

I) Champ de gravitation :

I-1)

$$\vec{E}(A) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

I-2.1) Le flux du champ électrostatique (flux sortant)

à travers une surface fermée S est égal à la charge à l'intérieur de la surface S , divisée par la permittivité électrique du vide ϵ_0 (si on est dans le vide!).

I-2.2)

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

I-3.1) Soit ρ la densité volumique de charges

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

* thm de Gauss : $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$

* symétries : tous les plans contenant (ON) sont plans de symétrie de la distribution de charges, or $\vec{E}$ est un vecteur polaire $\Rightarrow \vec{E}(r) \in$ à tous ces plans

$$\Rightarrow \vec{E} = E \vec{u}_r$$

* invariances : on a invariance de la distribution de charges par rotation autour du point O

$$\Rightarrow \vec{E} = \vec{E}(r, \theta, \phi) = \vec{E}(r)$$

$$\text{et } U = U(r, \theta, \phi) = U(r)$$

$$\Rightarrow \vec{E} = E(r) \vec{u}_r$$

* choix de la surface de Gauss : $S =$ sphère de centre O et de rayon r

$$\Rightarrow \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E(r) \vec{u}_r \cdot d\vec{S} \vec{u}_r = \oint_S E(r) dS = E(r) \oint_S dS$$

$$\Rightarrow \phi = E(r) 4\pi r^2$$

$$1^{\text{er}} \text{ cas : } 0 < r < R : Q_{int} = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\Rightarrow E(r) 4\pi r^2 = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{4}{3}\pi r^3 \times \frac{1}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} \vec{u}_r \quad \text{pour } 0 < r < R$$

$$2^{\text{ème}} \text{ cas : } r > R : Q_{int} = Q = \rho \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \quad \text{pour } r > R$$

I-3.2)

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} U = -\frac{\partial U}{\partial r} \vec{u}_r$$

régime indépendant du temps

$$\Rightarrow \vec{E} = -\vec{\text{grad}} U$$

or (définition intrinsèque du gradient) : $dU = \vec{\text{grad}} U \cdot d\vec{l}$

$$\Rightarrow dU = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$I-3.3) dU = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -E \vec{u}_r \cdot d\vec{l} = -E dr$$

$$r > R : E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow dU = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

$$\Rightarrow U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + c$$

$$\text{or } \lim_{r \rightarrow \infty} U(r) = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$\Rightarrow U(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{pour } r > R$$

$$r < R : E = \frac{Q r}{4\pi\epsilon_0 R^3} \Rightarrow dU = -\frac{Q r}{4\pi\epsilon_0 R^3} dr$$

$$\Rightarrow U = -\frac{Q r^2}{8\pi\epsilon_0 R^3} + c$$

on a continuité du potentiel en $r=R$: $U(R^-) = U(R^+)$ I-6-1)

$$\Rightarrow -\frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R} + \frac{b}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 R}$$

$$\Rightarrow U(r) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad \text{pour } 0 < r < R$$

I-4-1)

$$E_1 = q U(r)$$

I-5-2)

$$E_1 = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{pour } r > R$$

$$E_1 = \frac{qQ}{8\pi\epsilon_0 R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad \text{pour } 0 < r < R$$

I-5-1)

$$\frac{dE_2}{dr} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E(r)^2$$

I-5-2)

$$E_2 = \iiint_{\text{tout l'espace}} \frac{1}{2} \epsilon_0 E(r)^2 dV$$

$$E_2 = \int_0^\infty \frac{1}{2} \epsilon_0 E(r)^2 4\pi r^2 dr$$

$$E_2 = \int_0^R \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \right)^2 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr$$

$$E_2 = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R^6} \underbrace{\int_0^R r^4 dr}_{\frac{R^5}{5}} + \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \underbrace{\int_R^\infty \frac{dr}{r^2}}_{\left[-\frac{1}{r} \right]_R^\infty = \frac{1}{R}}$$

$$E_2 = \frac{kQ^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

avec $k = \frac{3}{5}$

$$\vec{g}(A) = -\frac{Gm}{r^2} \vec{u}_r$$

(signe - car deux masses s'attirent !)

I-6-2)

$$\text{charge} \Leftrightarrow \text{masse}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \Leftrightarrow -G$$

I-6-3)

Par analogie avec la question I-3-1) :

$$\vec{g}(r) = -\frac{GM}{R^3} r \vec{u}_r \quad \text{pour } 0 < r < R$$

$$\vec{g}(r) = -\frac{GM}{r^2} \vec{u}_r \quad \text{pour } r > R$$

I-6-4)

Dans les 2 cas, on a $r > R$

$$g_{ST} = \frac{GM_S}{L^2} = 5,9 \cdot 10^{-3} \text{ m.s}^{-2}$$

$$g_{TS} = \frac{GM_T}{L^2} = 1,8 \cdot 10^{-2} \text{ m.s}^{-2}$$

en toute rigueur : $g_{ST} = \frac{GM_S}{(L - \frac{R_S}{2})^2}$ et $g_{TS} = \frac{GM_T}{(L - \frac{R_T}{2})^2}$
négligeable négligeable

I-6-5) Par analogie avec la question I-4-2) (cas où $r > R$) :

$$E_1 = -\frac{GM_T M_S}{L}$$

($r=L$)
 $q \rightarrow M_T$ $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rightarrow -G$
 $Q \rightarrow M_S$

I-6-6)

$$E_1 = -5,3 \cdot 10^{33} \text{ J}$$

I-6-7)

Par analogie avec la question I-5-2)

$$E_{2S} = -\frac{\frac{3}{5} GM_S^2}{R_S}$$

$$\text{et } E_{2T} = -\frac{\frac{3}{5} GM_T^2}{R_T}$$

I.6.8)

$$E_{2S} = -2,3 \cdot 10^{41} \text{ J}$$

$$E_{2T} = -2,3 \cdot 10^{32} \text{ J}$$

$$E_{2TS} = E_{2S} + E_{2T} + E_1 \simeq E_{2S} = -2,3 \cdot 10^{41} \text{ J}$$

$$|E_{2S}| \gg |E_1| > |E_{2T}|$$

La Terre n'est rien à côté du Soleil !!!

II) Stabilité d'une étoile sphérique :

II-1) Stabilité thermique :

II-1.1) gaz parfait $\Rightarrow$ pas d'interaction entre les atomes

$\Rightarrow$ pas d'énergie potentielle

$$\Rightarrow E_S = (\text{nombre d'atomes}) \times (\text{énergie cinétique d'un atome})$$

$$\begin{aligned} \text{nombre d'atomes} &= N_A \times \text{nombre de moles} \\ &= N_A \times \frac{M_S}{M_H} \end{aligned}$$

$$E_S = N_A \frac{M_S}{M_H} \frac{3}{2} kT = N_A \frac{M_S}{M_H} \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T$$

$$E_S = \frac{3}{2} \frac{M_S}{M_H} R T$$

II-1.2) Il faut que l'énergie totale (cinétique + gravitationnelle) reste négative pour que le Soleil ne soit pas en expansion infinie. Si l'énergie était positive, le Soleil serait en expansion pour diminuer son énergie.

$$\Rightarrow E_S + E_{2S} < 0 \quad (\text{état lié: } E < 0)$$

$$\frac{3}{2} \frac{M_S}{M_H} R T < \frac{3}{5} \frac{G M_S^2}{R_S}$$

$$T < \frac{2 G M_S M_H}{5 R_S R} = T_{\text{max}} = 9,2 \cdot 10^6 \text{ K}$$

II-2) Stabilité dynamique :

II-2.1) Soit une masse m à la surface de l'étoile.

A la limite de la libération de la masse m , on a :

$$E_c(m) + E_a = 0$$

avec $E_c(-)$ l'énergie cinétique de la masse m

et E_a l'énergie d'interaction gravitationnelle entre l'étoile et la masse m

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_l^2 - \frac{G m M}{R} = 0$$

$\uparrow$
d'après I-6-5)

$$\Rightarrow v_l = \sqrt{\frac{2 G M}{R}}$$

II-2.2) sur l'étoile : $v_{\text{max}} = R \Omega$ avec Ω la vitesse de rotation de l'étoile

$$\Rightarrow R \Omega < \sqrt{\frac{2 G M}{R}}$$

$$\text{II-2.3)} \quad R \Omega = R_S \frac{2\pi}{T_S} = 1700 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\sqrt{\frac{2 G M}{R}} = \sqrt{\frac{2 G M_S}{R_S}} = 620 000 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\Rightarrow R \Omega < \sqrt{\frac{2 G M}{R}}$$

$\Rightarrow$ le Soleil vérifie la condition de stabilité dynamique

II-2.4) Si $v_l > c$, alors l'étoile est stable dynamiquement (car v est nécessairement inférieur à c !)

$$v_l = \sqrt{\frac{2 G M}{R}} > c \Rightarrow \frac{M}{R} > \frac{c^2}{2 G}$$

$$M = \rho \frac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow \frac{M}{R} = \rho \frac{4}{3} \pi R^2$$

$$\Rightarrow \rho > \frac{3 c^2}{8 \pi R^2 G}$$

$$\text{II-2.5)} \quad \rho_{\text{min}} = \frac{3 c^2}{8 \pi R_S^2 G} = 3,3 \cdot 10^8 \text{ kg.m}^{-3}$$

$$\rho_{\text{sol}} = \frac{\rho_s}{\frac{4}{3}\pi R_s^3} = 1400 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$\rho_{\text{min}} \gg \rho_{\text{sol}}$$

$$\rho_{\text{min}} = 3,3 \cdot 10^8 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \quad (\text{c'est une valeur considérable!})$$

II-3) Aspect hydrostatique :

II-3.1) Soit un élément de volume dV en équilibre hydrostatique. Alors la somme des forces s'exerçant sur ce volume est nulle.

• forces de pression : $d\vec{f} = -\vec{\text{grad}} P dV$

• poids : $d\vec{P} = \rho dV \vec{g}$

$$\Rightarrow d\vec{f} + d\vec{P} = \vec{0} \Rightarrow -\vec{\text{grad}} P dV + \rho dV \vec{g} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{\text{grad}} P = \rho \vec{g}$$

II-3.2) $\vec{\text{grad}} P = \frac{\partial P}{\partial r} \vec{u}_r$ $\Rightarrow \vec{\text{grad}} P = \frac{dP}{dr} \vec{u}_r$

$$\Rightarrow \frac{dP}{dr} = \rho \vec{g} \cdot \vec{u}_r$$

$$\begin{aligned} \text{a } \vec{g} &= -\frac{GM}{R^3} \vec{u}_r \quad \text{pour } r < R \\ &= -\frac{G \rho \frac{4}{3}\pi r^3}{R^3} \vec{u}_r = -\frac{G \rho \frac{4}{3}\pi r^3}{r^2} \vec{u}_r \\ &= -\frac{G \rho \pi r}{r^2} \vec{u}_r \quad \text{pour } r < R \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{dr} = -\frac{G \rho(r) \pi(r)}{r^2}$$

II-3.3) $P(r) = P_c \left(1 - \frac{r}{R_s}\right)$

car $P(r)$ est une fonction affine, $P(R_s) = 0$
et $P(0) = P_c$

$$\Rightarrow \frac{dP}{dr} = -\frac{P_c}{R_s}$$

$$+ \rho(r) = \rho_{\text{moy}} = \frac{\rho_s}{\frac{4}{3}\pi R_s^3}$$

$$+ \frac{\rho(r)}{r^2} = \frac{\rho_s}{\left(\frac{R_s}{2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{P_c}{R_s} = -\frac{G \frac{\rho_s}{\frac{4}{3}\pi R_s^3} \frac{\rho_s}{2}}{\frac{R_s^2}{4}}$$

$$\Rightarrow P_c = \frac{4 G \rho_s^2 R_s}{\frac{4}{3}\pi R_s^5} = \frac{3 G \rho_s^2}{\pi R_s^4}$$

$$P_c = \frac{3 G \rho_s^2}{\pi R_s^4}$$

• équation d'état des gaz parfaits : $PV = nRT$

$$P \frac{V}{n} = \frac{n}{n} RT \Rightarrow \frac{P}{\rho} = \frac{RT}{M}$$

$$\Rightarrow T = \frac{\rho P}{\rho R} \Rightarrow T_c = \frac{\rho_c P_c}{\frac{M_s}{\frac{4}{3}\pi R_s^3} R}$$

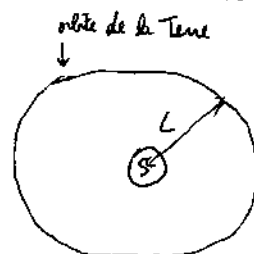
$$\Rightarrow T_c = \frac{\rho_c \cancel{4} G \rho_s^2 \cancel{4} \pi R_s^4}{\pi R_s^3 \cancel{M_s} R \cancel{3}}$$

$$T_c = \frac{4 \pi M_s G}{3 R R_s}$$

II-3.5) $T_c = 9,2 \cdot 10^3 \text{ K}$

III) Evolution du Soleil :

III-1.1)



surface de la sphère
de rayon L
 $= 4\pi L^2$

$$\Rightarrow P_s = P' 4\pi L^2$$

$$\text{III-1.2)} \quad P_s = 3,8 \cdot 10^{26} \text{ W}$$

III-2.1) initialement, le soleil avait un rayon infini (les atomes étaient éloignés les uns des autres)

$$\Rightarrow E_{s, \text{initial}} = \frac{-\frac{3}{5} G M_s^2}{R_s} = 0$$

$$P_s t_0 = E_{s, \text{initial}} - E_{s, \text{actuel}}$$

$$\Rightarrow t_0 = \frac{-E_{s, \text{actuel}}}{P_s} = \frac{\frac{3}{5} G M_s^2}{R_s P_s}$$

$$t_0 = \frac{3 G M_s^2}{5 R_s P_s}$$

$$\text{III-2.2)} \quad t_0 = 6,0 \cdot 10^{16} \text{ s} = 19 \text{ millions d'années}$$

III-2.3) Plusieurs milliards d'années, c'est très différent de 19 millions d'années $\Rightarrow$ les hypothèses précédentes sont fausses.

* l'énergie rayonnée ne provient pas que de l'énergie gravitationnelle

* $P_s \neq c^4$

III-2.4) L'énergie du Soleil provient surtout des réactions nucléaires qui s'y passent.

$$\text{III-3.1)} \quad M_s = \rho_{NB} \frac{4\pi}{3} R_{NB}^3 \Rightarrow R_{NB} = \left(\frac{3 M_s}{4\pi \rho_{NB}} \right)^{1/3}$$

$$\text{III-3.2)} \quad R_{NB} = 1,7 \cdot 10^8 \text{ m}$$

III-3.3) Dans le référentiel de Copernic (galiléen), on applique le théorème du moment cinétique au Soleil.

En l'absence d'actions extérieures $\Rightarrow$ conservation du moment cinétique

$$\Rightarrow J_{NB} \Omega_{NB} = J_s \Omega_s$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5} M_s R_{NB}^2 \frac{2\pi}{T_{NB}} = \frac{2}{5} M_s R_s^2 \frac{2\pi}{T_s}$$

$$\Rightarrow T_{NB} = T_s \left(\frac{R_{NB}}{R_s} \right)^2$$

$$\text{III-3.4)} \quad T_{NB} = 1500 \text{ s} \approx 26 \text{ min}$$

III-3.5) cf II-2.2)

$$\text{il faut } R_{NB} \frac{2\pi}{T_{NB}} < \sqrt{\frac{2 G M_s}{R_{NB}}}$$

$$R_{NB}^2 \frac{4\pi^2}{T_s^2} \left(\frac{R_s}{R_{NB}} \right)^4 < \frac{2 G M_s}{R_{NB}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R_{NB}^2} \frac{4\pi^2 R_s^4}{T_s^2} < \frac{2 G M_s}{R_{NB}}$$

$$\frac{1}{R_{NB}} < \frac{2 G M_s T_s^2}{4\pi^2 R_s^4}$$

$$\Rightarrow R_{NB} > \frac{2\pi^2 R_s^4}{G M_s T_s^2}$$

$$\text{III-3.6)} \quad R_{NB} > 5,3 \text{ km}$$

IV) Lunette astronomique:

IV-1) * Tout rayon incident parallèle à l'axe optique ressort en passant par le foyer image F'_1 .

* or $F'_1 = F_2$ et tout rayon passant par le foyer objet F_2 ressort parallèle à l'axe optique.

IV-2) * Tout faisceau de lumière parallèle converge dans le plan focal image or le rayon passant par O_1 n'est pas dévié, d'où B_1 .

* Tous les rayons passant par B_1 (B_1 dans le plan focal objet de L_2) ressortent parallèles entre eux.

Or le rayon passant par O_2 n'est pas dévié.

D'où finalement le trajet du rayon étudié.

IV-3) Dans le triangle $O_1 F'_1 B_1$:

$$\tan \alpha = \frac{B_1 F'_1}{f'_1}$$

Dans le triangle $O_2 F_2 B_1$: $\tan \alpha' = \frac{B_1 F_2}{f_2}$

or $F'_1 = F_2$

$$\Rightarrow \frac{\tan \alpha'}{\tan \alpha} = \frac{f'_1}{f_2}$$

or on est dans les conditions de Gauss $\Rightarrow \alpha \ll 1$
 $\alpha' \ll 1$

$$\Rightarrow \tan \alpha \simeq \alpha \text{ et } \tan \alpha' \simeq \alpha'$$

De plus, α et α' sont de sens opposés

$$\Rightarrow G = \frac{\alpha'}{\alpha} \simeq - \frac{f'_1}{f_2}$$

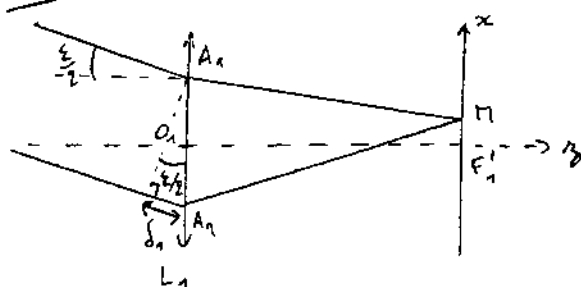
IV-4) $G = - \frac{f'_1}{f_2} = -25$

V) Mesure de la distance angulaire des composantes d'une étoile double:

V-1-1) Les 2 étoiles ne constituent pas des sources cohérentes car elles sont distinctes (pas de relation de phase entre les 2 sources).

* Les 2 étoiles sont incohérentes, donc l'éclairement total est la somme des éclairements donnés par chaque source. On superpose les 2 figures d'interférences.

V-1-2)



en A_1 et A_2 , les 2 rayons traversent la même quantité de verre $\Rightarrow$ pas de différence de marche supplémentaire

$$\Rightarrow \delta = \delta_1 + \delta_2$$

↑ ↑
avant L_1 après L_1

$$\delta_1 = e \sin \frac{\epsilon}{2} \simeq e \frac{\epsilon}{2} \text{ car } \epsilon \ll 1 \text{ (étoiles très voisines)}$$

calcul de δ_2 :

$$A_2 \begin{pmatrix} -\frac{\epsilon}{2} \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A_1 \begin{pmatrix} \frac{\epsilon}{2} \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Pi \begin{pmatrix} x \\ y \\ f'_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{A_1 \Pi} \begin{pmatrix} x - \frac{\epsilon}{2} \\ y - y_0 \\ f'_1 \end{pmatrix} \quad \vec{A_2 \Pi} \begin{pmatrix} x + \frac{\epsilon}{2} \\ y - y_0 \\ f'_1 \end{pmatrix}$$

$$\delta_2 = A_2 \Pi - A_1 \Pi = \sqrt{\left(x - \frac{\epsilon}{2}\right)^2 + (y - y_0)^2 + f_1'^2} - \sqrt{\left(x + \frac{\epsilon}{2}\right)^2 + (y - y_0)^2 + f_1'^2}$$

$$\delta_2 = f_1' \left(\sqrt{1 + \frac{\left(x - \frac{\epsilon}{2}\right)^2}{f_1'^2} + \frac{(y - y_0)^2}{f_1'^2}} - \sqrt{1 + \frac{\left(x + \frac{\epsilon}{2}\right)^2}{f_1'^2} + \frac{(y - y_0)^2}{f_1'^2}} \right)$$

$$f'_1 \gg e \cdot f'_1 \gg |\pi| \cdot f'_1 \gg |y| \cdot f'_1 \gg |y_0|$$

$$\text{et } \sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2}$$

$$\Rightarrow d_2 = f'_1 \left(\sqrt{1 + \frac{(\pi + \frac{e}{2})^2}{2f_1'^2}} + \frac{(y - y_0)^2}{2f_1'^2} - \left(\sqrt{1 + \frac{(\pi - \frac{e}{2})^2}{2f_1'^2}} + \frac{(y - y_0)^2}{2f_1'^2} \right) \right)$$

$$d_2 = \frac{1}{2f_1'} \left((\pi + \frac{e}{2})^2 - (\pi - \frac{e}{2})^2 \right) = \frac{e\pi}{f_1'}$$

ne dépend pas de y_0 , d'où l'utilisation de fentes à la place des trous d'Young.

$$\Rightarrow \boxed{\delta = e \left(\frac{\pi}{f_1'} + \frac{\varepsilon}{2} \right)}$$

II-1.3) Soit I_1 l'intensité lumineuse donnée par l'étoile 1 à travers une seule fente.

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{I}(\eta) = 2I_1 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi e}{\lambda} \left(\frac{\pi}{f_1'} + \frac{\varepsilon}{2} \right) \right) \right)}$$

$$\text{II-1.4)} \quad \Delta\varphi = 2\pi, \quad \Delta\delta = \lambda$$

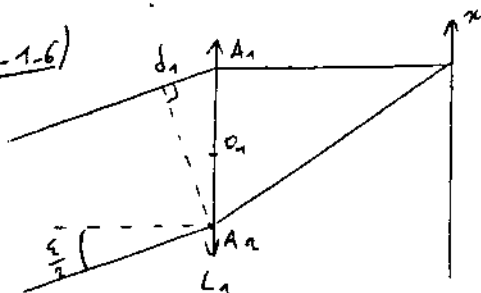
$$e \left(\frac{\Delta\pi}{f_1'} + 0 \right) = \lambda \Rightarrow \Delta\pi = \lambda = \frac{\lambda f_1'}{e}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{\lambda f_1'}{e}}$$

II-1.5)

$$\lambda = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 50 \mu\text{m}$$

II-1.6)



$$\delta = d_2 - d_1$$

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{\delta = e \left(\frac{\pi}{f_1'} - \frac{\varepsilon}{2} \right)}$$

$$\frac{\varepsilon}{2} \rightarrow -\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\mathcal{I}(\eta) = 2I_2 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi e}{\lambda} \left(\frac{\pi}{f_1'} - \frac{\varepsilon}{2} \right) \right) \right)$$

$$\Delta\delta = \lambda \Rightarrow e \left(\frac{\lambda}{f_1'} - 0 \right) = \lambda$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{\lambda f_1'}{e} = 50 \mu\text{m}}$$

II-1.7) les 2 étoiles sont incohérentes

$$\Rightarrow \mathcal{I}(\eta) = \mathcal{I}_1(\eta) + \mathcal{I}_2(\eta)$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{I}(\eta) = 2I_1 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi e}{\lambda} \left(\frac{\pi}{f_1'} + \frac{\varepsilon}{2} \right) \right) \right) + 2I_2 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi e}{\lambda} \left(\frac{\pi}{f_1'} - \frac{\varepsilon}{2} \right) \right) \right)}$$

II-1.8) On observe des franges d'interférences car

$$\mathcal{I}(\eta) = \mathcal{I}(x) : \text{on a des franges rectilignes horizontales.}$$

$$\text{De plus, } \mathcal{I}(x) = \mathcal{I}(x + \lambda) = \mathcal{I}(x + \frac{\lambda f_1'}{e})$$

$$\Rightarrow \text{interfrange } \boxed{\lambda = \frac{\lambda f_1'}{e}}$$

II-2.1) On suppose $I_1 = I_2 = I_0$

$$\Rightarrow \mathcal{I}(\eta) = 4I_0 + 2I_0 \left(\cos \left(\frac{2\pi e}{\lambda} \left(\frac{\pi}{f_1'} + \frac{\varepsilon}{2} \right) \right) + \cos \left(\frac{2\pi e}{\lambda} \left(\frac{\pi}{f_1'} - \frac{\varepsilon}{2} \right) \right) \right)$$

$$\text{on } \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\Rightarrow \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{I}(\eta) = 4I_0 \left(1 + \cos \frac{\pi e \varepsilon}{\lambda} \cos \frac{2\pi e x}{\lambda f_1'} \right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{I}_{\max} = 4I_0 \left(1 + \left| \cos \frac{\pi e \varepsilon}{\lambda} \right| \right)}$$

$$\boxed{\mathcal{I}_{\min} = 4I_0 \left(1 - \left| \cos \frac{\pi e \varepsilon}{\lambda} \right| \right)}$$

$$\text{II-2.2)} \quad \mathcal{C} = \frac{\mathcal{C}_{\max} - \mathcal{C}_{\min}}{\mathcal{C}_{\max} + \mathcal{C}_{\min}}$$

$$\mathcal{C} = \frac{8 I_0 \left| \cos \frac{\pi e \varepsilon}{\lambda} \right|}{8 I_0}$$

$$\mathcal{C} = \left| \cos \frac{\pi e \varepsilon}{\lambda} \right|$$

On a brouillage des franges quand le contraste est nul.

$$\cos \frac{\pi e \varepsilon}{\lambda} = 0 \Rightarrow \frac{\pi e \varepsilon}{\lambda} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow e = \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{\varepsilon} \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\text{II-2.3)} \quad 1^{\text{ère}} \text{ annulation : } k=0 \Rightarrow e_m = \frac{\lambda}{2\varepsilon}$$

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{2e_m} = 4,2 \cdot 10^{-6} \text{ rad} = 0,87''$$

VI) Pouvoir séparateur de l'objectif :

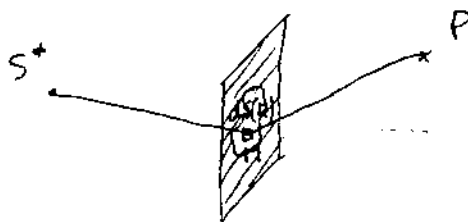
III-1) Principe d'Huygens - Fresnel :

Soit (S) une ouverture plane éclairée par une source ponctuelle S^* monochromatique de longueur d'onde λ .

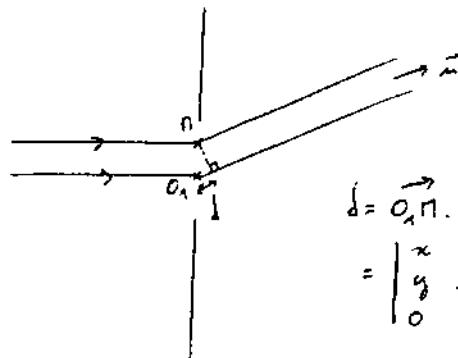
Soit un découpage de (S) en éléments de surface $dS(\pi)$ centrés sur un point courant π . Alors, pour le calcul de l'éclairement en un point P :

a) chaque élément de surface se comporte comme une source ponctuelle fictive, émettant une ondelette sphérique dont l'amplitude complexe instantanée en P est proportionnelle à l'amplitude complexe instantanée $a_{S^*}(\pi, t)$ de l'onde émise par S^* en π , et à l'élément de surface $dS(\pi)$.

b) les sources fictives sont cohérentes.



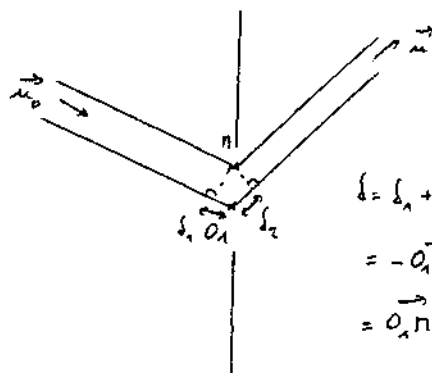
$$\text{VII) 2-1)} \quad da = a_0 e^{j\tau} dS \quad \text{avec } \tau = \frac{2\pi \delta}{\lambda}$$



$$\begin{aligned} \delta &= \vec{O_1 \pi} \cdot \vec{n} \\ &= \begin{vmatrix} x \\ y \\ 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{vmatrix} \\ &= \alpha x + \beta y \end{aligned}$$

$$\Rightarrow da = a_0 e^{j \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha x + \beta y)} dS$$

VI-2.2)



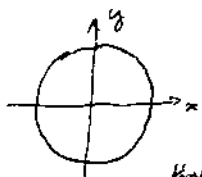
$$\begin{aligned} \delta &= \delta_1 + \delta_2 \\ &= -\vec{O_1 \pi} \cdot \vec{n_0} + \vec{O_2 \pi} \cdot \vec{n} \\ &= \vec{O_1 \pi} \cdot (\vec{n} - \vec{n_0}) \\ &= (\alpha - \alpha_0)x + (\beta - \beta_0)y \end{aligned}$$

$$da = a_0 e^{j \frac{2\pi}{\lambda} ((\alpha - \alpha_0)x + (\beta - \beta_0)y)} dS$$

III-3.1) L'objectif étant circulaire, la figure de diffraction dans le plan focal image de L_1 est de révolution axiale autour de l'axe zy , et centrée sur l'image géométrique de la source. On dessine donc des anneaux centrés sur l'image géométrique de la source.

$$\text{VI-3.2)} \quad a' = a_0 \iint e^{j \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta$$

$$\Rightarrow a' = a_0 \iint e^{j \frac{2\pi}{\lambda} \alpha x} d\alpha d\beta$$



$$x^2 + y^2 = R^2$$

on intègre uniquement sur la partie haute du disque

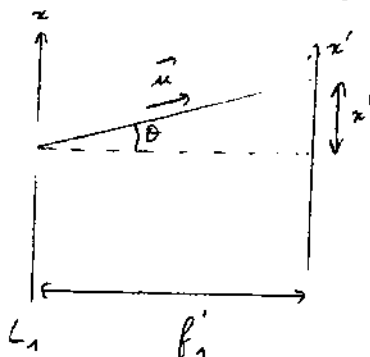
$$a' = 2 \Delta_0 \int_{-R}^R \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} e^{j \frac{2\pi}{\lambda} x y} dy dx$$

$$a' = 2 \Delta_0 \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} e^{j \frac{2\pi}{\lambda} x} dx$$

VI-3.3) Centre de la figure d'interférence : a' est maximum
(image géométrique de la source) $\Rightarrow a' = 1 \Rightarrow m = 0$
 $\Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow x' = 0$

* minima : $a' = 0 \Rightarrow 1^{\text{er}} \text{ minimum nul : } m = 3,83$

$$m = 3,83 = \frac{2\pi R \alpha}{\lambda} \Rightarrow \alpha = \frac{3,83 \lambda}{2\pi R} \left(= \frac{0,61 \lambda}{R} \right)$$



$$\left. \begin{aligned} x' &= f_1' \tan \theta \approx f_1' \theta \\ \text{or } \vec{u} \cdot \vec{u}_x &= \alpha = \sin \theta \approx \theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow x' = f_1' \alpha$$

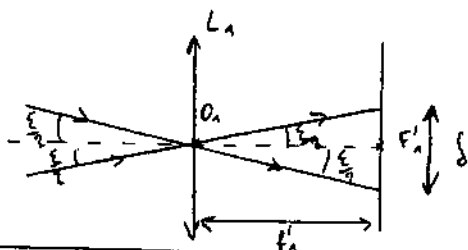
$$1^{\text{er}} \text{ minimum : } x' = \frac{3,83 \lambda f_1'}{2\pi R}$$

On en a aussi un en $-x'$ (symétrie)

Entre les premiers minima nuls situés de part et d'autre de F_1' , on a

$$\Delta x' = \frac{3,83 \lambda f_1'}{\pi R}$$

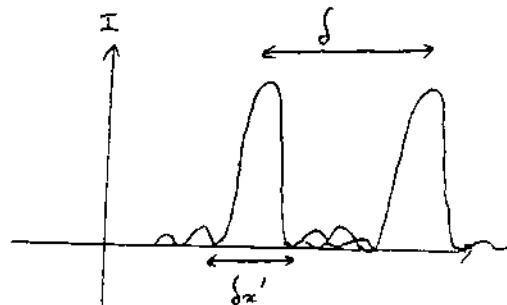
VI-4.1)



$$\frac{\delta}{2} = f_1' \tan \frac{\epsilon}{2} \quad \text{or } \epsilon \ll 1 \Rightarrow \tan \frac{\epsilon}{2} \approx \frac{\epsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \delta = f_1' \epsilon$$

VI-4.2)



Il faut

$$\delta > \frac{\delta x'}{2}$$

C'est le critère de Rayleigh.

$$f_1' \epsilon > \frac{3,83 \lambda f_1'}{2\pi R}$$

$$\epsilon > \frac{3,83 \lambda}{2\pi R} = \epsilon_m$$

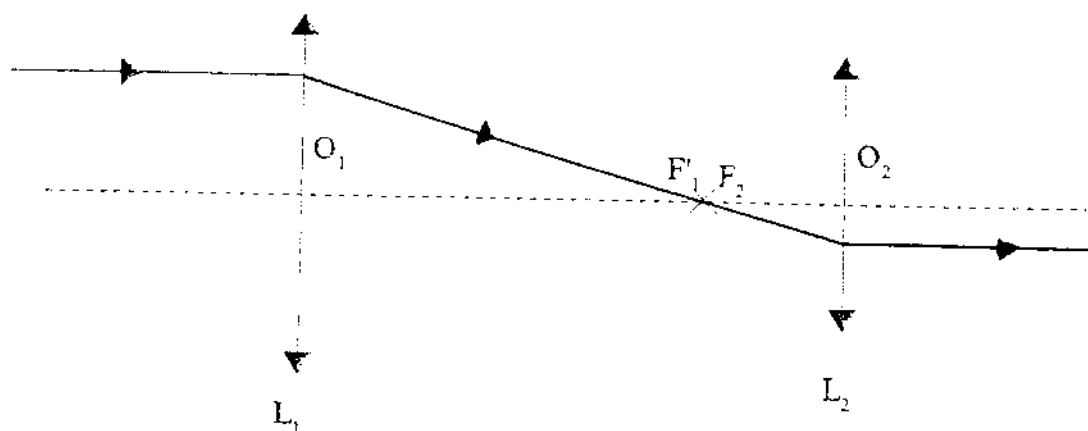
VI-4.3)

$$\epsilon_m = 3,83 \cdot 10^{-6} \text{ rad} = 0,75''$$

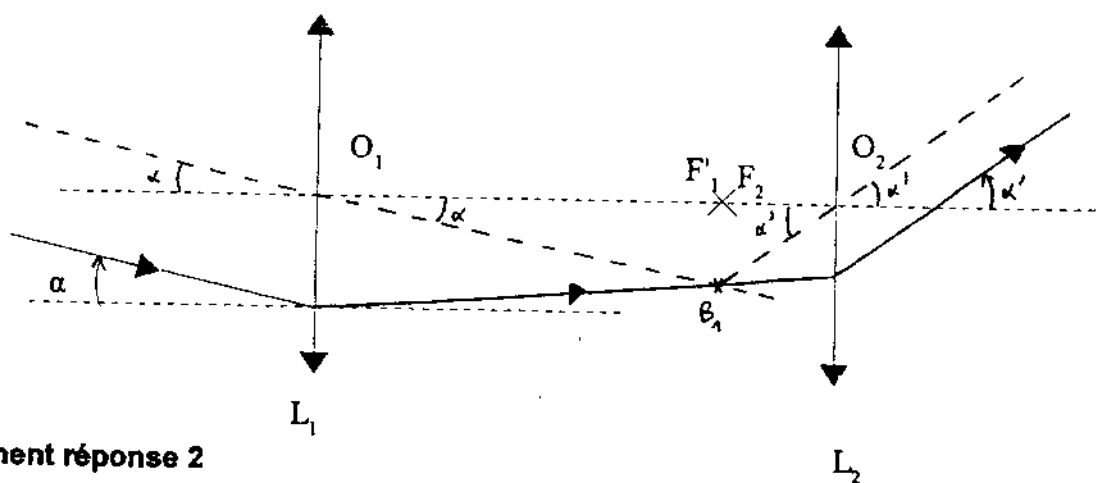
$$\delta_m = f_1' \epsilon_m = 1,8 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 1,8 \mu\text{m}$$

FEUILLET MOBILE A RENDRE AVEC LA COPIE :

DOCUMENTS RÉPONSES



Document réponse 1



Document réponse 2