

ENS de Paris Filière PC 2008

Interaction d'une onde électromagnétique avec des nanoparticules métalliques

1

Q 1 $n_e = \frac{d\rho_{\text{eau}} N_A}{M} = 5,85 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$

Q 2 $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -e\mathbf{E} - \frac{\mathbf{p}}{\tau} \Rightarrow -i\omega\mathbf{p} + \frac{\mathbf{p}}{\tau} = -e\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{p} = \frac{-e\mathbf{E}}{\frac{1}{\tau} - i\omega} = \frac{-e\tau}{1 - i\omega\tau} \mathbf{E}$

Q 3 $\mathbf{j} = -n_e e \mathbf{v} = -n_e e \frac{\mathbf{p}}{m} = \frac{n_e e^2 \tau}{m} \frac{1}{1 - i\omega\tau} \mathbf{E}$

Q 4 On combine les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère :
 $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} \Rightarrow \text{rot rot } \mathbf{E} = -\partial_t \text{rot } \mathbf{B} \Rightarrow \text{grad div } \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} = -\partial_t (\mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E})$
 Avec la forme proposée pour $\mathbf{E}$, $\text{div } \mathbf{E} = \partial_z E = 0$. Comme $\partial_t = -i\omega$, il vient en éliminant $\mathbf{j}$

$$\Delta \mathbf{E} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} + i\omega\mu_0 \frac{n_e e^2 \tau}{m} \frac{1}{1 - i\omega\tau} \right) \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

$$\Delta \mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + i \frac{n_e e^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega} \frac{\tau}{1 - i\omega\tau} \right) \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

$$\Delta \mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + i \frac{n_e e^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega} \frac{1}{1/\tau - i\omega} \right) \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

$$\Delta \mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(i\gamma + \omega)} \right) \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

Q 5 $\omega_p = 1,36 \cdot 10^{16} \text{ rad.s}^{-1}$, $\nu_p = 2,17 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$, $E_p = h\nu_p = 8,98 \text{ eV}$, $\lambda_p = 138 \text{ nm}$ ultra-violet.

Q 6 On calcule numériquement $\gamma = 3,0 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}$ alors que dans le visible ou l'infrarouge, $\omega \simeq 10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$. On a donc $\gamma \ll \omega$ ce qui autorise le développement limité

$$\frac{1}{\omega + i\gamma} = \frac{1}{\omega} \frac{1}{1 + i\frac{\gamma}{\omega}} \simeq \frac{1}{\omega} \left(1 - i\frac{\gamma}{\omega} \right) = \frac{1}{\omega} - i\frac{\gamma}{\omega^2}$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} \epsilon &\simeq 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega} \left(\frac{1}{\omega} - i\frac{\gamma}{\omega^2} \right) \\ &\simeq \underbrace{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}_{\epsilon_1} + i \underbrace{\frac{\gamma\omega_p^2}{\omega^3}}_{\epsilon_2} \end{aligned}$$

Dans l'infrarouge ou le visible, $\lambda \gg \lambda_p$ de sorte que $\omega \ll \omega_p$ et $\epsilon_1 \simeq -\frac{\omega_p^2}{\omega^2}$. Cette approximation atteint cependant sa limite de validité dans le bleu.

Q 7 L'équation d'onde fournit $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon$. On identifie $n^2 = \epsilon(\omega)$. Comme $\gamma/\omega \ll 1$, $\epsilon_2 \ll |\epsilon_1|$. Alors

$$n^2 = \epsilon_1 \left(1 + i\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right) n \simeq \pm i\sqrt{|\epsilon_1|} \left(1 + \frac{i\epsilon_2}{2\epsilon_1} \right)$$

Pour une onde se propageant selon $+x$, on choisit $\Re(n) > 0$ donc

$$n \simeq i\sqrt{|\epsilon_1|} + \frac{\epsilon_2}{2\sqrt{|\epsilon_1|}} = i\frac{\omega_p}{\omega} + \frac{\gamma}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

Q 8 Avec $n = n_1 + in_2$, la pulsation spatiale complexe s'écrit $k = (n_1 + in_2) \frac{\omega}{c}$ d'où le champ électrique

$$\mathbf{E} = E_0 \mathbf{u}_z \exp \left[i \left(n_1 \frac{\omega}{c} x - \omega t \right) \right] \exp \left(-n_2 \frac{\omega}{c} x \right)$$

L'intensité de l'onde est proportionnelle à $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* = \exp(-2n_2 \frac{\omega}{c} x)$. Elle s'atténue en $I_0 e^{-\alpha x}$ avec $\alpha = 2n_2 \frac{\omega}{c}$

Q 9 L'infrarouge correspond à la partie gauche des courbes où $\hbar\omega \leq 2eV$. Le modèle implique $n_1 \ll n_2$ ce qui permet d'identifier les carrés gris comme les valeurs de n_2 et les ronds noirs comme celles de n_1 . La décroissance de n_2 s'accorde avec les expressions ci-dessus. Le comportement aux alentours de $\hbar\omega = 4eV$ mérite d'être commenté. L'indice de propagation n_1 augmente brutalement alors que n_2 présente un pic vers le bas. Cela correspond à vraisemblablement à l'annulation de $\epsilon_1 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ pour $\omega = \omega_p$. Dans ce cas en effet, $\epsilon = i\epsilon_2$ et $n_1 = n_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\epsilon_2}$. Cette interprétation implique $\hbar\omega_p \simeq 4eV$ alors que l'application numérique de la question 6 a fourni $\hbar\omega_p = 8,98 \text{ eV}$. La différence pourrait s'expliquer par un effet de masse effective $m_{\text{eff}} \neq m_e$.

Q 10 Au dessus de 5 eV, les mesures montrent que $n_1 \simeq n_2$ ce que le modèle précédent ne permet pas d'expliquer. Il faudrait tenir compte des électrons des couches d du métal.

¹ Solution proposée par A. Domsps et G. Requin. Merci de nous signaler les erreurs, énormes ou minimes, à l'adresse domps.andre@neuf.fr

Q 11 Le potentiel dipolaire s'écrit avec les notations de l'énoncé

$$d^3V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d^3\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Q 12 $V(\mathbf{r}) = \int_V d^3V(\mathbf{r}) = \int_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3r'$

Q 13 On note $\mathbf{u}_{\mathbf{r}'\mathbf{r}}$ le vecteur unitaire dirigé de $\mathbf{r}'$ vers $\mathbf{r}$

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mathbf{u}_{\mathbf{r}'\mathbf{r}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} = -\frac{\mathbf{u}_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} = \mathbf{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Q 14 Utilisons les relations d'analyse vectorielle fournies au début de l'énoncé.

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \mathbf{P} \cdot \mathbf{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \text{div} \left(\frac{\mathbf{P}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d^3r' - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \text{div} \mathbf{P} d^3r' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\mathbf{P}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V -\frac{\text{div} \mathbf{P}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \end{aligned}$$

Ce qui correspond à la forme proposée par l'énoncé avec $\rho_p = -\text{div} \mathbf{p}$ et $\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$.

Q 15 $\text{div} \mathbf{D} = \epsilon_0 \text{div} \mathbf{E} + \text{div} \mathbf{P}$. Utilisons l'équation de Maxwell-Gauss en tenant compte des charges libres et des charges de polarisation. $\text{div} \mathbf{D} = \rho_l + \rho_p + \text{div} \mathbf{P} = \rho_l$

Q 16

$$\begin{aligned} \text{div} \mathbf{j}_p + \partial_t \rho_p &= 0 \Rightarrow \text{div} \mathbf{j}_p - \partial_t \text{div} \mathbf{P} = 0 \Rightarrow \text{div} (\mathbf{j}_p - \partial_t \mathbf{P}) = 0 \\ \Rightarrow \exists \mathbf{M}, \mathbf{j}_p - \partial_t \mathbf{P} &= \mathbf{rot} \mathbf{M} \Rightarrow \mathbf{j}_p = \partial_t \mathbf{P} + \mathbf{rot} \mathbf{M} \end{aligned}$$

Q 17 Écrivons l'équation de Maxwell-Ampère en tenant compte de la densité volumique de courant des charges libres et de celle des charges de polarisation

$$\mathbf{rot} \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{j}_l + \mathbf{j}_p + \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) = \mu_0 (\mathbf{j}_l + \partial_t \mathbf{P} + \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) = \mu_0 (\mathbf{j}_l + \partial_t \mathbf{D})$$

Q 18 Dans le vide, l'équation de Maxwell-Gauss $\text{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ devient, en présence de charges surfaciques, $E_{n2} - E_{n1} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$. De même ici, $\text{div} \mathbf{D} = \rho_l$ conduira à $D_{n2} - D_{n1} = \sigma_l$ ou encore $(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} = \sigma_l$.

Dans le vide, l'équation de Maxwell-Faraday permet de montrer que $(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$. Comme cette équation locale n'est pas remise en cause dans le diélectrique, la condition de passage demeure applicable.

Q 19 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \epsilon_0 \chi \mathbf{E} = \epsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E}$. On identifie $\epsilon_r = 1 + \chi$, expression qui montre que χ est sans dimension. L'équation de Maxwell-Gauss devient $\text{div} \mathbf{E} = \frac{\rho_l}{\epsilon}$.

Q 20 Dans un isolant $\mathbf{j}_l = \mathbf{0}$. Pour une onde transverse $\text{div} \mathbf{D} = 0$ donc $\rho_l = 0$. On établit comme dans le vide l'équation de propagation en combinant les équations de Maxwell-Ampère et Maxwell-Faraday, à ceci près que $\epsilon_r \epsilon_0$ se substitue à ϵ_0 . On obtient

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{\epsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0}$$

Q 21 Pour une OPPM cela s'exprime par $k^2 = \epsilon_r \frac{\omega^2}{c^2}$, l'indice est défini par $n^2 = \epsilon_r$.

Q 22 Comme $\lambda \gg R$, le champ est presque uniforme à l'échelle de la sphère. Par ailleurs, $\lambda = c_d T \gg R$ est la condition usuelle autorisant l'ARQS.

Q 23 En supposant les sphères uniformément réparties sur un réseau cubique, chacune se trouve dans un cube de volume d_s^3 et $V = N_s d_s^3$. Donc $d_s^3 = V/N_s = V_s/f = \frac{4}{3}\pi R^3/f$ et

$$d_s = R \sqrt[3]{\frac{4\pi}{3f}} \simeq R \sqrt[3]{\frac{4}{f}} \quad (\text{ordre de grandeur})$$

Pour $f = 10^{-4}$ on obtient $d_s = 34R$. Les sphères sont suffisamment éloignées pour négliger leur influence réciproque; on se ramène à l'étude d'une sphère unique.

Q 24 Dans le cadre de l'ARQS, $\mathbf{E} = -\mathbf{grad} V$. Le préambule de 2.1 précise qu'il n'y a pas de charge libre donc $\text{div} \mathbf{E} = 0$ et $\Delta V = 0$.

Q 25 Le problème est invariant par rotation autour de l'axe (0z). En coordonnées sphériques le potentiel ne dépend donc pas de ϕ .

Q 26 On doit résoudre l'équation de Laplace dans deux milieux distincts; *a priori* les coefficients a_j et b_j diffèrent entre l'intérieur et l'extérieur de la sphère.

Q 27 Pour $r \rightarrow 0$, ni le champ ni le potentiel ne doivent présenter de singularité ce qui impose $b_j^s = 0$.

Q 28 Loin de la sphère, son influence devient négligeable et le champ tend vers le champ local $\mathbf{E}_l = E_l \mathbf{u}_z$ dérivant du potentiel $-E_l z = -E_l r \cos \theta$. Quand $r \rightarrow \infty$, $\frac{b_j}{r^{j+1}} \rightarrow 0$. On a donc

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j^d r^j P_j(\cos \theta) = -E_l r \cos \theta$$

En identifiant les coefficients sur la base des polynômes de Legendre, on obtient

$$a_1^d = -E_l \quad a_{j \neq 1}^d = 0$$

Q 29 Le potentiel électrostatique est continu en $r = R$:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(a_j^d R^j + \frac{b_j^d}{R^{j+1}} \right) P_j(\cos \theta) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j^s R^j P_j(\cos \theta)$$

En identifiant les coefficients, on obtient compte-tenu de la question précédente

$$\begin{aligned} j \neq 1 \quad & \frac{b_j^d}{R^{j+1}} = a_j^s R^j \\ j = 1 \quad & -E_l R + \frac{b_1^d}{R^2} = a_1^s R \end{aligned}$$

Q 30 La composante du champ normale à l'interface sphérique est ici la composante radiale $E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$. En l'absence de charge libre D_r est continue d'après la question 18, soit $\epsilon \frac{\partial V(R^-)}{\partial r} = \epsilon_d \frac{\partial V(R^+)}{\partial r}$ ou encore

$$\epsilon \sum_{j=0}^{\infty} a_j^s j R^{j-1} P_j(\cos \theta) = \epsilon_d \sum_{j=0}^{\infty} \left(a_j^d j R^{j-1} - \frac{(j+1)b_j^d}{R^{j+2}} \right) P_j(\cos(\theta))$$

L'identification des coefficients fournit

$$\begin{aligned} j \neq 1 \quad & -\epsilon_d \frac{(j+1)b_j^d}{R^{j+2}} = \epsilon a_j^s j R^{j-1} \\ j = 1 \quad & -\epsilon_d \left(E_l + \frac{2b_1^d}{R^3} \right) = \epsilon a_1^s \end{aligned}$$

Q 31 Les deux équations démontrées dans la question 29 et 30 pour $j \neq 1$ constituent un système linéaire aux inconnues a_j^s et b_j^d . On les résout facilement pour trouver

$$j \neq 1 \quad a_j^s = 0 \quad b_j^d = 0$$

De même on a obtenu deux équations linéaires aux inconnues b_1^d et a_1^s qu'on résout avec à peine plus d'efforts pour obtenir

$$\begin{aligned} b_1^d &= E_l R^3 \frac{\epsilon - \epsilon_d}{\epsilon + 2\epsilon_d} \\ a_1^s &= -E_l \epsilon_d \frac{3}{2\epsilon_d + \epsilon} \end{aligned}$$

Connaissant les valeurs des coefficients, nous pouvons maintenant écrire l'expression complète du potentiel

$$\begin{aligned} r \leq R \quad & V^s = -\frac{3\epsilon_d E_l}{2\epsilon_d + \epsilon} \cos \theta \\ r \geq R \quad & V^d = E_l r \left(-1 + \frac{R^3}{r^3} \frac{\epsilon - \epsilon_d}{\epsilon + 2\epsilon_d} \right) \cos \theta \end{aligned}$$

Q 32 Dans la sphère $V^s = -\frac{3\epsilon_d}{\epsilon + 2\epsilon_d} E_l z$ et $\mathbf{E}^s = -\mathbf{grad} V^s = \frac{3\epsilon_d}{\epsilon + 2\epsilon_d} E_l \mathbf{u}_z$. On remarque que $\mathbf{E}_s$ est uniforme. Il résulte de la superposition de $\mathbf{E}_l$ et du champ dépolarisant $\mathbf{E}_d$ créé par les charges surfaciques apparues sur la sphère :

$$\mathbf{E}^s = \mathbf{E}_l + \mathbf{E}_d \rightarrow \mathbf{E}_d = \mathbf{E}_s - \mathbf{E}_l = \left(\frac{3\epsilon_d}{\epsilon + 2\epsilon_d} - 1 \right) \mathbf{E}_l \Rightarrow \mathbf{E}_d = \frac{\epsilon_d - \epsilon}{\epsilon + 2\epsilon_d} \mathbf{E}_l$$

Q 33 Le potentiel et le champ à l'extérieur résultent de même de la superposition de $\mathbf{E}_l$, dérivant du potentiel $V_l = -E_l r \cos \theta$, et du champ créé par les charges surfaciques dérivant d'un potentiel V_{cree} :

$$V^d = V_l + V_{cree} \rightarrow V_{cree} = V^d + E_l r \cos \theta$$

$$V_{cree} = \frac{\epsilon - \epsilon_d}{\epsilon + 2\epsilon_d} \frac{R^3}{r^3} E_l r \cos \theta$$

On reconnaît le potentiel dipolaire $\frac{\mathbf{p} \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ créé par un dipôle de moment

$$\mathbf{p} = 4\pi\epsilon_0 \frac{\epsilon - \epsilon_d}{\epsilon + 2\epsilon_d} R^3 E_l = 3\epsilon_0 \frac{\epsilon - \epsilon_d}{\epsilon + 2\epsilon_d} V_s E_l \mathbf{u}_z \quad \text{car} \quad V_s = \frac{4}{3}\pi R^3$$

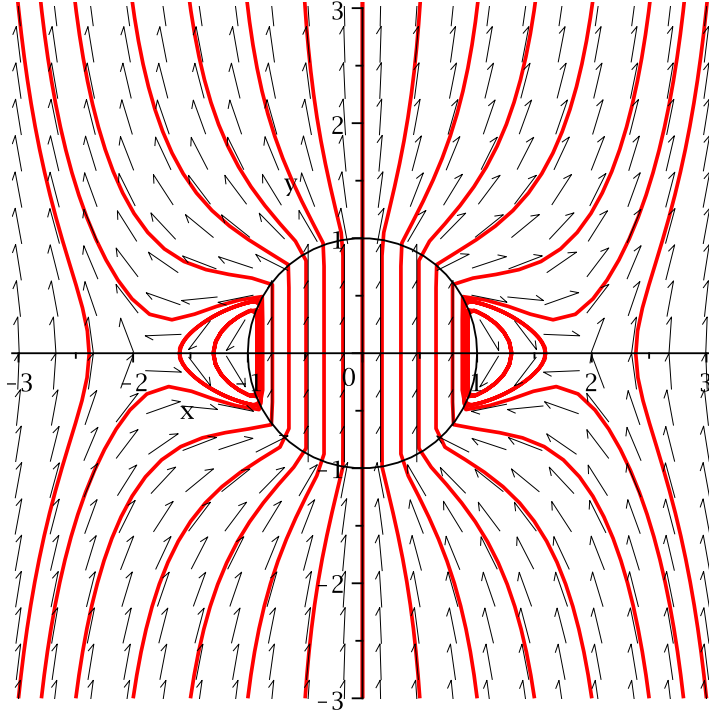
Q 34 Il n'est pas facile de tracer les lignes de champ si on ne les a jamais vues avant l'épreuve ! On s'appuie sur les remarques suivantes :

- Loin de la sphère on retrouve les lignes de champ rectilignes correspondant à $\mathbf{E}_l$
- Dans la sphère, le champ uniforme donne aussi des lignes de champ rectilignes
- A l'extérieur on calcule

$$\mathbf{E}^d = E_l \left(1 + 2 \frac{\epsilon - \epsilon_d}{\epsilon + 2\epsilon_d} \frac{R^3}{r^3} \right) \cos \theta \mathbf{u}_r + E_l \left(\frac{\epsilon - \epsilon_d}{\epsilon + 2\epsilon_d} \frac{R^3}{r^3} - 1 \right) \sin \theta \mathbf{u}_\theta$$

Pour $\theta = \pi/2$, le champ est dirigé selon $\mathbf{u}_\theta$ colinéaire à $\mathbf{u}_z$. $\mathbf{E}(r = R, \theta = \pi/2) = -\frac{3\epsilon_d}{\epsilon + 2\epsilon_d} E_l$ de norme supérieure à E_l grâce à l'hypothèse $\left| \frac{3\epsilon_d}{\epsilon + 2\epsilon_d} \right| > 1$. Donc les lignes de champ se resserrent en s'approchant de la sphère.

On en déduit l'allure des lignes de champ tracées ci-dessous avec Maple dans le cas $\epsilon = -4$, $\epsilon_d = 1.5$. Près de la boule, le champ purement dipolaire associé à $\mathbf{p}$ est de sens contraire à $\mathbf{E}_l$. Avec les valeurs numériques choisies on obtient une zone de champ inversé où le terme dipolaire l'emporte.



Q 35 Comme $\delta\mathbf{P}$ représente le moment dipolaire volumique associé à la présence des sphères, on l'obtient en multipliant le moment dipolaire $\mathbf{p}$ d'une sphère unique par le nombre de sphères par unité de volume N_s/V :

$$\delta\mathbf{P} = \frac{N_s}{V} 3\epsilon_0 \frac{\epsilon - \epsilon_d}{\epsilon + 2\epsilon_d} V_s \mathbf{E}_1 = 3f\epsilon_0 \frac{\epsilon - \epsilon_d}{\epsilon + 2\epsilon_d} \mathbf{E}_1$$

Q 36 Soit $\mathbf{P}$ le vecteur polarisation en l'absence de sphères. Il devient $\mathbf{P}_{\text{tot}} = \mathbf{P} + \delta\mathbf{P}$ en leur présence. Par définition de ϵ on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \epsilon_0(\epsilon_d - 1)\mathbf{E} \\ \mathbf{P} + \delta\mathbf{P} &= \epsilon_0(\epsilon_{\text{eff}} - 1)\mathbf{E} \end{aligned}$$

Par différence on obtient $\delta\mathbf{P} = \epsilon_0(\epsilon_{\text{eff}} - \epsilon_d)\mathbf{E}$.

Q 37 La relation de Lorenz-Lorentz permet de transformer le résultat de la question 35 :

$$\delta\mathbf{P} = 3f\epsilon_0 \frac{\epsilon - \epsilon_d}{\epsilon + 2\epsilon_d} \left(\epsilon_d \mathbf{E} + \frac{\delta\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \right) \Rightarrow \delta\mathbf{P} \left(\frac{\epsilon + 2\epsilon_d}{3f\epsilon_0(\epsilon - \epsilon_d)} - \frac{1}{3\epsilon_0} \right) = \epsilon_d \mathbf{E}$$

La question 36 permet d'éliminer $\mathbf{E} = \frac{\delta\mathbf{P}}{\epsilon_0(\epsilon_{\text{eff}} - \epsilon_d)}$ pour obtenir

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{P} \left(\frac{\epsilon + 2\epsilon_d}{3f\epsilon_0(\epsilon - \epsilon_d)} - \frac{1}{3\epsilon_0} \right) &= \epsilon_d \frac{\delta\mathbf{P}}{\epsilon_0(\epsilon_{\text{eff}} - \epsilon_d)} \\ \frac{\epsilon + 2\epsilon_d}{3f(\epsilon - \epsilon_d)} - \frac{1}{3} &= \frac{\epsilon_d}{\epsilon_{\text{eff}} - \epsilon_d} \end{aligned}$$

Cette relation se transforme par des manipulations élémentaires en

$$f \frac{\epsilon - \epsilon_d}{\epsilon + 2\epsilon_d} = \frac{\epsilon_{\text{eff}} - \epsilon_d}{\epsilon_{\text{eff}} + 2\epsilon_d}$$

Q 38 La relation précédente s'écrit encore

$$f \frac{\epsilon - \epsilon_d}{\epsilon + 2\epsilon_d} = \frac{\delta\epsilon}{3\epsilon_d + \delta\epsilon} \Rightarrow \delta\epsilon = \frac{3\epsilon_d f \frac{\epsilon - \epsilon_d}{\epsilon + 2\epsilon_d}}{1 - f \frac{\epsilon - \epsilon_d}{\epsilon + 2\epsilon_d}} \simeq 3\epsilon_d f \frac{\epsilon - \epsilon_d}{\epsilon + 2\epsilon_d} \quad \text{au premier ordre en } f$$

Q 39 La pulsation spatiale est donnée par $k = n \frac{\omega}{c}$ avec $n^2 = \epsilon_{\text{eff}} = \epsilon_{\text{eff1}} + i\epsilon_{\text{eff2}} = \epsilon_{\text{eff1}}(1 + i \frac{\epsilon_{\text{eff2}}}{\epsilon_{\text{eff1}}})$. A l'ordre le plus bas en f on en déduit

$$n \simeq \sqrt{\epsilon_d} \left(1 + \frac{1}{2} i \frac{\epsilon_{\text{eff2}}}{\epsilon_{\text{eff1}}} \right) = n_1 + i n_2$$

$$n_1 = n_d = \sqrt{\epsilon_d} \quad n_2 = \frac{9}{2} \frac{\epsilon_d^{3/2} \epsilon_2}{(\epsilon_1 + 2\epsilon_d)^2 + \epsilon_2^2}$$

Le coefficient d'extinction est donné par

$$\alpha = 2n_2 \frac{\omega}{c} = \frac{9f\epsilon_2 n_d^3}{(\epsilon_1 + 2\epsilon_2)^2 + \epsilon_2^2} \frac{\omega}{c}$$

Q 40 D'après la question 6, $\epsilon_1 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ et $\epsilon_2 = \frac{\gamma\omega_p^2}{\omega^3}$. On en déduit

$$\alpha = \frac{9fn_d^3}{c} \frac{\gamma\omega_p^2}{\left[(1 + 2\epsilon_d)\omega - \frac{\omega_p^2}{\omega} \right]^2 + \left(\frac{\gamma\omega_p^2}{\omega^2} \right)^2}$$

Le terme entre crochets au dénominateur se rencontre usuellement dans les filtres passe-bande. Il s'annule pour la pulsation

$$\omega_{RPS} = \frac{\omega_p}{\sqrt{1 + 2\epsilon_d}}$$

Le second terme du dénominateur représente la fonction $C(\omega)$ de l'énoncé. On admet qu'il varie relativement peu autour de ω_{RPS} de sorte qu'on peut le supposer constant : $C(\omega) \simeq C(\omega_{RPS})$. Dans ce cas, α se présente comme la fonction de transfert d'un filtre passe-bande et présente un maximum pour $\omega = \omega_{RPS}$. Ce raisonnement simplifié se justifie par la petitesse de γ ($\gamma \ll \omega_p$). Par contre, la pulsation de résonance ω_{RPS} est du même ordre de grandeur que ω_p . Il n'est donc pas légitime de supposer $\omega \ll \omega_p$ pour écrire que $\epsilon_1 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \simeq -\frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ (approximation de la question 6). Si on le fait néanmoins, on obtient le résultat proposé par l'énoncé ² $\omega_{RPS} = \frac{\omega_p}{\sqrt{2\epsilon_d}}$.

Q 41 Autour de ω_{RPS} , continuons à approximer $C(\omega)$ par $C(\omega_{RPS})$.

$$X = \left[(1 + 2\epsilon_d)\omega - \frac{\omega_p^2}{\omega} \right]^2 + \left(\frac{\gamma\omega_p^2}{\omega_{RPS}^2} \right)^2$$

A la résonance le premier terme s'annule et X atteint sa valeur minimale $X_{min} = \left(\frac{\gamma\omega_p^2}{\omega_{RPS}^2} \right)^2$. La largeur à mi-hauteur s'obtient lorsque $X = 2X_{min}$ soit

$$\begin{aligned} \left[(1 + 2\epsilon_d)\omega - \frac{\omega_p^2}{\omega} \right]^2 &= \left(\frac{\gamma\omega_p^2}{\omega_{RPS}^2} \right)^2 \\ (1 + 2\epsilon_d)\omega - \frac{\omega_p^2}{\omega} &= \pm \frac{\gamma\omega_p^2}{\omega_{RPS}^2} \\ \omega^2 \mp \gamma\omega - \omega_{RPS}^2 &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit 2 équations du second degré en ω . Dans chacune d'elles on retient la racine positive pour trouver les deux pulsations délimitant le pic de résonance :

$$\omega_{1,2} = \frac{\pm\gamma \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

D'où la largeur de bande

$$\omega_2 - \omega_1 = \gamma$$

Comme $\gamma \ll \omega_p$, la résonance est très aiguë, ω_2 et ω_1 sont proches de ω_{RPS} ce qui justifie *a posteriori* l'approximation $C(\omega) \simeq C(\omega_p)$.

²Le plasmon de surface a été largement étudié dans les agrégats de métaux alcalins depuis les années 1990. Le modèle classique étudié dans ce problème, développé par Mie au début du XX^e siècle prédit la pulsation de résonance $\omega_{RPS} = \frac{\omega_p}{\sqrt{1+2\epsilon_d}}$. Une référence en ligne : http://www-lasim.univ-lyon1.fr/IMG/pdf_LermeGDR.pdf

Q 42 Les points expérimentaux se situent près d'une droite; on peut donc proposer une loi du type

$$\gamma = \frac{1}{\tau} + \frac{a}{R}$$

L'ordonnée à l'origine $\frac{1}{\tau}$, difficilement lisible, est comprise entre 0 et 0,03 eV. La question 6 indique de $\hbar\gamma = \hbar/\tau = 20\text{meV}$ dans le cas d'un milieu illimité ($R \rightarrow \infty$) : les deux valeurs sont compatibles.

Q 43 Comme γ est l'inverse d'un temps et R une longueur, a possède la dimension d'une vitesse. Introduisons le temps $\tau_1 = R/a$. On a

$$\gamma = \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_1}$$

Le second terme représente un effet dissipatif qui disparaît quand $R \rightarrow \infty$. Le temps $\tau_1 = R/a = d/(2a)$, peut s'interpréter comme le temps mis par un électron pour traverser la nanosphère à la vitesse $2a$. Dans ce contexte $2a$ représente la vitesse des électrons dans le nuage électronique. Les « collisions » de l'électron sur la surface de la sphère entraînent un amortissement du plasmon.

Q 44 A partir du graphique nous obtenons $a = 8,7 \cdot 10^5 \text{ m.s}^{-1}$ ou $2a = 1,7 \cdot 10^6 \text{ m.s}^{-1}$. ³

Q 45 Se reporter au cours pour la démonstration de l'équation traduisant localement le premier principe en l'absence de terme source :

$$\text{div } \mathbf{j}_Q + \rho c_p \partial_t T = 0$$

où ρ désigne la masse volumique du matériau et c_p sa capacité calorifique massique.

Q 46

$$\text{div} (-\lambda \mathbf{grad} T) + \rho c_p \partial_t T = 0 \Rightarrow \Delta T - \frac{\rho c_p}{\lambda} \partial_t T = 0$$

la diffusivité thermique est donnée par $D = \frac{\lambda}{\rho c_p}$

Q 47 L'analyse dimensionnelle de l'équation précédente montre que D s'exprime en m^2s^{-1} . Pour l'eau $D = 1,4 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$.

Q 48 Les sphères se polarisent sous l'effet du champ alternatif. Le mouvement avec frottement des électrons est à l'origine d'une dissipation d'énergie que l'on peut considérer comme une « source locale de chaleur ». La puissance instantanée varie sur des échelles de temps de l'ordre de la période de l'onde électromagnétique, très inférieure à la seconde. On peut donc la remplacer par sa moyenne temporelle. Par ailleurs on peut aussi moyenner spatialement à une échelle L grande devant $d_s = 43R \simeq 430 \text{ nm}$

³La littérature fournit une vitesse de Fermi de $1,4 \cdot 10^6 \text{ m.s}^{-1}$ dans l'argent, ce qui confirme l'interprétation donnée ici.

de manière à considérer la puissance volumique uniforme. L'étude des variations temporelles à l'échelle $t = 1$ s nécessite la prise en compte des variations spatiales jusqu'à une échelle au moins aussi petite que $\sqrt{Dt} = 3,7 \cdot 10^{-4}$ m. Pour satisfaire les deux conditions on choisira un élément de volume dont la longueur est de l'ordre de 10^{-5} m.

- Q 49** Notons p le terme source, en W.m^{-3} . Les équations des questions 45 et 46 deviennent respectivement

$$\text{div } \mathbf{j}_Q + \rho c_p \partial_t T = p \quad \Delta T - \frac{1}{D} \partial_t T = -\frac{p}{\lambda}$$

- Q 50** On utilise la diffusivité thermique de l'eau car elle est le principal constituant des tissus biologiques. La durée à ne pas excéder pour que la diffusion thermique l'altère par les tissus avoisinants est $\tau_{RT} = R_T^2/D = 7.10^2$ s. Par prudence, ne pas dépasser quelques minutes de traitement !

- Q 51** Par transparence, les tissus humains transmettent surtout le rouge. On peut s'en rendre compte en collant une petite torche électrique à la pulpe des doigts ou, plus amusant, contre une joue à l'intérieur de la bouche ! D'où l'utilisation d'un laser réglé sur 860 nm qui traverse de manière optimale les tissus sains pour atteindre la tumeur.

- Q 52** D'après de précédentes questions, l'intensité décroît dans la tumeur selon $I(z) = I_0 e^{-\alpha z}$. La puissance absorbée en traversant l'épaisseur dz vaut $dP = SI(z) - SI(z + dz) = -SdI = SI_0 \alpha e^{-\alpha z} dz$ ce qui correspond à une puissance volumique

$$p = \frac{dP}{Sdz} = \alpha I_0 e^{-\alpha z}$$

On peut moyenner cette quantité sur le volume de la tumeur :

$$p_m = \frac{1}{R_T} \int_0^{R_T} p dz = \frac{I_0}{R_T} (1 - e^{-\alpha R_T}) = 0,39 \text{ W.cm}^{-3}$$

- Q 53** En négligeant la diffusion thermique vers l'extérieur de la tumeur, le premier principe s'écrit $p_m V \Delta t = \rho c_p V \Delta T$ d'où

$$\Delta T = \frac{p_m t}{\rho c_p} = 34 \text{ K}$$

A partir d'une température initiale de l'ordre de 37°C , cela conduit à une température finale supérieure à 60°C donc à la mort des cellules cancéreuses.

- Q 54** La force $\mathbf{F}$ est proportionnelle au nombre de ressorts en parallèles donc à A_0 , et inversement proportionnelle au nombre de ressorts en série, donc à L_0 .

- Q 55** L'analyse dimensionnelle de la relation fournie par l'énoncé montre que E est homogène à une force par unité de surface, on l'exprime en Pa.

- Q 56** L'élément considéré a pour volume $r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$, pour masse $\rho r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$ et pour quantité de mouvement $\rho r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \partial_t u \mathbf{e}_r$. Finalement

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \rho r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \mathbf{e}_r$$

- Q 57** Au repos l'élément considéré a pour longueur dr . A l'instant t pendant le mouvement, sa limite inférieure se trouve en $r + u(r, t)$ et sa limite supérieure en $r + dr + u(r + dr, t)$. Sa nouvelle longueur est donc

$$dr' = [r + dr + u(r + dr, t)] - [r + u(r, t)] = dr + u(r + dr, t) - u(r, t)$$

L'allongement qui joue le rôle de δl dans l'expression de $\mathbf{F}$ vaut donc $dr' - dr = u(r + dr, t) - u(r, t)$. La section de l'élément orthogonalement au déplacement, jouant le rôle de A_0 , vaut quant à elle $r^2 \sin \theta d\theta d\phi$. D'où

$$F_r = E \frac{r^2 \sin \theta d\theta d\phi}{dr} (u(r + dr, t) - u(r, t)) = E r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \sin \theta d\theta d\phi$$

- Q 58** Pour bien comprendre il faut reproduire la figure 6 de l'énoncé en 3 dimensions pour bien visualiser les éléments de volume et de surface en coordonnées sphériques. On voit que l'élément s'allonge non seulement selon $\mathbf{e}_r$ mais aussi selon $\mathbf{e}_\phi$. Dans cette direction, sa longueur passe de $r \sin \theta d\phi$ au repos à $(r + u) \sin \theta d\phi$ en mouvement, d'où l'allongement $u \sin \theta d\phi$. La section orthogonale à $\mathbf{e}_\phi$ jouant le rôle de A_0 est ici $r dr d\theta$. D'où l'intensité des forces F_1 et F_2 :

$$F_1 = F_2 = E \frac{r dr d\theta}{r \sin \theta d\phi} u \sin \theta d\phi = E u dr$$

Leurs projections sur $\mathbf{e}_\phi$ se compensent alors que celles sur $\mathbf{e}_r$ se cumulent. Elles font intervenir $-\sin(d\phi/2) \simeq d\phi/2$ pour la projection sur le vecteur radial u_ρ des coordonnées cylindriques, puis $\sin \theta$ pour la projection sur $\mathbf{e}_r$:

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = -2E u dr \frac{d\phi}{2} \sin \theta \mathbf{e}_r$$

Pour les forces F_3 et F_4 associées à l'allongement selon $\mathbf{e}_\theta$ on a $A_0 \rightarrow dr r \sin \theta d\phi$, $L_0 \rightarrow r d\theta$, $\delta l \rightarrow u d\theta$ et la projection sur $\mathbf{e}_r$ fait intervenir $-\sin(d\theta/2)$. On obtient donc le même résultat. Finalement

$$\mathbf{F}_t = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 = -2E u(r, t) dr \sin \theta d\theta d\phi \mathbf{e}_r$$

Q 59 Appliquons le principe fondamental de la dynamique à l'élément de matière :

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{p}}{dt} &= \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_r(r + dr, t) - \mathbf{F}_r(r, t) \\ &= \mathbf{F}_t + dr \frac{\partial \mathbf{F}_r}{\partial r}\end{aligned}$$

$$\rho r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -2Eu(r, t) dr \sin \theta d\theta d\phi + E \sin \theta d\theta d\phi \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

$$\begin{aligned}r^2 \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -2u + 2r \frac{\partial u}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2}{r^2} u - \frac{1}{v_s^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0\end{aligned}$$

où $v_s = \sqrt{E/\rho}$ représente la vitesse du son dans le matériau.

Q 60 Dans l'argent $v_s = 2,81.10^3 \text{ m.s}^{-1}$.

Q 61 Pour $r \rightarrow 0$, $u \rightarrow 0$ sans quoi le matériau présenterait une rupture au centre.

Q 62 En $r = 0$ la contrainte radiale F_r s'annule donc $\frac{\partial u}{\partial r}(R, t) = 0$.

Q 63

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \hat{u}}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \hat{u} + \frac{\omega^2}{v_s^2} \hat{u} = 0$$

Q 64

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{u}}{dr} &= \frac{d\hat{u}}{d\xi} \frac{d\xi}{dr} \\ &= \frac{\omega_s}{v_s} A \left[-\frac{2}{\xi^3} (\xi \cos \xi - \sin \xi) + \frac{1}{\xi^2} (\cos \xi - \xi \sin \xi - \cos \xi) \right] \\ &= \frac{\omega_s A}{v_s \xi^3} (-2\xi \cos \xi + 2 \sin \xi - \xi^2 \sin \xi)\end{aligned}$$

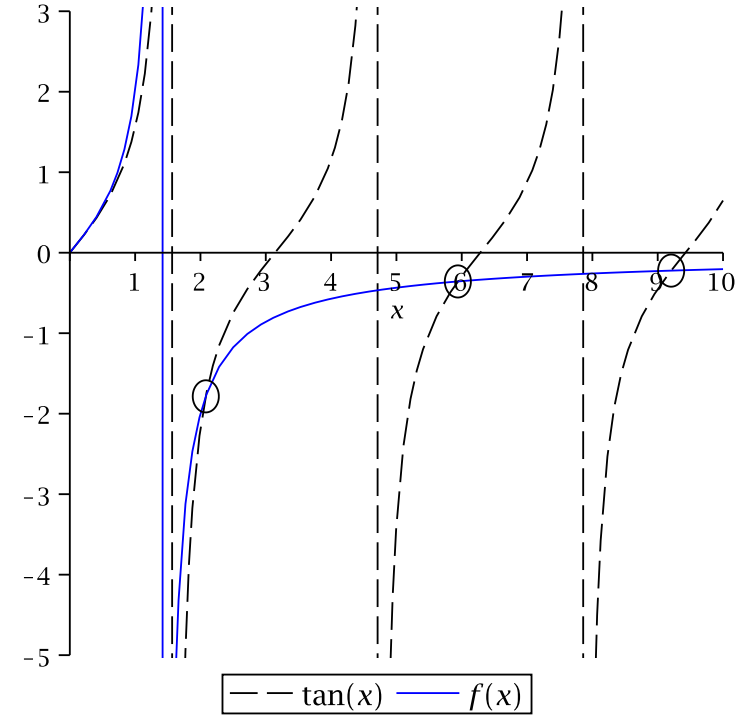
La condition de bord $\frac{d\hat{u}}{dr} = 0$ s'exprime par la nullité de la parenthèse pour $\xi = \xi_R$, ce qui fournit

$$-2\xi \cos \xi + (2 - \xi^2) \sin \xi = 0 \rightarrow \tan \xi_R = \frac{\xi_R}{1 - \frac{\xi_R^2}{2}}$$

Q 65 Une étude rapide de la fonction $f(\xi) = \frac{\xi}{1 - \xi^2/2}$ montre qu'elle est croissante sur $[0, \sqrt{2}]$ et sur $]\sqrt{2}, +\infty[$. Elle présente une asymptote verticale d'équation $\xi = \sqrt{2}$ et une asymptote horizontale $y = 0$ quand $\xi \rightarrow \infty$. Au voisinage de 0, $f(\xi) \sim \xi + \frac{\xi^3}{2}$

alors que $\tan(\xi) \sim \xi + \frac{\xi^3}{3}$. La fonction f croît donc plus rapidement que $\tan$. Ces arguments permettent de tracer correctement les deux courbes représentatives sur $[0, +\infty[$. Le tracé informatisé est présenté ci-dessous et les solutions, intersections des deux courbes, sont signalées par des cercles. La première est comprise entre $\pi/2$ et π . Pour les grandes valeurs de n , ξ_n est proche de π :

$$\xi_n = \frac{\omega_s R}{v_s} \simeq n\pi$$



Q 66 La période du mode de rang n est

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi R}{\xi_n v_s}$$

Une résolution numérique donne $\xi_1 = 2,08$. Pour $R = 3 \text{ nm}$, $T_1 = 11 \text{ ps}$. Pour $R = 3 \text{ nm}$, $T_1 = 2,5 \text{ ps}$. Ces valeurs sont proches des pseudopériodes visibles sur la figure 5. La modulation de transmission s'explique donc par l'excitation du mode de respiration acoustique de rang 1.