

Mines-Ponts 2008 — MP II

Solution proposée par Vincent Freulon (ENS) et relue par Jean-Claude Poncin (Lycée Montesquieu, Le Mans).

1 $PV = \frac{m}{M_e} RT_0$ (loi des gaz parfaits) donc $\mu = \frac{M_e P}{RT_0}$.

2 La loi de l'hydrostatique est $\mathbf{grad} P = \mu \vec{g}$ que l'on projette sur la verticale ascendante et en remplaçant μ par son expression, on obtient :

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{M_e g}{RT_0} P \quad (1)$$

$$P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right) \quad (2)$$

3 $M_e = 0,20 \times 32 + 0,80 \times 28 = 28,8 \cdot 10^{-3}$ kg/mol et $H = 8,5$ km (soit environ l'altitude l'Everest ; or, au sommet de l'Everest la température est bien différente de 288K : ce modèle n'est donc pas réaliste !). On résout $\exp\left(-\frac{z_{50\%}^{iso}}{H}\right) = \frac{1}{2}$, $z_{50\%}^{iso} = H \ln 2$ soit : $z_{50\%}^{iso} = 5,9$ km.

4 La relation de l'hydrostatique reste valable mais cette fois T dépend de l'altitude :

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{M_e g}{RT} P \quad (3)$$

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{P}{H(1-\alpha z)} \quad (4)$$

En séparant les variables, on obtient :

$$\frac{dP}{P} = -\frac{dz}{H(1-\alpha z)} \quad (5)$$

$$P(z) = P_0(1-\alpha z)^\beta \quad (6)$$

Avec $\beta = \frac{1}{H\alpha} = \frac{z_0}{H}$. La loi des gaz parfaits fournit alors :

$$\mu = \frac{M_e P}{RT} \quad (7)$$

$$\mu = \frac{M_e P_0}{RT_0} (1-\alpha z)^{\beta-1} \quad (8)$$

$$\mu = \mu_0 (1-\alpha z)^{\beta-1} \quad (9)$$

où l'on a remplacé T et P par leur expression et posé $\mu_0 := \frac{M_e P_0}{RT_0}$.

5 On résout $\frac{1}{2} = (1-\alpha z_{50\%}^{pol})^\beta$ d'où : $z_{50\%}^{pol} = z_0(1-2^{\frac{-1}{\beta}}) = 5,4$ km. Cette valeur est proche de celle obtenue en 3. mais légèrement inférieure ce qui est logique puisque la température diminue quand l'altitude augmente ; en supposant la température constante (donc l'agitation thermique aussi) dans le modèle de l'atmosphère isotherme, on surestime la pression à une altitude donnée.

6 Si l'on suppose que la température est une fonction linéaire de l'altitude, on doit prendre comme ordonnée à l'origine 288,14 K ce qui est en excellent accord avec $T_0 = 288$ K et alors $z_0 = \frac{288}{6,94} = 41,5$ km. Si l'on considère l'équation pour la pression, $P_0 = 1,01$ Pa qui est en accord avec $P_0 = 1013$ hPa ; et de β , on déduit $H = 7,9$ km qui est proche de la valeur théorique mais un peu différente (venant sans doute de la linéarisation).

7 $P_i V_0 = \frac{m_i}{M_e} RT_i$; or, $P_i = P_e$ donc $m_i = \frac{P_e V_0 M_e}{RT_i}$. Comme $\mu_e = \frac{P_e M_e}{RT_e}$, $m_i = \frac{T_e}{T_i} V_0 \mu_e$.

8 A l'équilibre, la poussée d'Archimède compense le poids :

$$(m + m_i)g = \mu_e V_0 g \quad (10)$$

or, $\mu_e = m_i \frac{T_i}{V_0 T_e}$ donc :

$$m = m_i \left(\frac{T_i}{T_e} - 1 \right) \quad (11)$$

9 En $z = z_m$:

$$m = V_0 \mu_e \quad (12)$$

$$m = V_0 \mu_0 (1 - \alpha z_m)^{\beta-1} \quad (13)$$

$$z_m = \frac{1}{\alpha} \left(1 - \left(\frac{m}{\mu_0 V_0} \right)^{\frac{1}{\beta-1}} \right) \quad (14)$$

où l'on a utilisé l'expression de μ_0 définie à la question 4. .

AN : $z_m = 13$ km.

10 Calcul analogue mais cette fois, on tient compte de l'air dans l'enveloppe :

$$m = V_0 \mu_e - m_i \quad (15)$$

$$m = V_0 \mu_e \left(1 - \frac{T_e}{T_i} \right) \quad (16)$$

en $z_m = 0$ et $T_i = T_d$ donc :

$$m = V_0 \mu_0 \left(1 - \frac{T_0}{T_d} \right) \quad (17)$$

$$\frac{m}{V_0 \mu_0} = 1 - \frac{T_0}{T_d} \quad (18)$$

AN : $T_d = \frac{T_0}{1 - \frac{m}{V_0 \mu_0}} = 362$ K.

11 $\frac{m}{V_0 \mu_0}$ est une constante tout au long de l'ascension du ballon et utilisant (18) et la question 7., on obtient :

$$1 - \frac{T_0}{T_d} = (1 - \alpha z)^{\beta-1} \left(1 - \frac{T_0}{T_i} (1 - \alpha z) \right) \quad (19)$$

$$1 - \frac{T_0}{T_d} = (1 - \alpha z)^{\beta-1} \left(1 - \frac{T_e}{T_i} \right) \quad (20)$$

Or, $\frac{P_e}{T_e} = \frac{P_0}{T_0} (1 - \alpha z)^{\beta-1}$ donc :

$$\frac{P_0}{T_0} \left(1 - \frac{T_0}{T_d} \right) = \frac{P_e}{T_e} \left(1 - \frac{T_e}{T_i} \right) \quad (21)$$

$$P_0 \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_d} \right) = P_e \left(\frac{1}{T_e} - \frac{1}{T_i} \right) \quad (22)$$

Donc $\kappa_1 := P_0$. Le membre de gauche est une constante au cours de l'ascension donc en composant par $\ln$ puis en différentiant, on obtient :

$$\frac{\delta T_i}{T_i} = \left(1 - \frac{T_i}{T_e} \right) \frac{\delta P_e}{P_e} + \frac{\delta T_e}{T_e} \frac{T_i}{T_e} \quad (23)$$

12 On utilise le résultat de la question 8. :

$$m = m_i \left(\frac{T_i}{T_e} - 1 \right) \quad (24)$$

$$m = \frac{T_e}{T_i} V_0 \mu_e \left(\frac{T_i}{T_e} - 1 \right) \quad (25)$$

$$m = V_0 \mu_0 (1 - \alpha z)^{\beta-1} \left(1 - \frac{T_0}{T_i} (1 - \alpha z) \right) \quad (26)$$

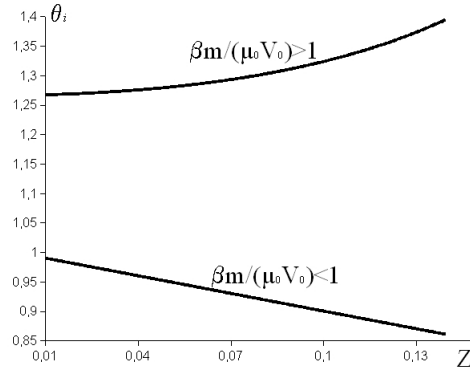
$$\frac{m}{V_0 \mu_0} = (1 - Z)^{\beta-1} - \frac{(1 - Z)^\beta}{\theta_i} \quad (27)$$

$$(1 - Z)^{\beta-1} = \frac{m}{V_0 \mu_0} + \frac{(1 - Z)^\beta}{\theta_i} \quad (28)$$

On élimine m en utilisant $\frac{m}{\mu_0 V_0} = (1 - Z_m)^{\beta-1}$ et il vient :

$$(1 - Z)^{\beta-1} = (1 - Z_m)^{\beta-1} + \frac{(1 - Z)^\beta}{\theta_i} \quad (29)$$

$$\theta_i(Z) = \frac{(1 - Z)^\beta}{(1 - Z)^{\beta-1} - (1 - Z_m)^{\beta-1}} \quad (30)$$



La courbe $\beta m / (\mu_0 V_0) < 1$ montre que lorsque l'on chauffe l'air à l'intérieur du ballon, l'état d'équilibre est atteint pour une altitude plus basse ; ainsi, si l'on fait trop chauffer l'air, la valeur d'équilibre est trop basse et la montgolfière s'écrase.

13 $V_{max} = \frac{m\beta}{\mu_0} = 2052 \text{ m}^3$. En utilisant la question 10. :

$$V_{min} = \frac{m}{\mu_0 \left(1 - \frac{T_0}{T_{max}} \right)} = 1,8 \cdot 10^3 \text{ m}^3 \quad (31)$$

$$z_m(V_{min}) = 12 \text{ km et } z_m(V_{max}) = 13 \text{ km} \quad (32)$$

où l'on a utilisé (14).

14 $\delta Q = n_i C_p \delta T_i^{(1)}$ donc $\delta T_i^{(1)} = \frac{\delta Q}{n_i C_p}$; $\delta Q = \frac{P_e V_0}{R T_i} C_p \delta T_i^{(1)}$ et en utilisant $R = C_p - C_v$:

$$\frac{\delta T_i^{(1)}}{T_i} = \frac{\delta Q}{P_e V_0} \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \quad (33)$$

15 En différentiant logarithmiquement de la loi des gaz parfaits, on obtient :

$$0 = \frac{\delta m_i^{(1)}}{m_i} + \frac{\delta T_i^{(1)}}{T_i} \quad (34)$$

et en utilisant la première expression de δQ , il vient :

$$\delta m_i^{(1)} = -\frac{\delta Q}{C_p T_i} M_e \quad (35)$$

16 La loi de Laplace (gaz parfait+transformation adiabatique, réversible) s'écrit : $P^{1-\gamma} T^\gamma = \text{cste}$. On différencie logarithmiquement et il vient :

$$\delta T_i^{(2)} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) T_i \frac{\delta P_e}{P_e} \quad (36)$$

où l'on a utilisé que $P_i = P_e$. Or, d'après (6) que l'on différencie logarithmiquement :

$$\frac{\delta P_e}{P_e} = \frac{-\alpha \beta \delta z}{1 - \alpha z} \quad (37)$$

et en remplaçant dans (36), on obtient :

$$\delta T_i^{(2)} = \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) T_i \frac{\alpha \beta \delta z}{1 - \alpha z} \quad (38)$$

17 En différencie logarithmiquement $T_e = T_0(1 - \alpha z)$, il vient : $\frac{\delta T_e}{T_e} = \frac{-\alpha \delta z}{1 - \alpha z}$ et en remplaçant dans (38) :

$$\frac{\delta T_i^{(2)}}{T_i} = \beta \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{\delta T_e}{T_e} \quad (39)$$

18 On utilise :

$$\begin{cases} P_e &= P_0(1 - \alpha z)^\beta \\ T_e &= T_0(1 - \alpha z) \end{cases} \quad \text{donc } P_e \propto T_e^\beta \quad (40)$$

que l'on différencie logarithmiquement : $\frac{\delta P_e}{P_e} = \beta \frac{\delta T_e}{T_e}$.

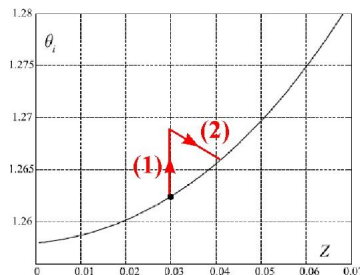
En éliminant $\frac{\delta P_e}{P_e}$ dans (23) et en utilisant $\delta T_i = \delta T_i^{(1)} + \delta T_i^{(2)}$ et leur expression donnée par (33) et (38), on obtient :

$$\left(1 - \frac{T_i}{T_e}\right) \beta \frac{\delta T_e}{T_e} + \frac{\delta T_e}{T_e} \frac{T_i}{T_e} = \beta \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{\delta T_e}{T_e} + \frac{\delta Q}{P_e V_0} \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \quad (41)$$

$$\frac{\delta Q}{P_e V_0} \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) = \frac{\delta T_e}{T_e} \left[\frac{T_i}{T_e} (1 - \beta) + \frac{\beta}{\gamma} \right] \quad (42)$$

donc $\kappa_2 = 1 - \frac{1}{\gamma}$.

19 La phase (1) correspond à une augmentation de θ_i à $Z = \text{cste}$ (trait vertical vers le haut partant du point) ; la phase (2) correspond à une augmentation de Z à $\theta_i = \text{cste}$ (trait horizontal vers la droite s'arrêtant sur la courbe $\theta_i(Z)$).



Si l'on traçait toutes les petites ascensions (pour décrire la globalité de l'ascension), on obtiendrait une courbe en escalier s'appuyant sur la courbe de $Z \rightarrow \theta_i(Z)$.

- 20** L'énergie interne de l'air chaud dans la montgolfière après avoir libéré δn moles est $U_{\text{ch}} = C_p(n - \delta n)T_i + U_0$ et celle des δn moles d'air froid avant leur entrée est $U_{\text{fr}} = C_p\delta nT_e + U_1$ où U_0 et U_1 sont des constantes. La thermalisation s'effectue à $U_{\text{fr}} + U_{\text{ch}} = \text{cste}$ donc :

$$nT_f = \delta nT_e + (n - \delta n)T_i \quad (43)$$

$$\delta T_i^{(3)} = \frac{\delta n}{n} (T_e - T_i) \quad (44)$$

La loi des gaz parfaits pour les δn moles est $P_e\delta V = \delta nRT_i$ et celle pour l'air dans la montgolfière avant entrée d'air froid est $P_iV_0 = nRT_i$ donc $\frac{\delta n}{n} = \frac{T_i}{T_e} \frac{\delta V}{V_0}$ et (44) devient :

$$\frac{\delta T_i^{(3)}}{T_i} = \frac{\delta V}{V_0} \left(1 - \frac{T_i}{T_e}\right) \quad (45)$$

- 21** En procédant de même, on obtient :

$$\frac{\delta T_i}{T_i} = \frac{\delta V}{V_0} \left(1 - \frac{T_i}{T_e}\right) + \beta \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{\delta T_e}{T_e} \quad (46)$$

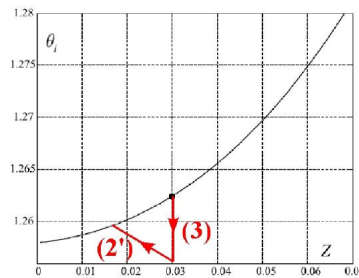
en utilisant [E1], on élimine $\frac{\delta T_i}{T_i}$ et il vient :

$$\frac{\delta V}{V_0} \left(1 - \frac{T_i}{T_e}\right) + \beta \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{\delta T_e}{T_e} = \left(1 - \frac{T_i}{T_e}\right) \beta \frac{\delta T_e}{T_e} + \frac{\delta T_e}{T_e} \frac{T_i}{T_e} \quad (47)$$

où l'on a également utilisé $\frac{\delta P_e}{P_e} = \beta \frac{\delta T_e}{T_e}$. Et finalement :

$$\frac{\delta T_e}{T_e} = \frac{\frac{\delta V}{V_0} \left(1 - \frac{T_i}{T_e}\right)}{\frac{T_i}{T_e}(1 - \beta) + \frac{\beta}{\gamma}} \quad (48)$$

- 22** La phase (3) correspond à une diminution de θ_i à $Z = \text{cste}$; la phase (2') correspond à une diminution de Z au cours de laquelle $\delta T_e > 0$; comme l'évolution est isentropique $\delta T_e > 0$ impose $\delta T_i^{(2)} > 0$ donc θ_i croît au cours de l'évolution [idem question 19.].



- 23** On suppose la température uniforme sur la hauteur (légitime sur quelques dizaines de mètres...) de la montgolfière pour l'air intérieur et l'air extérieur, on peut alors utiliser le modèle isotherme pour cette portion d'air : $P_i = P_i(0) \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$ et $P_e = P_e(0) \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$; et comme $z \ll H$ ($z \approx 10$ m et $H \approx 10$ km), on peut développer cette expression à l'ordre 1 et il vient :

$$P_i = P_i(0) \left(1 - \frac{z}{H_i}\right) \quad (49)$$

$$P_e = P_e(0) \left(1 - \frac{z}{H_e}\right) \quad (50)$$

d'où : $P_i - P_e = 2P_e(0)z \left(\frac{1}{H_e} - \frac{1}{H_i} \right)$; or, $H = \frac{P(0)}{\mu g}$ donc :

$$\Delta P(z) = zg(\mu_e - \mu_i) \quad (51)$$

24 On écrit le théorème de la résultante dynamique, à l'équilibre, à l'élément de filin dans le référentiel du ballon :

$$\vec{0} = -F(z)\mathbf{t}(z) + F(z+dz)\mathbf{t}(z+dz) + \frac{dK}{dz}\mathbf{n}(z)dz \quad (52)$$

$$\vec{0} = \frac{dK}{dz}\mathbf{n}(z) + \frac{dF(z)\mathbf{t}(z)}{dz} \quad (53)$$

On projette sur $\mathbf{t}(z)$ et il vient :

$$0 = \frac{dF(z)\mathbf{t}(z)}{dz} \cdot \mathbf{t}(z) \quad (54)$$

$$0 = \frac{dF(z)\mathbf{t}^2(z)}{dz} \quad (55)$$

or, $\mathbf{t}^2(z) = 1$ donc $0 = \frac{dF(z)}{dz}$ et donc F est constant.

25 $d\mathbf{K}' = \Delta P(z)dS\mathbf{n}(z) = d\mathbf{K}$ car $d\mathbf{K}$ et $d\mathbf{K}'$ sont tous les deux selon $\mathbf{n}(z)$ et $d\mathbf{F}$ n'a pas de composante selon $\mathbf{n}(z)$.

26 En projetant sur $\mathbf{e}_r$, on obtient :

$$0 = \frac{dF \sin \varphi}{dz} + \frac{dK}{dz} \cos \varphi \quad (56)$$

$$0 = F \frac{d \sin \varphi}{dz} + \frac{dK}{dz} \cos \varphi \quad (57)$$

$$0 = F \frac{d\varphi}{dz} + \frac{dK}{dz} \quad (58)$$

27 $\tan \varphi = \frac{dr}{dz}$ donc $\frac{d\varphi}{dz}(1 + \tan^2 \varphi) = \frac{d\varphi}{dz} \left(1 + \left(\frac{dr}{dz} \right)^2 \right) = \frac{d^2 r}{dz^2}$; en remplaçant dans (58), il vient :

$$-\frac{dK}{dz} = \frac{F}{1 + \left(\frac{dr}{dz} \right)^2} \frac{d^2 r}{dz^2} \quad (59)$$

or, d'après la question 25. $\frac{dK}{dz} = \frac{2\Pi r}{N} \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz} \right)^2} zg(\mu_e - \mu_i)$, donc :

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = -\frac{2\Pi g(\mu_e - \mu_i)}{NF} r z \left(1 + \left(\frac{dr}{dz} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}} \quad (60)$$

d'où : $A = \frac{2\Pi g(\mu_e - \mu_i)}{NF}$ homogène à l'inverse d'une longueur au carré.

28 En effectuant le changement de variables, on obtient :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -A^{3k+1} y x \left(1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}} \quad (61)$$

il suffit de prendre $k = -\frac{1}{3}$.

29 Le changement de variables précédent revient à écrire l'équation avec des variables adimensionnées où y est le rayon adimensionné et x la cote adimensionnée. La figure donne donc la forme (couchée) d'une coupe du ballon qui est bien celle que l'on connaît (cf figure 4) et dont le volume dépendra de $y'(0)$, valeur à ajuster en fonction du volume désiré.