frac{10V}{2} = \frac{E}{2}$$

on a donc $v_a(t) = \frac{E}{2}$ donc on est dans le cas de

L'étude faite précédemment $\Rightarrow R_c = R_G$

$$\Rightarrow \boxed{R_c = R_G = 50 \Omega}$$

* oscillogramme 1: $v_b(t) = v_a(t - \frac{2l}{c})$



on est dans le cas de la question 3-4)

$\Rightarrow R_u \rightarrow \infty$ pour l'oscillogramme 1

* oscillogramme 2 : $v_g(t) = -v_a(t - \frac{2l}{c})$

on est dans le cas de la question 3-5)

$\Rightarrow R_u = 0$ pour l'oscillogramme 2

* on a $\frac{2l}{c} = 5 \text{ divisions} \times 100 \text{ ns/div} = 500 \text{ ns}$

↑
coefficient aller-retour

avec $c = 2,0 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$

on trouve $l = 50 \text{ m}$

* $R_c = L_1 c \Rightarrow L_1 = \frac{R_c}{c} = \frac{50}{2,0 \cdot 10^8}$

$L_1 = 2,5 \cdot 10^{-7} \text{ H}$

* $R_c = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \Rightarrow C_1 = \frac{L_1}{R_c^2}$

$C_1 = 100 \text{ pF}$

3-6-b) partie A:

$R_c = 51 \Omega$

$c = 2,1 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$

ici:

$R_c = 50 \Omega$

$c = 2,0 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$

or L_1 et C_1 se déduisent de R_c et c

($c L_1 = R_c$ et $R_c = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$)

or dans les 2 parties, R_c et c sont quasiment les mêmes $\Rightarrow$ on trouve quasiment les mêmes L_1 et C_1

partie A:

$L_1 = 2,41 \cdot 10^{-7} \text{ H}$

$C_1 = 32,4 \text{ pF}$

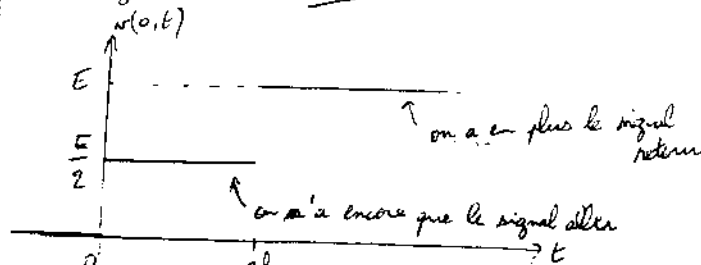
ici:

$L_1 = 2,5 \cdot 10^{-7} \text{ H}$

$C_1 = 100 \text{ pF}$

3-6-c)

a oscillogramme 1: cas 3-4)

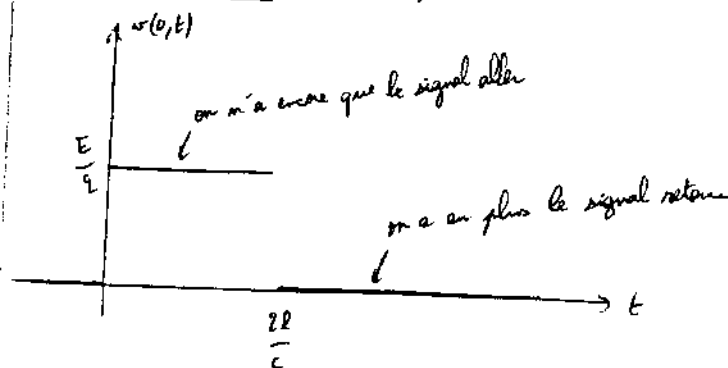


signal aller : $\frac{E}{2}$

signal retour : $E - \frac{E}{2} = \frac{E}{2}$

} les signaux aller et retour sont identiques

* oscillogramme 2: cas 3-5)



signal aller : $\frac{E}{2}$

signal retour : $0 - \frac{E}{2} = -\frac{E}{2}$

} les signaux aller et retour sont opposés.