

2008 Mines-Ponts Filière PC PREMIÈRE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Conformément à l'énoncé, nous notons les vecteurs avec une flèche, par exemple $\vec{g}$, et les vecteurs unitaires $\hat{z}$

QUELQUES OSCILLATIONS

I. — Rail fixe

□ 1 — $\vec{0} = \vec{v}(I \in \text{rail}) = \vec{v}(I \in \text{sphère}) = \vec{v}(C \in \text{sphère}) + \vec{\Omega}(\text{sphère}/R_g) \wedge \vec{CI}$, donc

$$\vec{0} = (R - r) \dot{\alpha} \hat{\alpha} + \dot{\theta} \hat{k} \wedge r \hat{r} = (R - r) \dot{\alpha} \hat{\alpha} + r \dot{\theta} \hat{\alpha}, \text{ d'où } r \dot{\theta} = - (R - r) \dot{\alpha}.$$

Contrôle de la pertinence:

Si $\dot{\alpha} > 0$, C se déplace vers la droite et donc la sphère tourne sur elle-même dans le sens inverse du sens trigonométrique, ce qui donne $\dot{\theta} < 0$, en accord avec la relation puisque $R - r > 0$.

Si $r = R$, la sphère ne peut pas tourner, donc $\dot{\theta} = 0$, en accord avec la relation.

$$\square 2 — E_t = E_c + E_p \text{ avec } E_c = \frac{1}{2} m v(C)^2 + \frac{1}{2} J_C \Omega^2 = \frac{1}{2} m (R - r)^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \frac{2}{5} m r^2 \dot{\theta}^2 = \dots$$

$$\dots = \frac{1}{2} m (R - r)^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{5} m (R - r)^2 \dot{\alpha}^2 = \frac{7}{10} m (R - r)^2 \dot{\alpha}^2.$$

L'énergie potentielle vaut $E_p = -m g x_C + \text{cste} = -m g (R - r) \cos \alpha + \text{cste}$.

$$\text{Donc } E_t = \frac{7}{10} m (R - r)^2 \dot{\alpha}^2 - m g (R - r) \cos \alpha + \text{cste}.$$

La sphère est un solide donc la puissance des actions intérieures est nulle.

La puissance de l'action du rail sur la sphère est $\vec{F} \cdot \vec{v}(I \in \text{sphère}) = 0$.

La seule autre force sur la sphère est son poids, qui est conservatif.

Donc la sphère est un système conservatif, son énergie est une constante. $\frac{dE_t}{dt} = 0$, ce qui donne en simplifiant

$$\text{par } \dot{\alpha} \text{ qui n'est pas toujours nul, } \ddot{\alpha} + \frac{5g}{7(R-r)} \sin \alpha = 0.$$

□ 3 — Pour des petites oscillations (autour de $\alpha_{\text{eq}} = 0$), $\sin \alpha \approx \alpha$, d'où $\ddot{\alpha} + \frac{5g}{7(R-r)} \alpha = 0$ qui est l'équation

d'un oscillateur harmonique de pulsation propre ω_0 telle que $\omega_0^2 = \frac{5g}{7(R-r)}$, et donc de période

$$T_{\text{po}} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}}.$$

□ 4 — Pour la sphère qui glisse sans rouler (centre C_2 repéré par l'angle α_2), donc en translation dans R_g ,

l'énergie cinétique vaut $E_{c2} = \frac{1}{2} m v(C_2)^2 = \frac{1}{2} m (R - r)^2 \dot{\alpha}_2^2$ et pour la sphère qui roule sans glisser (centre C_1 ,

repéré par l'angle α_1) elle vaut $E_c = \frac{1}{2} m v(C_1)^2 + \frac{1}{2} J_C \Omega^2 = \frac{7}{10} m (R - r)^2 \dot{\alpha}_1^2$.

La sphère qui glisse sans rouler est un système conservatif car dans ce cas il n'y a pas de frottement et l'action du rail sur la sphère est perpendiculaire au plan tangent donc aussi à la vitesse du point de contact, donc sa puissance est $\vec{F} \cdot \vec{v}(I \in \text{sphère}) = 0$.

Au départ les deux sphères ont la même énergie, comme celle-ci est conservée, c'est vrai à tout instant.

Pour un angle α donné ($|\alpha| \leq \alpha_0$), les deux sphères ont la même énergie potentielle, et donc la même énergie

cinétique (puisque $E = E_c + E_p$). On en déduit que $\frac{1}{2} \dot{\alpha}_2^2 = \frac{7}{10} \dot{\alpha}_1^2$ et donc que $\dot{\alpha}_2^2 = \frac{7}{5} \dot{\alpha}_1^2 > \dot{\alpha}_1^2$.

La sphère qui glisse sans rouler descend donc plus vite que la sphère qui roule sans glisser.

Qualitativement, on voit bien qu'une partie de l'énergie de la sphère 1 est utilisée pour la rotation, ce qui la ralentit par rapport à la sphère 2.

Si les masses sont changées, ces résultats restent les mêmes car la masse n'intervient pas dans la durée de chute (elle se simplifie dans la question suivante car elle intervient de la même façon dans E_c et dans E_p).

□ 5 — Pour la sphère 2 (donc qui glisse sans rouler), l'équation de conservation de l'énergie s'écrit

$$\frac{1}{2} m (R - r)^2 \dot{\alpha}^2 - m g (R - r) \cos \alpha + \text{cte} = 0 - m g (R - r) \cos \alpha_0 + \text{cte}, \text{ Donc } \frac{d\alpha^2}{d\alpha} = 2 \frac{g}{R-r} (\cos \alpha - \cos \alpha_0).$$

Dans la phase de descente, $\frac{d\alpha}{dt} < 0$, avec $0 < \alpha < \alpha_0$, $\cos \alpha > \cos \alpha_0$, donc $\frac{d\alpha}{dt} = -\sqrt{2 \frac{g}{R-r} (\cos \alpha - \cos \alpha_0)}$, soit

$$dt = -\sqrt{\frac{1}{2} \frac{R-r}{g}} \frac{d\alpha}{\sqrt{\cos \alpha - \cos \alpha_0}}. \text{ La durée de chute } \tau \text{ (}\alpha \text{ passe de } \alpha_0 \text{ à } 0\text{) est donc}$$

$$\tau = \int_0^{\alpha_0} dt = \int_0^{\alpha_0} -\sqrt{\frac{1}{2} \frac{R-r}{g}} \frac{d\alpha}{\sqrt{\cos \alpha - \cos \alpha_0}}, \text{ soit } \tau = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{R-r}{g}} \int_0^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{\sqrt{\cos \alpha - \cos \alpha_0}}.$$

Pour la sphère qui roule sans glisser, il faut remplacer $\frac{1}{2}$ par $\frac{7}{10}$, donc $\frac{\tau'}{\tau} = \sqrt{\frac{7}{5}}$ supérieur à 1 bien sûr !

II. — Rail suspendu

II.A. — Description du mouvement

□ 6 — Le roulement sans glissement s'écrit $\vec{v}(I \in \text{rail}) = \vec{v}(I \in \text{sphère})$.

De plus $\vec{v}(I \in \text{rail}) = \dot{\beta} \hat{k} \wedge \vec{OI} = \dot{\beta} \hat{k} \wedge R \hat{r} = \dot{\beta} R \hat{\alpha}$,

et $\vec{v}(I \in \text{sphère}) = \vec{v}(C \in \text{sphère}) + \vec{\Omega}(\text{sphère}/R_g) \wedge \vec{CI} = (R - r) \dot{\alpha} \hat{\alpha} + r \dot{\theta} \hat{\alpha}$.

Donc $(R - r) \dot{\alpha} + r \dot{\theta} = R \dot{\beta}$. Si $\dot{\beta} = 0$, on retrouve bien la relation de la question 1.

□ 7 — $\vec{\sigma}_{1C} = J \dot{\theta} \hat{k} = \frac{2}{5} m r^2 \dot{\theta} \hat{k}$.

$\vec{\sigma}_{1O} = \vec{\sigma}_{1C} + m \vec{OC} \wedge \vec{v}(C)$ (qu'on peut redémontrer rapidement) d'où

$$\vec{\sigma}_{1O} = \left[\frac{2}{5} m r^2 \dot{\theta} + m (R - r)^2 \dot{\alpha} \right] \hat{k} = \left[\frac{2}{5} m r (R \dot{\beta} - (R - r) \dot{\alpha}) + m (R - r)^2 \dot{\alpha} \right] \hat{k}.$$

□ 8 — Le rail est en rotation autour de $O \hat{k}$ donc (c'est la composante selon $\hat{k}$ qui nous intéresse, on peut montrer que les autres sont nulles par le calcul intégral) $\vec{\sigma}_{2O} = J' \dot{\beta} \hat{k} = M R^2 \dot{\beta} \hat{k}$.

□ 9 — D'après le théorème de Koenig, $E_{CS} = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \vec{v}(C)^2 = \frac{1}{5} m r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m (R - r)^2 \dot{\alpha}^2$.

$$E_{CR} = \frac{1}{2} J' \dot{\beta}^2 = \frac{1}{2} M R^2 \dot{\beta}^2 \text{ et } E_{CT} = E_{CS} + E_{CR}.$$

□ 10 — Appliquons le théorème du moment cinétique en O au système rail-sphère.

$$\frac{d}{dt} (\vec{\sigma}_{1O} + \vec{\sigma}_{2O}) = \vec{OC} \wedge m g \hat{i} + \vec{OG} \wedge M g \hat{i} \text{ d'où } \frac{2}{5} m r^2 \ddot{\theta} + m (R - r)^2 \ddot{\alpha} + M R^2 \ddot{\beta} = -(R - r) m g \sin \alpha - l M g \sin \beta,$$

$$\text{ou encore } \frac{2}{5} m r [R \ddot{\beta} - (R - r) \ddot{\alpha}] + m (R - r)^2 \ddot{\alpha} + M R^2 \ddot{\beta} = -(R - r) m g \sin \alpha - l M g \sin \beta.$$

□ 11 — Appliquons le théorème du moment cinétique en C à la sphère, soumise à son poids appliqué en C et à l'action du rail sur la sphère $\vec{R} = N \hat{r} + T \hat{\alpha}$ appliquée en I .

$$\frac{d}{dt} (\vec{\sigma}_{1C}) = \vec{CI} \wedge m g \hat{i} + \vec{CI} \wedge (N \hat{r} + T \hat{\alpha}), \text{ d'où } \frac{2}{5} m r^2 \ddot{\theta} = r T, \text{ soit } T = \frac{2}{5} m r \ddot{\theta} = \frac{2}{5} m [R \ddot{\beta} - (R - r) \ddot{\alpha}].$$

□ 12 — Appliquons le théorème du moment cinétique en O au rail, soumis à son poids appliqué en G et à l'action $-\vec{R}$ de la sphère sur le rail appliquée en I .

$\frac{d}{dt}(\vec{\sigma}_{20}) = \vec{OG} \wedge M g \hat{i} + \vec{OI} \wedge (-N \hat{r} - T \hat{\alpha})$ d'où $M R^2 \ddot{\beta} = -l M g \sin \beta - R T$, ce qui donne avec le résultat de la question 11 $\left(M R^2 + \frac{2}{5} m R^2\right) \ddot{\beta} - \frac{2}{5} m R (R-r) \ddot{\alpha} = -M g l \sin \beta$ (1), de la forme demandée avec

$$A = \left(M + \frac{2}{5} m\right) R^2 \text{ et } B = \frac{2}{5} m R (R-r).$$

□ 13 — On reporte ce dernier résultat dans l'équation trouvée dans la question 10, ce qui donne

$\frac{7}{5} m (R-r)^2 \ddot{\alpha} - \frac{2}{5} m R (R-r) \ddot{\beta} = -m g (R-r) \sin \alpha$ (2), de la forme demandée avec

$$A' = \frac{7}{5} m (R-r)^2 \text{ et } B = \frac{2}{5} m R (R-r).$$

Si $\beta = 0$, on retrouve bien le résultat de la question 5.

□ 14 — Appliquons le théorème de la puissance cinétique au rail.

$\frac{d}{dt}(E_{CR}) = -\vec{R} \cdot \vec{v}(I \in \text{rail}) - M g \hat{i} \cdot \vec{v}(G)$, d'où $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} M R^2 \dot{\beta}^2\right) = -T R \dot{\beta} - M g \sin \beta l \dot{\beta}$ soit

$\frac{1}{2} M R^2 \dot{\beta} \ddot{\beta} = -T R \dot{\beta} - M g \sin \beta l \dot{\beta}$ en simplifiant par $\dot{\beta}$ on retrouve l'équation de la question 12 et en

remplaçant T (par son expression de la question 11), on retrouve bien l'équation (1).

Appliquons le théorème de la puissance cinétique à la sphère.

$\frac{d}{dt}(E_{CS}) = \vec{R} \cdot \vec{v}(I \in \text{sphère}) - m g \hat{i} \cdot \vec{v}(C)$ avec $\vec{v}(I \in \text{sphère}) = \vec{v}(I \in \text{rail}) = \dot{\beta} R \hat{\alpha}$, d'où

$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{5} m r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m (R-r)^2 \dot{\alpha}^2\right) = T R \dot{\beta} - m g \sin \alpha (R-r) \dot{\alpha}$, soit

$\frac{1}{5} m r^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + m (R-r)^2 \dot{\alpha} \ddot{\alpha} = T R \dot{\beta} - m g \sin \alpha (R-r) \dot{\alpha}$. En remplaçant l'expression de T de la question 11 puis en simplifiant par $\dot{\alpha}$, on retrouve l'équation (2).

$$A A' = \left(M + \frac{2}{5} m\right) R^2 \frac{7}{5} m (R-r)^2 \text{ et } B^2 = \left(\frac{2}{5} m R (R-r)\right)^2, \text{ donc } \frac{A A'}{B^2} = \frac{\left(M + \frac{2}{5} m\right) \frac{7}{5} m}{\left(\frac{2}{5} m\right)^2} = \frac{7(5M + 2m)}{4m}, \text{ donc}$$

$$\frac{A A'}{B^2} = \frac{7}{2} + \frac{35M}{4m} > \frac{7}{2} > 1, \text{ d'où } A A' > B^2.$$

□ 15 — Des termes en $\dot{\alpha}$ ou $\dot{\beta}$ traduiraient une perte d'énergie. Ce n'est pas le cas au niveau du contact rail-sphère grâce au roulement sans glissement et il n'y a pas d'autres forces de frottement (par exemple frottement fluide dû à l'air). De plus la réaction en O peut travailler.

II.A. — Modes d'oscillation

□ 16 — Pour de petits angles α et β , les équations (1) et (2) deviennent

$A \ddot{\beta} - B \ddot{\alpha} = -D \sin \beta = -D \beta$ et $A' \ddot{\alpha} - B \ddot{\beta} = -D' \sin \alpha = -D' \alpha$.

Avec la représentation complexe, il vient $-A \omega^2 \underline{\beta}_0 + B \omega^2 \underline{\alpha}_0 = -D \underline{\beta}_0$ et $-A' \omega^2 \underline{\alpha}_0 + B \omega^2 \underline{\beta}_0 = -D' \underline{\alpha}_0$, d'où le système $B \omega^2 \underline{\alpha}_0 + (D - A \omega^2) \underline{\beta}_0 = 0$ et $(D' - A' \omega^2) \underline{\alpha}_0 - B \omega^2 \underline{\beta}_0 = 0$.

Ce système homogène admet des solutions non nulles si son déterminant est nul.

$$0 = \begin{vmatrix} B \omega^2 & D - A \omega^2 \\ D' - A' \omega^2 & B \omega^2 \end{vmatrix} = (B \omega^2)^2 - (D - A \omega^2)(D' - A' \omega^2), \text{ donc } \omega^4 (A A' - B^2) - \omega^2 (A D' + A' D) + D D' = 0.$$

Le discriminant vaut $\Delta = (A D' + A' D)^2 - 4 D D' (A A' - B^2) = (A D' - A' D)^2 + 4 D D' B^2 > 0$. Les deux racines sont

donc $\frac{A D' + A' D + \sqrt{\Delta}}{2(A A' - B^2)}$ et $\frac{A D' + A' D - \sqrt{\Delta}}{2(A A' - B^2)}$ qui sont toutes les deux positives puisque $A A' - B^2 > 0$ et

$$\Delta = (AD' + A'D)^2 - 4 DD'(AA' - B^2) < (AD' + A'D)^2.$$

Les deux solutions pour ω sont donc $\omega_1 = \sqrt{\frac{AD' + A'D + \sqrt{\Delta}}{2(AA' - B^2)}}$ et $\omega_2 = \sqrt{\frac{AD' + A'D - \sqrt{\Delta}}{2(AA' - B^2)}}$.

□ 17 — La solution générale est $\beta(t) = \beta_1 e^{i\omega_1 t} + \beta_2 e^{i\omega_2 t}$, avec $\beta(0) = 0$, donc $\beta_1 = -\beta_2$. On pose $\beta_1 = \eta e^{i\varphi}$, alors

$\beta(t) = \eta e^{i\varphi} (e^{i\omega_1 t} - e^{i\omega_2 t})$ et donc $\beta(t) = \text{Re}(\beta(t)) = \eta (\cos(\omega_1 t + \varphi) - \cos(\omega_2 t + \varphi))$ qui est de la forme proposée en changeant l'origine des dates de façon à poser $\varphi = 0$.

□ 18 — $\beta(t) = \eta (\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)) = 2\eta \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right).$

Le premier cosinus est de période $\frac{4\pi}{\omega_1 + \omega_2}$, le deuxième de période $\frac{4\pi}{\omega_1 - \omega_2}$. Or $\frac{4\pi}{\omega_1 - \omega_2} > \frac{4\pi}{\omega_1 + \omega_2}$, donc $\frac{4\pi}{\omega_1 - \omega_2}$ est la période des battements (enveloppe de la courbe) $\frac{4\pi}{\omega_1 + \omega_2}$ la période à l'intérieur de l'enveloppe.

$$T_{\text{batt}} = \frac{4\pi}{\omega_1 - \omega_2} \text{ et } T_i = \frac{4\pi}{\omega_1 + \omega_2}.$$

Sur le graphe, on mesure $T_{\text{batt}} = 7,6 \text{ s}$ et $T_i = 1,0 \text{ s}$.

On déduit $\omega_1 = 2\pi \left(\frac{1}{T_i} + \frac{1}{T_{\text{batt}}} \right)$ et $\omega_2 = 2\pi \left(\frac{1}{T_i} - \frac{1}{T_{\text{batt}}} \right)$ et donc

$$\omega_{\text{lexp}} = 7,1 \text{ rad.s}^{-1} \text{ et } \omega_{2\text{exp}} = 5,5 \text{ rad.s}^{-1}.$$

Avec les valeurs numériques proposées, on trouve (ce calcul est un peu long !) $A = (90 \cdot 10^{-3} + \frac{2}{5} \cdot 67 \cdot 10^{-3}) \cdot (19 \cdot 10^{-2})^2 = 4,22 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^2$;

$$A' = \frac{7}{5} \cdot 67 \cdot 10^{-3} \cdot ((19 - 1,27) \cdot 10^{-2})^2 = 2,95 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^2;$$

$$B = \frac{2}{5} \cdot 67 \cdot 10^{-3} \cdot 19 \cdot 10^{-2} \cdot ((19 - 1,27) \cdot 10^{-2}) = 9,03 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^2;$$

$$D = 90 \cdot 10^{-3} \cdot 9,81 \cdot 17,7 \cdot 10^{-2} = 1,56 \cdot 10^{-1} \text{ kg.m}^2; D' = 67 \cdot 10^{-3} \cdot 9,81 \cdot ((19 - 1,27) \cdot 10^{-2}) = 1,17 \cdot 10^{-1} \text{ kg.m}^2.$$

$$\Delta = (AD' - A'D)^2 + 4 DD'B^2 = 6,03 \cdot 10^{-8} \text{ kg}^2 \cdot \text{m}^4.$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{AD' + A'D + \sqrt{\Delta}}{2(AA' - B^2)}} \text{ et } \omega_2 = \sqrt{\frac{AD' + A'D - \sqrt{\Delta}}{2(AA' - B^2)}} \text{ donnent } \omega_{1\text{théo}} = 7,2 \text{ rad.s}^{-1} \text{ et } \omega_{2\text{théo}} = 5,5 \text{ rad.s}^{-1}.$$

Ces deux séries de valeurs sont bien cohérentes entre elles

III. — Oscillations électriques

□ 19 — Avec les conventions de l'énoncé, $i_2 = \dot{q}_2$, $i_1 = -\dot{q}_1$, $i = i_1 + i_2$.

Dans la maille de gauche - $L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{q_1}{C_1} - L \frac{di}{dt} = 0$.

Dans la maille de droite, $L \frac{di}{dt} + \frac{q_2}{C_2} + L_2 \frac{di_2}{dt} = 0$.

Donc $L_1 \ddot{q}_1 + \frac{q_1}{C_1} - L(-\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) = 0$ et $L(-\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + \frac{q_2}{C_2} + L_2 \ddot{q}_2 = 0$.

Ou encore $(L_1 + L) \ddot{q}_1 - L \ddot{q}_2 = -\frac{q_1}{C_1}$ et $(L_2 + L) \ddot{q}_2 - L \ddot{q}_1 = -\frac{q_2}{C_2}$.

□ 20 — Ces deux équations sont de la forme $A \ddot{q}_1 - B \ddot{q}_2 = -D q_1$ et $A' \ddot{q}_2 - B \ddot{q}_1 = -D' q_2$, analogues aux équations (1) et (2) des questions 12 et 13, en faisant les analogies $\beta \rightarrow q_1$, $\alpha \rightarrow q_2$, et en prenant

$$A = L_1 + L, A' = L_2 + L, B = L, D = \frac{1}{C_1} \text{ et } D' = \frac{1}{C_2}.$$

