

MINES-PONTS 2008, FILIÈRE PSI, PHYSIQUE 1

Pour me contacter (erreurs,...) : JP Caniparoli, courriel : artefact.act@wanadoo.fr

I. COLLISIONS SANS PERTE D'ÉNERGIE : LE MODÈLE DE HERTZ

1. Le rapport de distances δ/a est sans dimension, donc ε à la même dimension que la pression P .

Dans le triangle rectangle formé sur la figure par le centre d'une bille, le bord du méplat et son centre, le théorème de Pythagore s'écrit $R^2 = (R - \delta)^2 + a^2/4$, soit $a^2 = 4(2R\delta + \delta^2) \approx 8R\delta$ si $\delta \ll R$. Alors $a \approx 2\sqrt{2R\delta}$.

2. En reportant, $F_{de} = 4\pi\varepsilon\delta a = 8\pi\varepsilon\delta\sqrt{2R\delta} = 8\pi\varepsilon\sqrt{2R}\delta^{3/2}$.

La force de déformation s'exerçant sur les billes est une force répartie sur le volume des billes. Étant donnée dans l'énoncé sous la forme d'une force unique, il semble légitime de calculer l'énergie associée à partir de l'effet de cette force, qui est de freiner le mouvement des centres de masse O_1 et O_2 des 2 billes. On suppose donc que la force de déformation s'applique aux centres de masse des billes.

Remarque : supposer « naïvement » que cette force s'applique à la surface de contact entre les deux billes conduit à un travail nul, car on ne tient alors pas compte de la déformation des billes.

L'axe Ox étant orienté de O_1 vers O_2 , les forces qui s'exercent respectivement sur les billes sont $F_1 = -F_{de}$ et $F_2 = F_{de}$. Le travail total de la force de déformation, qui traduit l'interaction entre les deux billes, est indépendant du référentiel de calcul (travail d'une action intérieure au système). Dans le référentiel barycentrique des deux billes, d'origine le milieu O de O_1O_2 , par symétrie du système :

$$\delta W_{de} = F_1 dx_1 + F_2 dx_2 = F_{de} d(x_2 - x_1) = F_{de} d(2R - 2\delta) = -2F_{de} d\delta = -16\pi\varepsilon\sqrt{2R}\delta^{3/2} d\delta$$

On peut mettre ce travail sous forme d'une différentielle et introduire une énergie potentielle :

$$\delta W_{pe} = -d\left(\frac{32}{5}\pi\varepsilon\sqrt{2R}\delta^{5/2}\right) = -dE_p$$

L'énergie potentielle E_p supposée positive a pour expression (à une constante additive près) :

$$E_p = \frac{32}{5}\pi\varepsilon\sqrt{2R}\delta^{5/2}$$

3. D'après le schéma, $x_2 - x_1 = 2R - 2\delta$.

Les vitesses initiales des billes sont opposées, leurs masses sont identiques et la force de déformation est identique pour les deux billes, donc le système est parfaitement symétrique. On en déduit $dx_2/dt = -dx_1/dt$ à tout instant, et

$$-2\frac{dx_1}{dt} = \frac{d(x_2 - x_1)}{dt} = -2\frac{d\delta}{dt} = \delta' \text{ soit } \frac{dx_1}{dt} = \delta'$$

4. L'énergie cinétique du système est (la rotation est négligée)

$$\frac{1}{2}m \left(\frac{dx_1}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}m \left(\frac{dx_2}{dt} \right)^2 = m\delta'^2$$

Seule l'énergie potentielle associée à la force de déformation varie. Finalement :

$$E_m = m\delta'^2 + \frac{32}{5}\pi\varepsilon\sqrt{2R}\delta^{5/2}$$

5. La résultante des forces extérieures sur le système des deux billes est nulle : leurs poids sont compensés par la réaction du support, les frottements sont négligés, la force de déformation est intérieure au système. La quantité de mouvement du système est donc conservatrice, et on peut effectivement étudier le mouvement dans le référentiel du centre de masse qui est galiléen.

Dans le référentiel du centre de masse, la quantité de mouvement initiale est nulle. Elle reste nulle après le choc : $\vec{P} = m\vec{w}_1 + m\vec{w}_2 = \vec{0}$, donc après le choc $\vec{w}_1 = -\vec{w}_2$.

6. Le système est conservatif (les frottements sont négligés, et la force de déformation dérive d'une énergie potentielle), donc l'énergie mécanique se conserve. Avant et après le choc cette énergie est uniquement cinétique puisqu'il n'y a pas de déformation, et s'écrit mv^2 avant le choc et mw^2 après le choc. Par conséquent, $w = v$.

7. La conservation de l'énergie mécanique pendant le choc s'écrit :

$$mv^2 = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_b v^2 = m\delta'^2 + \frac{32\sqrt{2}}{5}\pi\varepsilon\sqrt{R}\delta^{5/2} \geq \frac{32\sqrt{2}}{5}\pi\varepsilon\sqrt{R}\delta^{5/2}$$

car $\delta'^2 \geq 0$. La déformation δ vérifie l'inégalité :

$$\delta \leq \delta_m = \left(\frac{5\rho_b}{24\sqrt{2}\varepsilon} \right)^{2/5} Rv^{4/5}$$

On constate que

$$u_m = \delta_m/R = \left(\frac{5\rho_b}{24\sqrt{2}\varepsilon} \right)^{2/5} v^{4/5}$$

est indépendant du rayon de la bille : la géométrie de la bille à la déformation maximale est indépendante de sa taille.

8. L'énergie mécanique peut s'écrire

$$E_m = mv^2 = m\delta'^2 + \frac{32\sqrt{2}}{5}\pi\varepsilon\sqrt{R}\delta^{5/2} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_b \delta'^2 + \frac{32\sqrt{2}}{5}\pi\varepsilon\sqrt{R}\delta^{5/2} = \frac{32\sqrt{2}}{5}\pi\varepsilon\sqrt{R}\delta_m^{5/2}$$

soit

$$\delta'^2 = \left(\frac{d\delta}{dt} \right)^2 = \frac{24\sqrt{2}\varepsilon}{5R^{5/2}\rho_b} (\delta_m^{5/2} - \delta^{5/2}) = v^2 \left(1 - \left(\frac{\delta}{\delta_m} \right)^{5/2} \right)$$

La phase de compression et la phase de détente sont de même durée. Pendant la phase de compression, on peut écrire à partir de la relation précédente :

$$dt = \frac{d\delta}{v(1 - (\delta/\delta_m)^{5/2})}$$

En posant $u = \delta/\delta_m$, u varie de 0 à 1 pendant la phase de compression, et

$$\frac{\tau}{2} = \frac{\delta_m}{v} \int_0^1 \frac{du}{1 - u^{5/2}}$$

$$\tau = \frac{2\delta_m}{v} \int_0^1 \frac{du}{1 - u^{5/2}} = \left(\frac{5\rho_b}{24\sqrt{2\varepsilon}} \right)^{2/5} \frac{2IR}{v^{1/5}} = \left(\frac{5m}{8\pi\varepsilon\sqrt{Rv}} \right)^{2/5} I = \frac{2Iu_m R}{v}$$

9. Masse des particules : $m = (4/3)\pi\rho_b R^3 = 1,05.10^{-8}$ kg ($R = 1,00.10^{-4}$ m) ou $1,05.10^{-5}$ kg ($R = 1,00.10^{-3}$ m).

$u_m = 1,18.10^{-3}$; $\tau = 2Iu_m R/v = 1,15.10^{-7}$ s ($R = 1,00.10^{-4}$ m) ou $\tau = 1,15.10^{-7}$ s ($R = 1,00.10^{-3}$ m)

La relation $\tau = 2Iu_m R/v$ où $u_m = \delta_m/R$ est sans dimension permet de vérifier que τ à la dimension du rapport R/v donc qu'il s'agit bien d'un temps.

II. COLLISIONS AVEC PERTE D'ÉNERGIE

10. Le système reste isolé, donc la quantité de mouvement se conserve pendant le choc : $m(v_1 + v_2) = m(w_1 + w_2)$.

11. La perte d'énergie cinétique s'écrit $-\Delta E_c = (m/2)(v_1^2 + v_2^2 - w_1^2 - w_2^2)$.

D'après la conservation de la quantité de mouvement, $w_1 + w_2 = v_1 + v_2$. D'après l'expression du coefficient de restitution, $w_1 - w_2 = e(v_2 - v_1)$. On en déduit la relation :

$$w_1^2 + w_2^2 = \frac{(w_1 + w_2)^2 + (w_1 - w_2)^2}{2} = \frac{(v_1 + v_2)^2 + e^2(v_2 - v_1)^2}{2} = \frac{(v_1^2 + v_2^2)(1 + e^2)}{2} + v_1 v_2 (1 - e^2)$$

qui reportée dans l'expression de la perte d'énergie cinétique donne :

$$-\Delta E_c = \frac{m}{4}(1 - e^2)(v_1 - v_2)^2$$

12. Si $v_1 = -v_2 = v$, la relation précédente devient :

$$-\Delta E_c = mv^2(1 - e^2)$$

13. Comme le produit $\delta'(\partial F_{de}/\partial \delta)$ a la dimension d'une force divisée par un temps, la constante A a la dimension d'un temps pour donner la force F_d .

La force F_d est dissipative, donc de travail négatif. Le travail élémentaire de cette force s'écrit :

$$\delta W = -|F_d|d\delta = -A \left| \delta' \frac{\partial F_{de}}{\partial \delta} \right| d\delta$$

La force de déformation F_{de} augmente avec la déformation δ , donc $\partial F_{de}/\partial \delta$ est positif. À partir de l'expression de F_{de} (question 2) on calcule :

$$\frac{\partial F_{de}}{\partial \delta} = 12\sqrt{2}\pi\varepsilon\sqrt{R}\delta^{1/2}$$

Au cours de la compression, δ augmente, donc δ' est positif, et le travail élémentaire s'écrit

$$W_1 = -A \int_0^{\delta_m} \delta' \frac{\partial F_{de}}{\partial \delta} d\delta = -12\sqrt{2}\pi\varepsilon\sqrt{R}A \int_0^{\delta_m} \delta' \sqrt{\delta} d\delta$$

Lors de la décompression, δ' est négatif, mais les bornes d'intégration sont inversées :

$$W_2 = A \int_{\delta_m}^0 \delta' \frac{\partial F_{de}}{\partial \delta} d\delta = 12\sqrt{2}\pi\varepsilon\sqrt{RA} \int_{\delta_m}^0 \delta' \sqrt{\delta} d\delta =$$

Ces deux intégrales sont a priori différentes à cause justement de la force dissipative : il n'y a pas invariance par renversement du temps, et la norme de la vitesse δ' n'est pas uniquement fonction de δ . Cependant, si on peut considérer que la norme de la vitesse δ' n'est fonction que de δ (approximation vérifiée si la force dissipative est très faible, voir question suivante) le travail de la force dissipative lors de la phase de décompression est identique à son travail lors de la phase de compression, et alors :

$$U_d = W_1 + W_2 = 2A \int_0^{\delta_m} \delta' \frac{\partial F_{de}}{\partial \delta} d\delta = 24\sqrt{2}\pi\varepsilon\sqrt{RA} \int_0^{\delta_m} \delta' \sqrt{\delta} d\delta$$

14. Si on néglige les pertes dissipatives, le système est conservatif, et le bilan de la première partie (question 7) s'applique en première approximation :

$$\delta'^2 = v^2 \left(1 - \left(\frac{\delta}{\delta_m} \right)^{5/2} \right)$$

En reportant l'expression de δ_m :

$$\delta_m = \left(\frac{5\rho_b}{24\sqrt{2}\varepsilon} \right)^{2/5} Rv^{4/5} = \left(\frac{5mv^2}{32\pi\sqrt{2}R\varepsilon} \right)^{2/5}$$

on obtient

$$\delta'^2 = v^2 \left(1 - \frac{32\pi\sqrt{2}R}{5mv^2} \varepsilon \delta^{5/2} \right)$$

On peut alors remplacer v par son expression en fonction de δ_m :

$$v^2 = \frac{32\pi\sqrt{2}R\varepsilon\delta_m^{5/2}}{5m}$$

pour obtenir :

$$\delta'^2 = \frac{32\pi\sqrt{2}R\varepsilon\delta_m^{5/2}}{5m} \left(1 - \left(\frac{\delta}{\delta_m} \right)^{5/2} \right) = \frac{32\pi\sqrt{2}R\varepsilon\delta_m^{5/2}}{5m} (1 - y^{5/2})$$

$$\delta' = v \sqrt{1 - y^{5/2}}$$

Remarque : il y a un écart d'un facteur 2 avec l'énoncé, qui provient vraisemblablement du calcul de l'énergie potentielle associée à la force de déformation.

15. D'après la question précédente, l'intégrale permettant d'exprimer U_d s'écrit

$$\int_0^{\delta_m} \delta' \sqrt{\delta} d\delta = \int_0^1 v \sqrt{1 - y^{5/2}} \delta_m^{3/2} \sqrt{y} dy = v \delta_m^{3/2} \int_0^1 \sqrt{(1 - y^{5/2})y} dy$$

L'énergie dissipée s'écrit alors :

$$U_d = 24\pi\sqrt{2}R\varepsilon A v \delta_m^{3/2} \int_0^1 \sqrt{(1 - y^{5/2})y} dy$$

soit en exprimant δ_m en fonction de v , et en remarquant que l'intégrale est un facteur numérique I' sans dimension :

$$U_d = A.24\pi\sqrt{2R\varepsilon} \left(\frac{5m}{32\pi\sqrt{2R\varepsilon}} \right)^{3/5} v.v^{4/5.3/2} I' = Af(R, \varepsilon, m)v^{11/5}$$

La puissance de v est $\beta = 11/5$.

16. Si la totalité de l'énergie cinétique perdue est dissipée lors de la collision, $-\Delta E_c = U_d$. La comparaison du résultat précédent et du calcul de la question 11 donne :

$$mv^2(1 - e^2) = Af(R, \varepsilon, m)v^{11/5}$$

soit :

$$1 - e^2 = A \frac{f(R, \varepsilon, m)}{m} v^{1/5}$$

$1 - e^2$ est proportionnel à $v^{1/5}$ (erreur d'énoncé ? : lire $1 - e^2$ et non $1 - e$).

17. L'irréversibilité du phénomène, qui entraîne $e \neq 1$ est liée à la déformation des billes au cours de leur contact, caractérisée par le facteur δ_m . Pour les faibles vitesses, δ_m tend vers 0 comme $v^{4/5}$, donc la cause d'irréversibilité disparaît et le choc se rapproche d'un choc élastique pour lequel $e = 1$.

Le coefficient de restitution e dépend en particulier du module d'Young ε (propriété des particules) mais aussi de v (propriété de la collision), donc (sauf erreur de ma part) il s'agit à la fois d'une propriété des particules et de la collision

III. LE TRANSPORT ÉOLIEN DU SABLE : LE MODÈLE D'ANDERSON

18. Expression du bilan de conservation de masse pendant la durée δt sur le système ouvert formé par la tranche de largeur L comprise entre les abscisses x et $x + \delta x$:

- la masse de la tranche est $\delta M = \rho h(x, t)L\delta x$;
- la masse arrivant pendant la durée δt à travers la section d'abscisse x a pour expression $\delta m_e = Q(x, t)L\delta t$;
- de même, la masse quittant la tranche pendant la durée δt à travers la section d'abscisse $x + \delta x$ a pour expression $\delta m_s = Q(x + \delta x, t)L\delta t$;

Le bilan de masse s'écrit : $\delta(\delta M) = \delta m_e - \delta m_s$, soit :

$$\frac{\partial \delta M}{\partial t} \delta t = \rho L \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} \delta t \delta x = Q(x, t)L\delta t - Q(x + \delta x, t)L\delta t = -L \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} \delta x \delta t$$

soit après simplification par $L\delta x\delta t$:

$$\rho \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x}$$

19. Le flux des grains en saltation étant constant et uniforme, il n'intervient pas dans le bilan de matière précédent :

$$\rho \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial Q_r(x, t)}{\partial x}$$

On peut écrire :

$$\frac{\partial Q_r}{\partial x} = m(N_e(x, t) - N_e(x - \ell_r, t))$$

Donc :

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = \frac{m}{\rho} (N_e(x - \ell_r, t) - N_e(x, t))$$

20. D'après le schéma de la figure 6.a, $d\mu = v dt.dS.\cos(\pi/2 - \alpha) = v \sin \alpha.dS dt$. Alors $dN = nv \sin \alpha.dS dt = N_0.dS dt$. Par conséquent, par unité de surface et de temps, pour un sol horizontal :

$$N_0 = nv \sin \alpha$$

Si le sol est incliné, le même calcul est valable en remplaçant l'angle α par $\alpha + \theta$ (contrairement au schéma de la figure 6.b, l'angle d'incidence par rapport à l'horizontale est toujours α) : $N_s(\theta) = nv \sin(\alpha + \theta)$. On forme le rapport $N_s(\theta)/N_0$:

$$\frac{N_s(\theta)}{N_0} = \frac{\sin(\alpha + \theta)}{\sin \alpha} = \frac{\sin(\alpha) \cos(\theta) + \cos(\alpha) \sin(\theta)}{\sin \alpha} = \cos(\theta) + \frac{\sin(\theta)}{\tan(\alpha)} = \cos(\theta) \left(1 + \frac{\tan(\theta)}{\tan(\alpha)} \right)$$

Ce qui permet d'exprimer $N_s(\theta)$ en fonction de N_0 comme l'indique l'énoncé :

$$N_s(\theta) = N_0 \cos(\theta) \left(1 + \frac{\tan(\theta)}{\tan(\alpha)} \right)$$

21. La pente de la surface repérée par l'angle θ par rapport à l'horizontale vérifie :

$$\tan(\theta) = \frac{\partial h}{\partial x}$$

22. En utilisant l'hypothèse du modèle d'Anderson, $N_e(x, t) = n_0 N_s(x, t)$, l'équation de la question 19 devient :

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = \frac{m}{\rho} (N_e(x - \ell_r, t) - N_e(x, t)) = -\frac{mn_0}{\rho} (N_s(x, t) - N_s(x - \ell_r, t)) = -\frac{mn_0}{\rho} [N_s(u, t)]_{x - \ell_r}^x$$

23. $N_s(u, t)$ s'exprime ensuite en fonction des résultats des questions 20 et 21 :

$$N_s(u, t) = N_0 \cos(\theta) \left(1 + \frac{\tan(\theta)}{\tan(\alpha)} \right) = N_0 \cos(\theta) \left(1 + \frac{\partial h / \partial x}{\tan(\alpha)} \right) = \frac{N_0 \cos(\theta)}{\tan(\alpha)} \left(\tan(\alpha) + \frac{\partial h}{\partial x} \right)$$

En reportant, et comme seuls θ et h dépendent de x :

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = -\frac{mn_0}{\rho} [N_s(u, t)]_{x - \ell_r}^x = -\frac{mn_0 N_0}{\rho \tan(\alpha)} \left[\cos(\theta) \left(\tan(\alpha) + \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right]_{x - \ell_r}^x$$

24. Si $h = h_0 = cste$, $\theta = 0$, et l'équation précédente s'écrit :

$$0 = -\frac{mn_0 N_0}{\rho \tan(\alpha)} [\tan(\alpha)]_{x - \ell_r}^x = 0$$

car α est constant : $h = h_0 = cste$ est solution de l'équation précédente.

25. La nouvelle forme de l'équation de la question 23 pour $\cos \theta \approx 1$ est :

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = -\frac{mn_0 N_0}{\rho \tan(\alpha)} \left[\tan(\alpha) + \frac{\partial h}{\partial x} \right]_{x - \ell_r}^x = -\frac{c_0}{\tan(\alpha)} \left[\frac{\partial h}{\partial x} \right]_{x - \ell_r}^x$$

Le rapport m/ρ a la dimension d'un volume, n_0 est sans dimension, et N_0 , nombre de particules par unité de temps et de surface a la dimension de l'inverse d'un produit temps x surface. Par conséquent $[c_0] = \text{volume}/(\text{surface} \cdot \text{temps}) = \text{vitesse}$.

26. La solution proposée s'écrit $\underline{h} = h_0 + h_1 \exp[ikx + (\gamma - i\omega)t]$. En reportant dans l'équation différentielle, on obtient :

$$(\gamma - i\omega)h_1 \exp[ikx + (\gamma - i\omega)t] = -\frac{c_0}{\tan(\alpha)}ikh_1 \exp[ikx + (\gamma - i\omega)t](1 - \exp(-ik\ell_r))$$

soit

$$\gamma - i\omega = -\frac{c_0}{\tan(\alpha)}ik(1 - \exp(-ik\ell_r)) = -\frac{c_0}{\tan(\alpha)}ik(1 - \cos(k\ell_r) + i\sin(k\ell_r))$$

En séparant partie réelle et partie imaginaire on obtient les expressions de γ et ω :

$$\gamma = \frac{c_0}{\tan(\alpha)}k \sin(k\ell_r) = \omega_0 u \sin u$$

$$\omega = \frac{c_0}{\tan(\alpha)}k(1 - \cos(k\ell_r)) = \omega_0 u(1 - \cos u)$$

27. La solution précédente est stable si $\gamma \leq 0$, soit si $u \sin u \leq 0$. Pour $k > 0$ la condition de stabilité s'écrit $\pi \leq k\ell_r \leq 2\pi[2\pi]$ ou encore $(p - 1/2)\lambda \leq \ell_r \leq p\lambda$.

En d'autres termes la solution est stable si le transfert par reptation se fait entre les creux et les bosses de la dune et vice-versa. Elle est instable si le transfert à lieu de bosse à bosse et de creux à creux.

28. On considère le terme de propagation.

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega\ell_r}{u} = \omega_0\ell_r(1 - \cos u)$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \ell_r \frac{d\omega}{du} = \omega_0\ell_r(1 - \cos u + u \sin u) = v_\varphi + \gamma\ell_r$$

Finalement :

$$v_g = v_\varphi + \gamma\ell_r$$

29. Pour un milieu non dispersif, $c = v_\varphi = \omega/k$ est indépendant de ω , donc $k = \omega/c$ est proportionnel à ω , et $v_g = d\omega/dk = c = v_\varphi$. Ici, $v_g \neq v_\varphi$: le sable semble être un milieu dispersif.

Remarque : Si ℓ_r est petit devant la distance caractéristique de variation de $\partial h/\partial x$, on peut effectuer un développement limité du terme entre crochet :

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x} \right]_{x-\ell_r}^x \approx \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \ell_r$$

ce qui conduit à l'équation aux dérivées partielles en $h(x, t)$:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{c_0\ell_r}{\tan(\alpha)} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

qui n'admet pas de solution de dépendance spatiale harmonique qui soit temporellement stable.