

MINES-PONTS 2008, FILIÈRE PSI, PHYSIQUE II

I. CRÉATION DE CHAMPS MAGNÉTIQUES AYANT DES PROPRIÉTÉS PARTICULIÈRES

1. Cours : $\vec{B} = \mu_0(N/\ell)I\vec{u}_z$

2. Tout plan contenant l'axe Oz est plan d'antisymétrie pour la spire. En tout point de l'axe Oz le champ magnétique doit appartenir à l'ensemble des plans de symétrie ; il est donc porté par l'axe Oz . Loi de Biot et Savart :

$$\vec{B}_{coz}(0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

Au point O , $r = R$, $\vec{u} = -\vec{u}_r$, soit $d\vec{\ell} \wedge \vec{u} = d\ell \vec{u}_\theta \wedge (-\vec{u}_r) = d\ell \vec{u}_z$. Par conséquent,

$$\vec{B}_{coz}(0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \int d\ell \vec{u}_z = \frac{\mu_0 I}{2R} \vec{u}_z$$

En un point de l'axe,

$$\vec{B}_{coz} \cdot \vec{u}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{(d\vec{\ell} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{u}_z}{r^2}$$

avec $r^2 = R^2 + z^2$, $\vec{u} = (-R\vec{u}_r + z\vec{u}_z)/r$, et $d\vec{\ell} = d\ell \vec{u}_\theta$. Par conséquent, $(d\vec{\ell} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{u}_z = d\ell R/r$ et

$$\vec{B}_{coz} \cdot \vec{u}_z = \frac{\mu_0 I R}{4\pi r^3} 2\pi R = \frac{\mu_0 I R^2}{2r^3} = \frac{\mu_0 I}{2R} \left(\frac{R}{r}\right)^3 = \frac{\mu_0 I}{2R} \frac{1}{(1+u^2)^{3/2}}$$

Par conséquent,

$$\vec{B}_{coz} = \frac{\vec{B}_{coz}(0)}{(1+u^2)^{3/2}}$$

3. Le résultat précédent s'applique à chacune des bobines, en repérant la position du point par rapport au centre de la bobine (O_1 ou O_2) et en multipliant le résultat par le nombre de spires de la bobine N . Pour un point de l'axe d'abscisse z , les abscisses par rapport aux centres des deux spires sont $z_1 = z + R/2$ et $z_2 = z - R/2$, donc en notant $u = z/R$, $u_1 = z_1/R$ et $u_2 = z_2/R$:

$$\vec{B}_{hoz} = \vec{B}_{1,hoz} + \vec{B}_{2,hoz} = N\vec{B}_{coz}(0) \left(\frac{1}{(1+u_1^2)^{3/2}} + \frac{1}{(1+u_2^2)^{3/2}} \right)$$

soit en exprimant u_1 et u_2 :

$$\vec{B}_{hoz} = \frac{\mu_0 N I}{2R} \vec{u}_z \left(\frac{1}{(1+(u+1/2)^2)^{3/2}} + \frac{1}{(1+(u-1/2)^2)^{3/2}} \right)$$

Au point O :

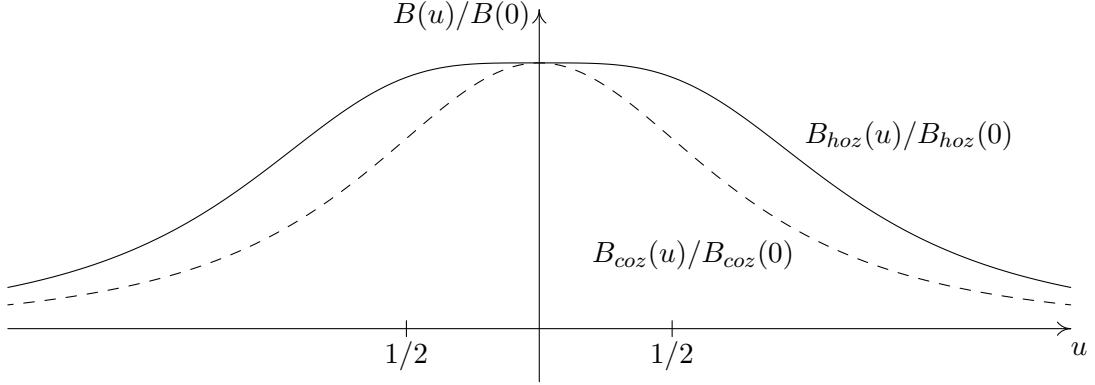
$$\vec{B}_{hoz}(0) = \frac{\mu_0 N I}{R} \frac{8}{5\sqrt{5}}$$

Donc

$$\vec{B}_{hoz} = \frac{5\sqrt{5}}{16} \vec{B}_{hoz}(0) \left(\frac{1}{(1 + (u + 1/2)^2)^{3/2}} + \frac{1}{(1 + (u - 1/2)^2)^{3/2}} \right)$$

La calculette étant autorisée, il faut l'utiliser pour effectuer le tracé (l'étude des fonctions n'est pas demandée). Les 2 fonctions à représenter sont :

$$f_1(u) = \frac{1}{(1 + u^2)^{3/2}} ; f_2(u) = \frac{5\sqrt{5}}{16} \left(\frac{1}{(1 + (u + 1/2)^2)^{3/2}} + \frac{1}{(1 + (u - 1/2)^2)^{3/2}} \right)$$



Au voisinage de $u = 0$, le champ varie très peu dans la configuration à 2 bobines.

4. Le plan $z = 0$ est un plan de symétrie de l'ensemble des 2 bobines. Donc en deux points M et M' symétriques par rapport à ce plan ($z' = -z$, soit $u' = -u$),

$$\vec{B}_{hoz}(u') = B_{hoz}(-u)\vec{u}_z = -\text{sym}_{Oxy}(\vec{B}_{hoz}(u)) = B_{hoz}(u)(-\text{sym}_{Oxy}\vec{u}_z) = B_{hoz}(u)\vec{u}_z$$

Par conséquent $B_{hoz}(-u) = B_{hoz}(u)$ et $g(-u) = g(u)$: la fonction g est paire. En utilisant le développement limité donné pour chacun des facteurs intervenant dans $g(u)$, on constate que les termes d'ordre impair se compensent. Il reste à l'ordre 4 :

$$g(u) = \frac{\mu_0 NI}{2R} \left(\frac{1}{(1 + (u + 1/2)^2)^{3/2}} + \frac{1}{(1 + (u - 1/2)^2)^{3/2}} \right) = \gamma \left(1 - \frac{144}{125}u^4 + o(u^4) \right)$$

soit :

$$\tilde{g}(u) = \gamma \left(1 - \frac{144}{125}u^4 \right)$$

5. $\tilde{g}(u)$ est extrême en $u = 0$. En valeur relative :

$$\frac{\tilde{g}(0) - \tilde{g}(u)}{\tilde{g}(0)} = \frac{144}{125}u^4$$

La variation relative est inférieure à 2% si $(144/125)u^4 \leq 0,02$, soit si :

$$|u| \leq \left(\frac{0,02 \cdot 125}{144} \right)^{1/4} = 0,363$$

$\tilde{g}(u)$ ne varie pas de plus de 2% sur l'intervalle $[-0,363; 0,363]$.

6.

- Le système est invariant par rotation autour de l'axe Oz , donc en coordonnées cylindriques d'axe Oz le champ magnétique est indépendant de la variable θ : $\vec{B} = \vec{B}(r, z)$;
- En tout point M , le plan méridien passant par M est plan d'antisymétrie du système de bobines. Donc $\vec{B}(M)$ appartient à ce plan, généré par M et les vecteurs $\vec{u}_z$ et $\vec{u}_r$; la composante orthoradiale du champ magnétique est par conséquent nulle : $B_{h\theta} = 0$;

Finalement, $\vec{B} = B_{hr}(r, z)\vec{u}_r + B_{hz}(r, z)\vec{u}_z$.

7. On considère la forme proposée par l'énoncé pour la composante axiale du champ :

$$B_{hz} = \tilde{g}(z) + \alpha r^2 \frac{d^2 \tilde{g}}{dz^2} + \beta(r)$$

Au voisinage de l'axe il n'y a aucune source de champ ($\vec{j} = 0$), donc les équations de Maxwell que doit vérifier le champ magnétique permanent s'écrivent :

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{B} &= \frac{1}{r} \frac{\partial(r B_{hr})}{\partial r} + \frac{\partial B_{hz}}{\partial z} = 0 \\ \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} &= \left(\frac{\partial B_{hr}}{\partial z} - \frac{\partial B_{hz}}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta = \vec{0} \end{aligned}$$

En reportant la forme de B_{hz} dans ces équations, et en utilisant l'expression de $\tilde{g}(z) = \gamma(1 - (144/125)(z/R)^4)$, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{r} \frac{\partial(r B_{hr})}{\partial r} + \frac{d\tilde{g}}{dz} + \alpha r^2 \frac{d^3 \tilde{g}}{dz^3} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r B_{hr})}{\partial r} - \gamma \frac{576}{125 R^4} (z^3 + 6\alpha r^2 z) \\ 0 &= \frac{\partial B_{hr}}{\partial z} - 2\alpha r \frac{d^2 \tilde{g}}{dz^2} - \frac{d\beta}{dr} = \frac{\partial B_{hr}}{\partial z} + \gamma \frac{576}{125 R^4} 6\alpha r z^2 - \frac{d\beta}{dr} \end{aligned}$$

Sur l'axe Oz , le champ est porté par l'axe, donc $B_{hr}(0, z) = 0$. On peut alors intégrer la première équation différentielle par rapport à r :

$$r B_{hr}(r, z) = \gamma \frac{576}{125 R^4} \left(\frac{z^3 r^2}{2} + \frac{3\alpha r^4 z}{2} \right)$$

soit

$$B_{hr}(r, z) = \gamma \frac{288}{125 R^4} (z^3 r + 3\alpha r^3 z)$$

En reportant cette expression dans la seconde équation différentielle, on obtient :

$$\gamma \frac{288}{125 R^4} (3z^2 r + 3\alpha r^3) + \gamma \frac{576}{125 R^4} 6\alpha r z^2 - \frac{d\beta}{dr} = \gamma \frac{288}{125 R^4} ((3 + 12\alpha)z^2 r + 3\alpha r^3) - \frac{d\beta}{dr} = 0$$

Comme β ne dépend que de r , il en va de même pour $d\beta/dr$. Les termes dépendant de z doivent s'annuler dans l'équation précédente, soit $\alpha = -1/4$. La fonction $\beta(r)$ vérifie alors l'équation différentielle :

$$\frac{d\beta}{dr} = \gamma \frac{288}{125 R^4} \frac{-3r^3}{4} = -\gamma \frac{216}{125 R^4} r^3$$

Sur l'axe Oz , $B_{hz}(0, z) = \tilde{g}(r)$, donc $\beta(0) = 0$, et la relation précédente s'intègre en :

$$\beta(r) = -\gamma \frac{54}{125} \left(\frac{r}{R}\right)^4$$

Finalement :

$$\alpha = -\frac{1}{4}; \beta(r) = -\gamma \frac{54}{125} \left(\frac{r}{R}\right)^4$$

On en déduit l'expression des composantes du champ :

$$B_{hz}(r, z) = \gamma \left(1 - \frac{144}{125} \left(\frac{z}{R}\right)^4 + \frac{432}{125} \frac{r^2 z^2}{R^4} - \frac{54}{125} \left(\frac{r}{R}\right)^4\right)$$

$$B_{hr}(r, z) = \gamma \frac{288}{125 R^4} \left(z^3 r - \frac{3}{4} r^3 z\right) = \gamma \frac{72}{125} \frac{(4z^3 r - 3r^3 z)}{R^4}$$

8. Le champ créé par le solénoïde a pour expression $B = \mu_0(N/\ell)I$, soit pour $B = 0,5$ T, $\ell = 8$ m et $I = 100$ A, $N = B\ell/(\mu_0 I) = 3,18.10^4$ spires. Le champ est uniforme dans la section du solénoïde, donc son rayon doit être $R = D/2 = 2$ m. La longueur de fil nécessaire vaut donc : $L = \pi N D = 4.10^5$ m = 400 km.

9. D'après la question 5, le champ sur l'axe est uniforme à 2% près sur l'intervalle $-0,363 \leq u = z/R \leq 0,363$, donc sur une longueur $H = 0,726R$. Dans l'application considérée, $H = 4$ m, donc $R = 5,51$ m.

Au voisinage de l'axe, $B \approx \gamma = 8N\mu_0 I/(5\sqrt{5}R)$, soit $N = 5\sqrt{5}BR/(8\mu_0 I) = 3,06.10^4$ spires de rayon $R = 5,51$ m par bobine, et une longueur totale de fil $L = 2N2\pi R = 4\pi NR = 2,12.10^6$ m : la solution la plus économique consiste à utiliser un solénoïde.

10. Pour le solénoïde, on calcule $R = L/(\sigma S) = 1,7$ k Ω puis $P = RI^2 = 17$ MW. Dans la pratique on utilise un bobinage supraconducteur.

I.B Champ linéaire : bobines de Mhotlzhel.

11. On reprend la démarche de la première partie ; seul change le signe de l'intensité dans la bobine 1, donc le sens du champ $\vec{B}_1$ et la distance $d + \sqrt{3}R/2$. Pour un point de l'axe d'abscisse z , les abscisses par rapport aux centres des deux spires sont $z_1 = z + \sqrt{3}R/2$ et $z_2 = z - \sqrt{3}R/2$, et les abscisses réduites associées $u_1 = u + \sqrt{3}/2$ et $u_2 = \sqrt{3}/2$:

$$\vec{B}_{moz}(u) = \vec{B}_{1,moz} + \vec{B}_{2,moz} = N\vec{B}_{coz}(0) \left(-\frac{1}{(1+u_1^2)^{3/2}} + \frac{1}{(1+u_2^2)^{3/2}} \right)$$

soit en exprimant u_1 et u_2 :

$$\vec{B}_{moz}(u) = \frac{\mu_0 NI}{2R} \vec{u}_z \left(-\frac{1}{(1+(u+\sqrt{3}/2)^2)^{3/2}} + \frac{1}{(1+(u-\sqrt{3}/2)^2)^{3/2}} \right)$$

12. Le développement limité à l'ordre 5 du champ magnétique précédente a pour expression :

$$\vec{B}_{moz}(u) = \frac{8\sqrt{7}\mu_0 NI}{49R} \vec{u}_z \left(\frac{6\sqrt{3}}{7}u - \frac{1056\sqrt{3}}{2401}u^5 + o(u^5) \right)$$

Les termes pairs se compensent car le plan $z = 0$ est un plan d'antisymétrie du système, et le choix de d permet d'annuler le terme d'ordre 3 en u . Par conséquent, au terme d'ordre 5 près, donc à une très bonne approximation si $|u|$ est suffisamment petit devant 1 soit au voisinage de l'origine, le champ magnétique est proche du champ linéaire :

$$\vec{B}_{moz}(u) = \frac{8\sqrt{7}\mu_0 NI}{49R} \vec{u}_z \frac{6\sqrt{3}}{7}u = \frac{48\sqrt{21}\mu_0 NI}{343R^2} z \vec{u}_z$$

13. L'erreur relative (comptée positivement) $(az - B_{moz}(z))/(az)$ entre le champ réel et le champ linéaire est due au terme d'ordre 5 du développement. Elle a pour expression :

$$\frac{az - B_{moz}(z)}{az} = \left(\frac{1056\sqrt{3}}{2401}u^5 \right) \left(\frac{7}{6\sqrt{3}u} \right) = \frac{176}{343}u^4$$

L'approximation est donc valable à moins de 2% d'erreur si $(176/343)u^4 \leq 0,02$, soit $|u| \leq 0,444$ et $-0,444R \leq z \leq 0,444R$: z doit être compris dans un intervalle de longueur $0,888R$ centré sur O .

14. La relation $a = (48\sqrt{21}\mu_0 NI)/(343R^2)$ donne :

$$N = \frac{343aR^2}{48\sqrt{21}\mu_0 I} = 1,24.10^4 \text{ spires}$$

II. L'EXPÉRIENCE DE STERN ET GERLACH

15. D'après les propriétés de cinétique des gaz monoatomiques (3 degrés de liberté) $E_{co} = 3/2kT$, soit

$$T = \frac{2E_{co}}{3k} = 773 \text{ K}$$

16. L'énergie potentielle s'écrit $E_p = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B} = -\vec{\mathcal{M}} \cdot (az\vec{e}_z) = -\mathcal{M}_z az$. La force associée s'écrit :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p = \mathcal{M}_z a \vec{e}_z$$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à un atome s'écrit, en négligeant la force de pesanteur :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \mathcal{M}_z a \vec{e}_z$$

soit en projection :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0; \frac{d^2y}{dt^2} = 0; \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\mathcal{M}_z a}{m}$$

Les atomes entrent dans la zone où règne le champ magnétique au point O avec une vitesse $v_0\vec{e}_x$, donc l'équation du mouvement s'intègre en :

$$x(t) = v_0 t; y(t) = 0; z(t) = \frac{\mathcal{M}_z a}{2m} t^2$$

Le mouvement se fait dans le plan Ozx , la trajectoire s'obtient en éliminant le temps entre $x(t)$ et $z(t)$:

$$z = \frac{\mathcal{M}_z a}{2m} t^2 = \frac{\mathcal{M}_z a}{2m} \left(\frac{x}{v_0} \right)^2 = \frac{\mathcal{M}_z a}{4E_{co}} x^2$$

17. Les atomes sortent de la région où règne le champ magnétique à la côte $z(\ell) = \mathcal{M}_z a \ell^2 / (4E_{co})$, et la pente de leur trajectoire par rapport à l'axe x vaut $(dz/dx)(\ell) = \mathcal{M}_z a \ell / (2E_{co})$.

Leur trajectoire est ensuite rectiligne, de pente égale à la pente précédente. Par conséquent, on peut écrire $(z_0 - z(\ell))/D = (dz/dx)(\ell)$, soit $z_0 = z(\ell) + D(dz/dx)(\ell)$:

$$z_0 = \frac{\mathcal{M}_z a \ell^2}{4E_{co}} + \frac{\mathcal{M}_z a \ell}{2E_{co}} D = \frac{\mathcal{M}_z a \ell}{2E_{co}} \left(D + \frac{\ell}{2} \right)$$

18. Les taches correspondent à des valeurs opposées de z_0 . Dans l'expression précédente, toutes les grandeurs sont positives sauf $\mathcal{M}_z$, dont le signe dépend du sens du vecteur $\vec{\mathcal{M}}$ par rapport à l'axe z . Par conséquent la projection selon $\vec{e}_z$ du moment magnétique du lithium peut prendre deux valeurs opposées $\pm \mathcal{M}_z$.

19. De la relation

$$z_0 = \frac{\mathcal{M}_z a \ell}{2E_{co}} \left(D + \frac{\ell}{2} \right)$$

on déduit

$$\mathcal{M}_z = \frac{2E_{co} z_0}{a \ell (D + \ell/2)} = 0,955 \cdot 10^{-23} \text{ A.m}^2$$

III. IDENTIFICATION DE PARTICULES DANS UNE CHAMBRE À PROJECTION TEMPORELLE

III.A Mouvement d'un électron d'ionisation dans la chambre de dérive.

20. La force électromagnétique subie par l'électron d'ionisation est $\vec{F}_{em} = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$. Le champ électrique est permanent et uniforme, il est relié à la différence de potentiel U par $U = \int -E \vec{e}_z \cdot d\vec{r} = EL$, donc $\vec{F}_{em} = eU/L \vec{e}_z + eB \vec{e}_z \wedge \vec{v}$. Le principe fondamental appliqué à un électron s'écrit :

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{eU}{L} \vec{e}_z + eB \vec{e}_z \wedge \vec{v} - \mu \vec{v}$$

soit en projection sur la base des coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= -\frac{\mu}{m_e} v_x - \frac{eB}{m_e} v_y = -\frac{v_x}{\tau} - \frac{eB}{m_e} v_y \\ \frac{dv_y}{dt} &= -\frac{\mu}{m_e} v_y + \frac{eB}{m_e} v_x = -\frac{v_y}{\tau} + \frac{eB}{m_e} v_x \\ \frac{dv_z}{dt} &= -\frac{\mu}{m_e} v_z + \frac{eU}{m_e L} = -\frac{v_z}{\tau} + \frac{eU}{m_e L} \end{aligned}$$

L'équation différentielle en v_z qui s'écrit

$$\frac{dv_z}{dt} + \frac{v_z}{\tau} = \frac{eU}{m_e L}$$

a pour solution générale :

$$v_z(t) = A \exp(-t/\tau) + \frac{eU\tau}{m_e L} = A \exp(-t/\tau) + \frac{eU}{\mu L}$$

En notant $v_{ez} = \vec{v}_e \cdot \vec{e}_z$ la composante selon $\vec{e}_z$ de la vitesse d'émission, on obtient :

$$v_z(t) = \left(v_{ez} - \frac{eU}{\mu L} \right) \exp(-t/\tau) + \frac{eU}{\mu L} = (v_{ez} - v_{\text{lim}}) \exp(-t/\tau) + v_{\text{lim}}$$

Cette vitesse tend vers la vitesse limite v_{lim} lorsque l'exponentielle tend vers 0 :

$$v_{\text{lim}} = \frac{eU}{\mu L}$$

21.

$$v_{\text{lim}} = \frac{eU}{\mu L} = 5.10^4 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\frac{|v_z(t) - v_{\text{lim}}|}{|v_{\text{lim}}|} = \frac{|v_{ez} - v_{\text{lim}}|}{|v_{\text{lim}}|} \exp(-t/\tau) \approx \exp(-t/\tau)$$

L'écart relatif est inférieur à 1% si $\exp(-t/\tau) \leq 10^{-2}$, soit $t \geq T = \tau \ln(10^2)$.

$\tau = m_e/\mu = 9,49.10^{-12}$ s, donc $T = 4,37.10^{-11}$ s.

22. En sommant l'équation différentielle vérifiée par v_x à celle vérifiée par v_y multipliée par le facteur i , on obtient l'équation différentielle vérifiée par $\underline{u}$:

$$\frac{d\underline{u}}{dt} = -\frac{\underline{u}}{\tau} + i\frac{eB}{m_e}\underline{u} = \left(i\omega_e - \frac{1}{\tau} \right) \underline{u}$$

La solution générale de cette équation s'écrit :

$$\underline{u}(t) = \underline{u}_0 \exp \left(\left(i\omega_e - \frac{1}{\tau} \right) t \right) = \underline{u}_0 \exp(-t/\tau) \exp(i\omega_e t)$$

à l'instant initial, $v_x = v_{ex}$ et $v_y = 0$, soit $\underline{u}_0 = v_{ex}$. Par conséquent :

$$\underline{u}(t) = v_x(t) + iv_y(t) = v_{ex} \exp(-t/\tau) \exp(i\omega_e t) = v_{ex} \exp(-t/\tau) (\cos(\omega_e t) + i \sin(\omega_e t))$$

d'où

$$v_x(t) = v_{ex} \exp(-t/\tau) \cos(\omega_e t); v_y(t) = v_{ex} \exp(-t/\tau) \sin(\omega_e t)$$

23. Les composantes v_x et v_y tendent exponentiellement vers 0 et la composante v_z vers v_{lim} avec la même constante de temps τ . Pour des temps supérieurs à $T \approx 4.10^{-11}$ s, la vitesse est égale à $v_{\text{lim}}\vec{e}_z$ à moins de 1% : le mouvement est alors rectiligne, uniforme.

Pendant la durée du transitoire le déplacement de l'électron selon z est approximativement $\Delta z \approx v_{\text{lim}}T = 2,2.10^{-6}$ m $\ll L$: on peut négliger la distance parcourue durant le régime transitoire. Si l'électron est émis au point de coordonnée z comptée sur le schéma depuis l'extrémité droite de la chambre de dérive, il parcourt dans la chambre de dérive la distance $L - z$ selon $\vec{e}_z$ en négligeant le déplacement durant le transitoire. La durée de ce mouvement est $\Delta t = (L - z)/v_{\text{lim}}$. Sa mesure permet de déterminer $L - z$ donc z .

III.B étude des chambres proportionnelle et à fils.

24. L'énergie d'un électron de charge $-e$ dans le potentiel électrostatique V est $E = -eV$. La traversée de la chambre proportionnelle sous la différence de potentiel U' par un électron se traduit par une variation d'énergie $|\Delta E| = eU'$, dont la moitié permet d'ioniser des atomes d'argon. L'ionisation d'un atome nécessite une énergie E_i/N_A . Par conséquent le nombre d'ionisations produites par un électron a pour expression :

$$N = \frac{eU'/2}{E_i/N_A} = \frac{N_A eU'}{2E_i} = 47$$

25.

- D'après l'invariance par translation le long de l'axe Oz du fil et par rotation autour de cet axe, le champ électrostatique ne dépend que de la variable r en coordonnées cartésiennes ;
- En un point M quelconque, le plan méridien $\{M, \vec{e}_r, \vec{e}_z\}$ et le plan de section droite $\{M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta\}$ passant par M sont des plans de symétrie de la distribution de charges, donc le champ électrique $\vec{E}_f(M)$, qui appartient à l'intersection de ces 2 plans, est orthoradial : $\vec{E}_f(M) = E_f(r)\vec{e}_r$.

L'application du théorème de Gauss $\Phi = Q_{int}/\varepsilon_0$ à un cylindre d'axe Oz , de rayon $r > a$, de longueur ℓ , fermé par 2 disques d'axe Oz , englobant la longueur ℓ du fil, donne successivement :

- pour le flux, en décomposant la surface de Gauss :

$$\Phi(r) = \iint \vec{E}_f \cdot d\vec{S} = \iint_{cylindre} E_f(r)\vec{e}_r \cdot dS\vec{e}_r + \iint_{disques} E_f(r)\vec{e}_r \cdot dS(\pm\vec{e}_z) = 2\pi r\ell E_f(r)$$

- La charge contenue à l'intérieur de cette surface est la charge de la longueur ℓ de fil : $Q_{int} = \lambda\ell = q\ell/h$.

Par conséquent $2\pi r\ell E_f(r) = (q\ell/h)/\varepsilon_0$, soit

$$E_f(r > a) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 h r} \vec{e}_r$$

Comme $\vec{E}_f(r)$, le potentiel électrostatique ne dépend que de r . La relation $\vec{E}_f = -\text{grad}V(r)$ donne $dV/dr = -q/(2\pi\varepsilon_0 h r)$, qui s'intègre en :

$$V(r) - V(r_0) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 h} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right)$$

où $V(r_0)$ est un potentiel de référence à une distance de référence car le potentiel est défini à une constante près.

26. D'après le théorème de superposition, le potentiel pour le système de 2 fils s'écrit, en prenant comme référence de potentiel le milieu des 2 axes ($r_{01} = r_{02} = d/2$) et en notant $V_0 = V_{01} + V_{02}$:

$$V(M) = V_1(M) + V_2(M) = V_0 + \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 h} \ln\left(\frac{d}{2r_1}\right) - \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 h} \ln\left(\frac{d}{2r_2}\right) = V_0 + \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 h} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

Le potentiel est choisi nul lorsque $r_1 = r_2$, donc $V_0 = 0$ et

$$V(M) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 h} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

Pour le fil 1, $r_1 = a$ et $r_2 = d - a$, donc $V_1 = q/(2\pi\epsilon_0 h) \ln((d - a)/a)$. Pour le fil 2, $r_1 = d - a$ et $r_2 = a$, et $V_2 = -V_1$. La différence de potentiel entre les 2 fils a pour expression :

$$U_{12} = V_1 - V_2 = 2V_1 = \frac{q}{\pi\epsilon_0 h} \ln\left(\frac{d - a}{a}\right)$$

La définition de la capacité $C = q/U_{12}$ où q est la charge portée par la longueur h du fil 1 donne alors :

$$C = \frac{\pi\epsilon_0 h}{\ln\left(\frac{d-a}{a}\right)} = 4,0 \cdot 10^{-14} \text{ F}$$

27. En régime permanent, $i = 0$, donc $u_r = 0$ et $W = u_C = q_0/C$, soit

$$q_0 = CW = 4,0 \cdot 10^{-14} \text{ C}$$

L'avalanche est constituée de 10^5 électrons soit une charge $-10^5 e = -1,6 \cdot 10^{-14} \text{ C}$ qui arrive sur l'armature positive, dont la charge devient $q_1 = q_0 - 10^5 e = 2,4 \cdot 10^{-14} \text{ C}$. L'armature opposée capte les ions Ar^+ formés lors de l'ionisation

Si on néglige le temps τ' , on peut considérer qu'à tout instant les charges des 2 armatures sont opposées. L'équation électrique du circuit s'écrit $u_c + u_r = W$, soit $q/C + R dq/dt = W$. En dérivant cette équation par rapport au temps : $i/C + R di/dt = u_r/(RC) + du_r/dt = 0$:

$$\frac{du_r}{dt} + \frac{u_r}{RC} = 0$$

Cette équation différentielle admet pour solution $u_r(t) = A \exp(-t/RC)$. À l'instant initial, $q = q_1$, donc $u_r(0) = W - u_c(0) = (q_0 - q_1)/C$:

$$u_r(t) = \frac{q_0 - q_1}{C} \exp\left(\frac{-t}{RC}\right)$$

28. Le calcul précédent suppose $\tau' \ll RC$, soit $R \gg \tau'/C = 25 \Omega$.

La tension u_r est proportionnelle (au signe près) à la variation de charge $q_0 - q_1 = Ne$ du fil qui reçoit l'avalanche, donc au nombre d'électrons reçus N , d'où l'intérêt de provoquer une avalanche. Pour $N = 10^5$, $u_r(0) = Ne/C = 0,4 \text{ V}$, d'où un signal qui paraît raisonnablement mesurable.

Dans la chambre de dérive le mouvement se fait selon Oz . On peut donc considérer que l'avalanche est créée en un point dont les coordonnées x et y sont celles du point où l'électron d'ionisation est généré dans la chambre de dérive. Si on place une grille formée de fils indépendants dirigés selon x et y , on peut déterminer les fils au voisinage desquels l'avalanche a été produite, et donc les coordonnées x et y . La résolution est de l'ordre de grandeur de la distance entre fils successifs.