

Partie A : OPTIQUE

1 FOCOMETRIE

1.1 Lentille convergente : (L_1) de centre O_1 et de distance focale f'_1

1.1.1 Méthode d'autocollimation

1.1.1.1 La méthode d'autocollimation nécessite une lentille (L_1), une source lumineuse et un miroir plan (M). L'objectif de la méthode est de placer l'image de la source par le système ($L_1 + M$) dans le même plan que la source. Quand ceci est réalisé, la distance entre la source et la lentille (L_1) est égale à la distance focale de la lentille.

1.1.1.2 Comme $f'_1 = \overline{AO_1}$, on a donc $f'_1 = 20,2 \text{ cm}$ et $\Delta f'_1 = 0,5 \text{ cm}$

1.1.2 Formule de conjugaison de Descartes

1.1.2.1 D'après la formule de conjugaison de Descartes $-\frac{1}{\overline{O_1A}} + \frac{1}{\overline{O_1A'}} = \frac{1}{f'_1}$, on a donc

$$f'_1 = \frac{\overline{O_1A} \cdot \overline{O_1A'}}{\overline{O_1A} - \overline{O_1A'}}. \text{ A.N. } f'_1 = 20,0 \text{ cm}.$$

1.1.2.2 On a donc $\Delta f'_1 = \left(\frac{\overline{O_1A'}}{\overline{O_1A} - \overline{O_1A'}} \right)^2 \Delta(\overline{O_1A}) + \left(\frac{\overline{O_1A}}{\overline{O_1A} - \overline{O_1A'}} \right)^2 \Delta(\overline{O_1A'})$. A.N. $\Delta f'_1 = 0,3 \text{ cm}$

1.1.3 Méthode de Bessel

1.1.3.1 On a donc $D = \overline{AA'} = -\overline{O_1A} + \overline{O_1A'} = -p + \overline{O_1A'}$ et $\overline{O_1A'} = D + p$. La formule de conjugaison de Descartes s'écrit alors $-\frac{1}{p} + \frac{1}{D+p} = \frac{1}{f'_1}$, d'où $f'_1(-(D+p)+p) = p(D+p)$. Ce qui donne $p^2 + Dp + Df'_1 = 0$ Si $D^2 - 4Df'_1 > 0$ il y a alors deux positions possibles pour

l'objet. Donc si $D > D_{\min} = 4f'_1$ alors il y a alors deux positions $p_1 = \frac{-D - \sqrt{D^2 - 4Df'_1}}{2}$ et $p_2 = \frac{-D + \sqrt{D^2 - 4Df'_1}}{2}$ pour la position de l'objet.

1.1.3.2 On a donc $d = p_2 - p_1 = \sqrt{D^2 - 4Df'_1}$ d'où $f'_1 = \frac{D^2 - d^2}{4D}$

1.1.3.3 On a donc $\Delta f'_1 = \left(\frac{1}{4} + \frac{d^2}{4D^2} \right) \Delta D + \frac{d}{2D} \Delta d$

1.1.3.4 A.N. $f'_1 = 20,0 \text{ cm}$ et $\Delta f'_1 = 0,4 \text{ cm}$

1.1.4 Méthode de Silbermann

1.1.4.1 Comme le grandissement vaut -1 , $\frac{A'B'}{AB} = \frac{\overline{O_1A'}}{\overline{O_1A}} = -1$ donc $\overline{O_1A'} = -p$. La formule de conjugaison de Descartes s'écrit alors $-\frac{1}{p} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'_1}$, et donc $p = -2f'_1$. Comme $\overline{O_1A'} = D_0 + p$, on obtient $D_0 = -2p$ et $D_0 = 4f'_1$.

1.1.4.2 On a donc $f'_1 = 20,1 \text{ cm}$ et $\Delta f'_1 = \frac{\Delta D}{4}$ d'où $\Delta f'_1 = 0,1 \text{ cm}$

1.1.4.3 La méthode de Silbermann correspond au cas où les deux solutions de la méthode de Bessel sont confondues. Le discriminant $D^2 - 4Df'_1$ est alors nul et donc $D_0 = 4f'_1$.

1.1.5 Comparaison des méthodes

La plus rapide à mettre en œuvre est la méthode d'autocollimation et d'après les résultats précédents la plus précise semble être la méthode de Silbermann.

1.2 Lentille divergente : (L_2) de centre O_2 et de distance focale f'_2

1.2.1 Théorème des vergences (formules des opticiens)

1.2.1.1 Comme l'image d'un objet réel est une image réelle, le système optique est équivalent à une lentille convergente. D'après le texte, la méthode utilisée est celle de Silbermann. On a donc $f'_2 = \frac{\overline{AA'}}{4}$ et donc $V = \frac{4}{\overline{AA'}}$. A.N. $V = 4,0 \text{ m}^{-1}$

1.2.1.2 Comme $V = V_0 + V_2$, $V_2 = V - V_0$. A.N. $V_2 = -4,0 \text{ m}^{-1}$ et $f'_2 = -25,0 \text{ cm}$

1.2.1.3 Dans ce cas $V = V_0 + V_2(1 - eV_0)$ d'où $V_2 = \frac{V - V_0}{1 - eV_0}$.

A.N. $V_2 = -4,2 \text{ m}^{-1}$ et $f'_2 = -24,0 \text{ cm}$

1.2.2 Viseur à frontale fixe

1.2.2.1 On a donc $\overline{O_2A} = -x$ et $\overline{AA'} = D$, donc $\overline{O_2A'} = D - x$. La relation de conjugaison de Descartes s'écrit $-\frac{1}{O_2A} + \frac{1}{O_2A'} = \frac{1}{f'_2}$, donc $\frac{1}{x} + \frac{1}{D-x} = \frac{1}{f'_2}$ et donc $f'_2 = \frac{x(D-x)}{D}$

1.2.2.2 $f'_2 = -24,5 \text{ cm}$

1.2.3 Méthode de Badal

1.2.3.1 On a donc $\overline{F_0A_1} = f'_2$ et $\overline{F_0'A'} = D$ (A_1 est le conjugué de A' par (L_0)). La relation de conjugaison de Newton s'écrit alors: $\overline{F_0A_1} \cdot \overline{F_0'A'} = f'_2 D = -f_0'^2$ donc $f'_2 = -\frac{f_0'^2}{D}$

1.2.3.2 A.N. $f'_2 = -24,0 \text{ cm}$

2 LUNETTE ASTRONOMIQUE ACHROMATIQUE

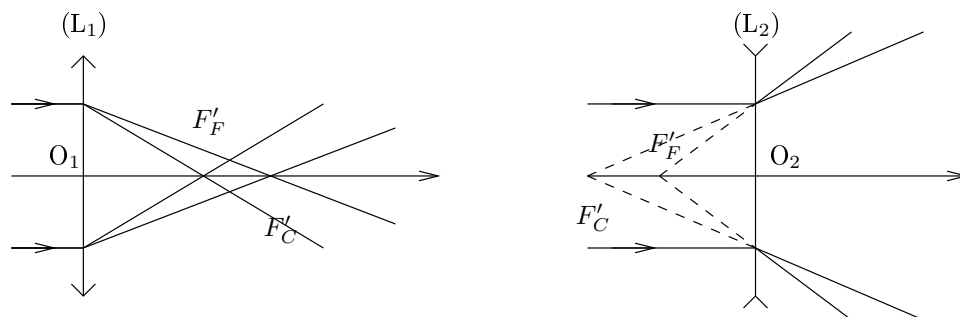
2.1 Constringence, pouvoir dispersif et distance focale d'une lentille d'un verre crown

2.1.1 D'après la loi empirique de Cauchy on trouve: $n_F = 1,530$, $n_D = 1,525$, $n_C = 1,523$. On a alors $\nu = 78,5$ et $K = 1,27 \cdot 10^{-2}$.

2.1.2 Comme $R_1 = +90 \text{ cm}$ et $R_2 = -150 \text{ cm}$, à l'aide de la relation donnée, on trouve pour la raie D, $f'_D = 107 \text{ cm}$

2.2 Aberrations chromatiques principales des lentilles minces

2.2.1 Pour la lentille (L_1) , comme $n_F > n_C$ et la lentille convergente, $V_F > V_C$ et $f'_F < f'_C$, d'où la position des foyers sur la figure. Par contre, pour la lentille (L_2) , comme $n_F > n_C$ et la lentille divergente, $V_F < V_C$ et $f'_F > f'_C$. Ensuite, le faisceau incident étant parallèle à l'axe optique, il ressort en passant par les foyers images.



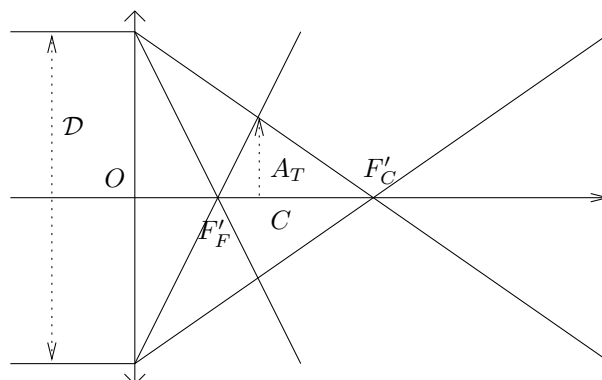
2.2.2 Aberrations chromatiques longitudinale et transversale

2.2.2.1 Pour l'aberration chromatique longitudinale on a: $\overline{A_L} = \overline{F'_F F'_C} = -\overline{OF'_F} + \overline{OF'_C} = -\frac{1}{V_F} + \frac{1}{V_C} = \frac{V_F - V_C}{V_F V_C} = \frac{V_F - V_C}{V_D^2}$, car on suppose que $f'_F f'_C = f_D'^2$. Or $\frac{V_F - V_C}{V_D} = \frac{(n_F - 1) - (n_C - 1)}{n_D - 1} = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1} = \frac{1}{\nu}$. On a donc $A_L = \frac{f_D'}{\nu}$.

$\frac{A_L}{f_D'}$ augmente avec le pouvoir dispersif.

A.N. $A_L = 1,36 \text{ cm}$

2.2.2.2 Pour l'aberration chromatique transversale, en utilisant les notations du schéma ci-dessous, on a: $\frac{2A_T}{D} = \frac{F'_C C}{F'_C O} = -\frac{F'_F C}{F'_F O}$. (Relations dans les triangles semblables).



On a donc : $\frac{\overline{F'_C C}}{-f'_C} = \frac{\overline{F'_F C}}{f'_F} = \frac{\overline{F'_F F'_C + F'_C C}}{f'_F}$, d'où $\overline{F'_C C} \left(-\frac{1}{f'_C} - \frac{1}{f'_F} \right) = \frac{\overline{F'_F F'_C}}{f'_F} = \frac{A_L}{f'_F}$ et $-\overline{F'_C C} \frac{f'_F + f'_C}{f'_F f'_C} = \frac{A_L}{f'_F}$. Comme on suppose que $f'_F + f'_C = \frac{f'_D}{2}$, on obtient : $-\frac{\overline{F'_C C}}{f'_C} = \frac{2A_L}{f'_D} = \frac{2f'_D}{f'_D \nu} = \frac{2}{\nu}$ en tenant compte du résultat précédent. On a alors $\frac{2A_T}{D} = \frac{2}{\nu}$ et donc $A_T = \frac{D}{\nu}$. $\frac{A_T}{D}$ augmente avec le pouvoir dispersif.

A.N. $A_T = 0,10 \text{ cm}$

2.3 Objectif achromatique

2.3.1 Les vergences des lentilles (L_1) et (L_2) sont donc : $V_1 = \left(A_1 - 1 + \frac{B_1}{\lambda^2} \right) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$ et

$$V_2 = \left(A_2 - 1 + \frac{B_2}{\lambda^2} \right) \frac{1}{R_2}.$$

On a donc $V = \left(A_1 - 1 + \frac{B_1}{\lambda^2} \right) \frac{1}{R_1} + \left(A_2 - 1 + \frac{B_2 - B_1}{\lambda^2} \right) \frac{1}{R_2}$.

2.3.2 On a donc $\frac{\partial V}{\partial \lambda} = -2 \frac{B_1}{\lambda^3} \frac{1}{R_1} - 2 \frac{B_2 - B_1}{\lambda^3} \frac{1}{R_2}$. Si l'on veut supprimer l'aberration chromatique il faut que $\frac{\partial V}{\partial \lambda} = 0$. On doit donc avoir $\frac{B_1}{R_1} + \frac{B_2 - B_1}{R_2} = 0$, ce qui conduit à $V = \frac{A_1 - 1}{R_1} + \frac{A_2 - A_1}{R_2}$.

2.3.3 On a donc $B_2 = B_1 \frac{R_1 - R_2}{R_1}$. A.N. $B_1 = 9,3 \cdot 10^3 \text{ nm}^2$ et $A_2 = R_2 \left(V - \frac{A_1 - 1}{R_1} + \frac{A_1}{R_2} \right)$. A.N. $A_1 = 1,623$

2.4 Oculaire achromatique

2.4.1 Les vergences des lentilles ($\mathcal{L}_1$) et ($\mathcal{L}_2$) sont donc : $V'_1 = \left(A_2 - 1 + \frac{B_2}{\lambda^2} \right) \frac{2}{R'_1}$ et

$$V'_2 = \left(A_2 - 1 + \frac{B_2}{\lambda^2} \right) \frac{2}{R'_2}.$$

Pour la vergence du système, on a alors

$$V' = \left(A_2 - 1 + \frac{B_2}{\lambda^2} \right) \left(\frac{2}{R'_1} + \frac{2}{R'_2} \right) - d' \left(A_2 - 1 + \frac{B_2}{\lambda^2} \right)^2 \frac{4}{R'_1 R'_2}.$$

2.4.2 On a donc $\frac{\partial V'}{\partial \lambda} = -2 \frac{B_2}{\lambda^3} \left(\frac{2}{R'_1} + \frac{2}{R'_2} \right) + 4d' (n_2 - 1) \frac{B_2}{\lambda^3} \frac{4}{R'_1 R'_2} = \frac{(n_2 - 1) B_2}{R'_1 R'_2 \lambda^3} \left(-4 \frac{R'_1 + R'_2}{n_2 - 1} + 16d' \right)$. Or $\frac{R'_1}{n_2 - 1} = 2f'_1$ et $\frac{R'_2}{n_2 - 1} = 2f'_2$, d'où $\frac{\partial V'}{\partial \lambda} = \frac{-8(n_2 - 1) B_2}{R'_1 R'_2 \lambda^3} (f'_1 + f'_2 - 2d')$. On a donc $k_1 = -8$ et $k_2 = -2$.

2.4.3 Si $R'_1 = 3R'_2$ alors $f'_1 = 3f'_2$. Si on veut éliminer l'aberration chromatique, alors, il faut que

$$\frac{\partial V'}{\partial \lambda} = 0 \text{ i.e. } f'_1 + f'_2 - 2d' = 0 \text{ d'où } 4f'_2 = 2d' \text{ et donc } f'_2 = \frac{d'}{2}.$$

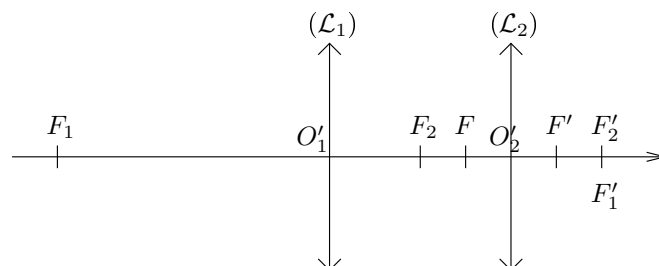
2.4.4 La formule de Gullstrand s'écrit alors : $V' = \frac{V'_1}{3} + V'_2 - d' \frac{1}{3V'_2} = \frac{2}{3d'} + \frac{2}{d'} - d' \frac{2}{3d'} \frac{2}{d'} = \frac{4}{3d'}$ et donc $d' = \frac{4}{3V'}$. A.N. $d' = 1,78 \text{ cm}$

2.4.5

2.4.5.1 Comme F est le conjugué de F_2 par ($\mathcal{L}_1$), $\overline{F_1 F} \cdot \overline{F_1 F_2} = -f_1'^2$. Or $\overline{F_1 F_2} = \overline{F_1 O_1} + \overline{O_1 O_2} + \overline{O_2 F_2} = -f'_1 + d' - f'_2$ et donc $\overline{F_1 F} = \frac{-f_1'^2}{-f'_1 + d' - f'_2}$. Comme $f'_1 = 3f'_2 = \frac{3d'}{2}$, on obtient $\overline{F_1 F} = \frac{9}{4} d'$.

De même, comme F' est le conjugué de F'_1 par ($\mathcal{L}_2$), $\overline{F_2 F'_1 F_2 F'} = -f_2'^2$ et $\overline{F_2 F'} = \frac{-f_2'^2}{+f'_1 - d' + f'_2}$, d'où $\overline{F'_2 F'} = -\frac{1}{4} d'$.

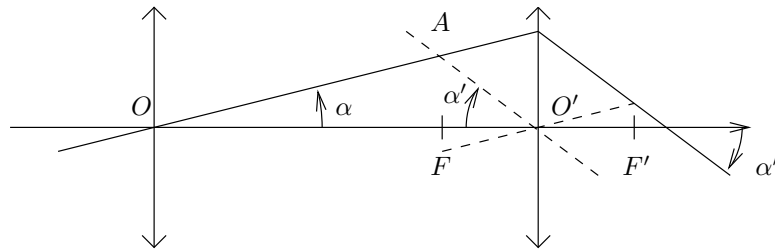
2.4.5.2 On a donc la figure suivante :



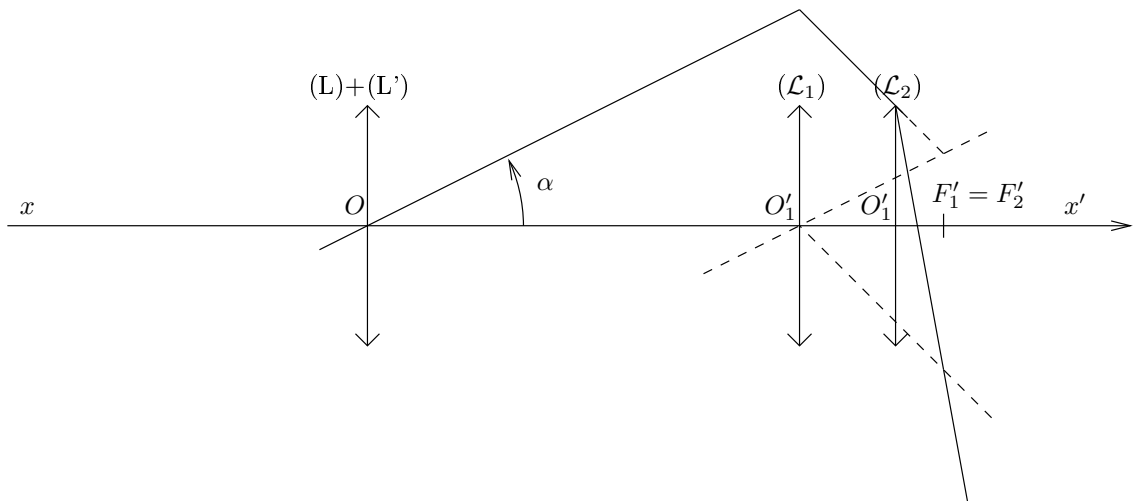
2.5 Lunette achromatique

2.5.1 Comme on construit une lunette astronomique, le foyer image de l'objectif est confondu avec le foyer objet de l'oculaire. D'après la figure ci-dessous : on a $\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{FA}{O'F} \frac{OF}{FA} = -\frac{f}{f'} = -\frac{V'}{V}$ A.N.

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = -150$$



2.5.2 On a donc la figure suivante :



Partie B : ÉLECTROMAGNÉTISME

1 DÉFINITIONS

1.1 Loi de Biot-Savart

1.1.1 Le champ $d\vec{B}(M)$ créé en M par l'élément $d\vec{l}$ du courant d'intensité I pris autour de P est

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{4\pi \|\vec{PM}\|^3}$$

1.1.2 Le champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé en M par le circuit filiforme (C) est alors :

$$\vec{B}(M) = \int_{(C)} d\vec{B}(M)$$

1.1.3 La loi de Biot-Savart est valable dans l'ARQS.

1.2 Théorème d'Ampère

1.2.1 Le théorème d'Ampère s'énonce ainsi : la circulation du vecteur $\vec{B}$ le long d'un contour (C) fermé et orienté est égale à la somme des courants enlacés par (C) multipliés par μ_0 , soit

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{enl}$$

Dans le cas de la figure 2', on a $\sum I_{enl} = -I_1 + I_2 + I_3 - I_4$ et donc

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (-I_1 + I_2 + I_3 - I_4)$$

1.2.2 La forme locale du théorème d'Ampère est l'équation de Maxwell-Ampère : $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ en statique ($\vec{j}$ est le vecteur densité de courant volumique).

2 CHAMP MAGNÉTIQUE $\vec{B}$ ET POTENTIEL VECTEUR $\vec{A}$

2.1 Relations : $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \wedge \vec{r}$, $\text{div } \vec{A}$

2.1.1 Par définition du potentiel vecteur $\vec{A}$, $\text{rot } \vec{A} = \vec{B}$. On calcule donc $\text{rot } \vec{A}$ à l'aide du formulaire de l'énoncé : $\text{rot } \vec{A} = \text{rot } \left(\frac{1}{2}\vec{B} \wedge \vec{r} \right) = \frac{1}{2} \left(\vec{B} \text{div } \vec{r} - \vec{r} \text{div } \vec{B} + (\vec{r} \cdot \text{grad}) \vec{B} - (\vec{B} \cdot \text{grad}) \vec{r} \right)$. $\vec{B}$ étant uniforme $\text{div } \vec{B} = 0$ et $(\vec{r} \cdot \text{grad}) \vec{B} = 0$. De plus $\text{div } \vec{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho \cdot \rho}{\partial \rho} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$ et $(\vec{B} \cdot \text{grad}) \vec{r} = \vec{B}$. On a donc $\text{rot } \vec{A} = \frac{1}{2}(3\vec{B} - \vec{B}) = \vec{B}$. cqfd.

2.1.2 Comme $\vec{B}$ est uniforme $\text{rot } \vec{B} = 0$ et $\text{rot } \vec{r} = 0$. On a donc $\text{div } \vec{A} = \frac{1}{2} \text{div } (\vec{B} \wedge \vec{r}) = \frac{1}{2} (\vec{r} \cdot \text{rot } \vec{B} - \vec{B} \cdot \text{rot } \vec{r})$ et donc $\boxed{\text{div } \vec{A} = 0}$.

2.2 Courant rectiligne

2.2.1 Tous les plans contenant l'axe du cylindre sont des plans de symétries pour la distribution de courant.

Tous les plans perpendiculaires à l'axe du cylindre sont des plans d'antisymétries pour la distribution de courant.

Un point M de l'espace appartient à un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre et un plan contenant l'axe du cylindre. Le vecteur $\vec{B}$ étant perpendiculaire au plan de symétrie et contenu dans les plans d'antisymétrie, le vecteur $\vec{B}$ est donc porté par le vecteur $\vec{e}_\theta$.

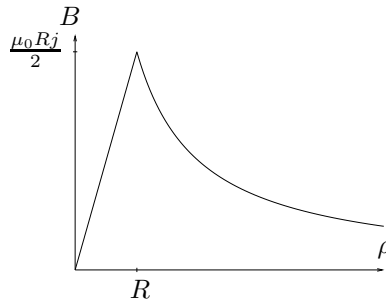
Le vecteur $\vec{A}$ étant perpendiculaire au plan d'antisymétrie et contenu dans les plans de symétrie, le vecteur $\vec{A}$ est donc porté par le vecteur $\vec{e}_z$.

La distribution de courant étant invariante par translation suivant l'axe du cylindre et par rotation autour de l'axe du cylindre, les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ ne dépendent ni de z , ni de ρ .

2.2.2 Considérons un cercle (C) de rayon ρ et d'axe $z'z$ et orienté dans le sens trigonométrique, la circulation de $\vec{B}$ sur ce cercle est : $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi\rho B(\rho)$.

Si $\rho < R$, alors $I_{\text{enl}} = \int_{(\Sigma)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \pi\rho^2 j$, (Σ) étant la surface définie et orientée par le cercle (C) . On a alors $\boxed{\text{si } \rho < R \text{ alors } \vec{B}_{\text{int}} = \frac{\mu_0 \rho j}{2} \vec{e}_\theta}$.

Si $\rho > R$, alors $I_{\text{enl}} = \int_{(\Sigma)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \pi R^2 j$. On a alors $\boxed{\text{si } \rho > R \text{ alors } \vec{B}_{\text{ext}} = \frac{\mu_0 R^2 j}{2\rho} \vec{e}_\theta}$.

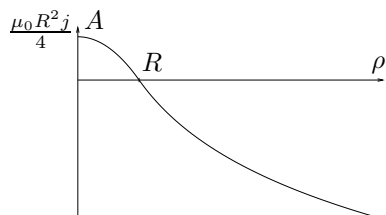


2.2.3 Comme $\vec{A}$ est porté par $\vec{e}_z$ et ne dépend que de ρ , $\text{rot } \vec{A} = -\frac{dA}{d\rho} \vec{e}_\theta$.

On a donc, pour $\rho < R$, $-\frac{dA_{\text{int}}}{d\rho} = \frac{\mu_0 \rho j}{2}$, donc $A_{\text{int}} = -\frac{\mu_0 \rho^2 j}{4} + \text{cste}$. Comme $A(R) = 0$, on obtient : $\boxed{\vec{A}_{\text{int}} = -\frac{\mu_0 (\rho^2 - R^2) j}{4} \vec{e}_z}$

Pour $\rho > R$, $-\frac{dA_{\text{ext}}}{d\rho} = \frac{\mu_0 R^2 j}{2\rho}$, donc $A_{\text{ext}} = -\frac{\mu_0 R^2 j}{2} \ln \rho + \text{cste}$. Comme $A(R) = 0$, on obtient :

$$\boxed{\vec{A}_{\text{ext}} = -\frac{\mu_0 R^2 j}{2} \ln \frac{\rho}{R} \vec{e}_z}$$



2.2.4 Dans ce cas le champ $\vec{B}$ n'étant pas uniforme, $\vec{A}$ ne peut se calculer à partir de la formule du 2.1.

2.3 Courant circulaire

2.3.1

2.3.1.1 Tous les plans contenant l'axe de la spire sont des plans d'antisymétrie pour la distribution de courant. Le plan contenant la spire est un plan de symétrie pour la distribution de courant.

En un point M_0 de l'axe $z'Oz$, le vecteur $\vec{B}$ est donc portée par $\vec{e}_z$ et $\vec{B}(z) = \vec{B}(-z)$.

Par contre, en un point M_0 de l'axe $z'Oz$, le vecteur $\vec{A}$ est nul car, il doit être perpendiculaire aux plans d'antisymétrie.

2.3.1.2 D'après le 1.1.1 $d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \wedge \vec{PM}_0}{4\pi \|\vec{PM}_0\|^3}$. Seule la composante de $\vec{B}$ suivant $\vec{e}_z$ est non nulle, on calcule donc $dB_z = d\vec{B} \cdot \vec{e}_z = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \wedge \vec{PM}_0}{4\pi \|\vec{PM}_0\|^3} \cdot \vec{e}_z$. Or $(d\vec{l} \wedge \vec{PM}_0) \cdot \vec{e}_z = \|\vec{PM}_0\| d\theta \sin \alpha$ avec θ un angle qui repère P sur le cercle. On a donc $dB_z = \frac{\mu_0 I a \sin \alpha d\theta}{4\pi \|\vec{PM}_0\|^2}$. On a alors $B_z = \frac{\mu_0 I a \sin \alpha}{4\pi \|\vec{PM}_0\|^2} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\mu_0 I a \sin \alpha}{2 \|\vec{PM}_0\|}$. Comme $\|\vec{PM}_0\| = \frac{a}{\sin \alpha}$, on obtient :

$$\boxed{\vec{B}(M_0) = B(0)f(\alpha) \text{ avec } B(0) = \frac{\mu_0 I}{2a} \text{ et } f(\alpha) = \sin^3 \alpha}$$

2.3.1.3 Le potentiel vecteur $d\vec{A}$ est : $d\vec{A} = \frac{\mu_0 I d\vec{l}}{4\pi \|\vec{PM}_0\|} = \frac{\mu_0 I a d\theta}{4\pi \|\vec{PM}_0\|} \vec{e}_\theta$. Le champ $d\vec{A}$ créé en M_0 par deux points diamétralement opposés sur la spire ont des contributions opposées ; leur résultante est donc nulle et par conséquent $\boxed{\vec{A} = 0}$ ce qui est conforme à l'étude menée en 2.3.1.1.

2.3.2

2.3.2.1 Le courant qui parcourt une épaisseur dz du solénoïde est : $dI = nI dz$. Le champ créé par cet élément du solénoïde est le même que celui créé par une spire parcourue par un courant dI , i.e. $\boxed{d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 n I}{2a} \sin^3 \alpha dz \vec{e}_z}$.

2.3.2.2 Comme $z = \frac{a}{\tan \alpha}$, $dz = \frac{a}{\sin^2 \alpha} d\alpha$, on a donc $B(M) = \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \frac{\mu_0 n I}{2} \sin \alpha d\alpha \vec{e}_z$ et

$$\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \vec{e}_z}$$

2.3.3

2.3.3.1 Si le solénoïde est très long alors $\alpha_1 \rightarrow 0$ et $\alpha_2 \rightarrow \pi$. On obtient donc $\boxed{\vec{B}(M) = \mu_0 n I}$.

2.3.3.2 Pour le solénoïde infini, tous les plans perpendiculaires à l'axe sont des plans de symétrie et tous les plans qui contiennent l'axe sont des plans d'antisymétrie. En tout point M de l'espace le champ $\vec{B}$ est donc porté par le vecteur $\vec{e}_z$. Le système étant invariant par translation suivant l'axe et par rotation autour de l'axe, $\vec{B}$ ne dépend que de ρ .

Le contour n'enlaçant aucun courant $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$. Or $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = (B(\rho) - B(0))l$. Donc $\vec{B}_{\text{int}}$ est uniforme et vaut $\vec{B}_{\text{int}} = \mu_0 n I$.

2.3.3.3 Dans ce cas $\sum I_{\text{enl}} = nIl$ et $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = (B(\rho) - B(0))l$. On a donc $B(\rho) = B(0) - \mu_0 n I = 0$. On donc $\boxed{\vec{B}_{\text{ext}} = 0}$.

2.3.3.4 Comme $\vec{\text{rot}} \vec{A} = \vec{B}$, $\oint_{(C)} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{(\Sigma)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$, où (Σ) est une surface s'appuyant sur le contour fermé et orienté (C) et orienté par ce contour. À cause des symétries et des invariants de la distribution de courant, $\vec{A}$ est porté par $\vec{e}_\theta$ et ne dépend que de ρ . En prenant comme contour (C) un cercle d'axe $z'Oz$ de rayon ρ et orienté dans le sens trigonométrique, on obtient $2\pi\rho A_{\text{int}} = \pi\rho^2 B(0)$ et donc $\boxed{\vec{A}_{\text{int}} = \frac{\mu_0 n I \rho}{2} \vec{e}_\theta}$ pour un point intérieur au solénoïde.

Pour un point extérieur au solénoïde, on a $\boxed{\vec{A}_{\text{ext}} = \frac{\mu_0 n I a^2}{2\rho} \vec{e}_\theta}$

2.3.3.5 Pour un point intérieur au solénoïde, $\frac{1}{2}\vec{r} \wedge \vec{B}_{\text{int}} = \frac{1}{2}(\rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z) \wedge B_{\text{int}}\vec{e}_z = \frac{\mu_0 n I \rho}{2} \vec{e}_\theta$. La relation est donc bien valable, ce qui est normal puisque le champ $\vec{B}$ est bien uniforme à

l'intérieur du contour. Par contre c'est faux pour un point extérieur au solénoïde : le champ $\vec{B}$ n'est plus uniforme à l'intérieur du contour.

3 INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE

3.1 Loi de Lenz, loi de Faraday

3.1.1

3.1.1.1 La loi de Faraday s'écrit $e = -\frac{d\Phi}{dt}$, avec Φ , le flux du vecteur $\vec{B}$ à travers la spire. Ici le flux de $\vec{B}$ vaut $\Phi = \pi a^2 B$ puisque $\vec{B}$ est uniforme à l'intérieur du solénoïde. Comme $\vec{B} = \mu_0 n I_0 \sin(\omega t)$, on obtient :
$$e = -\pi a^2 \mu_0 n I_0 \omega \cos(\omega t)$$

3.1.1.2 À l'intérieur du solénoïde, $\vec{A}_{\text{int}} = \frac{\mu_0 n I_0 \rho \sin(\omega t)}{2} \vec{e}_\theta$. On a donc $\vec{E}_i = -\frac{\mu_0 n I_0 \rho \omega \cos(\omega t)}{2} \vec{e}_\theta$. Sur le contour de la spire, la circulation de $\vec{E}_i$ vaut $e = \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = 2\pi a E_i(a)$, d'où

$$e = -\pi a^2 \mu_0 n I_0 \omega \cos(\omega t)$$

3.1.2 La spire ayant une résistance r , l'intensité est
$$i = \frac{e}{r} = -r\pi a^2 \mu_0 n I_0 \omega \cos(\omega t)$$

Le sens positif du courant est celui choisit pour l'orientation de la spire soit ici, le sens trigonométrique.

3.1.3 Le flux de $\vec{B}$ est maintenant $\Phi = \pi a^2 B \cos \theta$, avec $\theta = \omega t$ car la vitesse angulaire est constante ; la f.e.m induite est donc $e = \pi a^2 \mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t)$ et le courant
$$i = r\pi a^2 \mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t)$$

3.1.4 Si l'on veut annuler le courant dans la spire le champ magnétique doit créer un courant opposé à chaque instant au courant induit.

3.1.4.1 ????

3.1.4.2 ????

3.2 La roue de Barlow

3.2.1

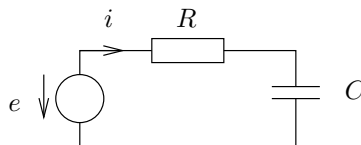
3.2.1.1 La force de Laplace $d^2\vec{f}$ qui s'exerce sur un élément $d\vec{l}$ de la ligne de courant est par définition :
$$d^2\vec{f} = di d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

3.2.1.2 Le moment en O des forces de Laplace qui s'exerce sur la roue est $\vec{\Gamma} = \int \int \overrightarrow{OM} \wedge (di d\vec{l} \wedge \vec{B})$, la première intégrale portant sur l'ensemble des lignes de courant et la seconde sur les points M d'une ligne de courant en allant de P vers O pour respecter le sens du courant sur la figure 9'. Or $\overrightarrow{OM} \wedge (d\vec{l} \wedge \vec{B}) = (\overrightarrow{OM} \cdot \vec{B}) d\vec{l} - (\overrightarrow{OM} \cdot d\vec{l}) \vec{B} = -r dr \vec{B}$ car $\overrightarrow{OM} \perp \vec{B}$ et $\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$ et $d\vec{l} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta$. On obtient donc $\vec{\Gamma} = \int \int_P^O -r dr \vec{B} di$ et donc
$$\vec{\Gamma} = \frac{a^2 i}{2} \vec{B}$$

C'est la même expression que si tout le courant passait dans une seule ligne joignant directement O et P .

3.2.1.3 Le champ électromoteur est $dE = (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}$. Or $\vec{v}_e = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$ donc $\vec{v}_e \wedge \vec{B} = (\vec{\omega} \cdot \vec{B}) \vec{r}$ et donc $dE = (\vec{\omega} \cdot \vec{B}) r dr$. On a alors
$$e = \int_O^P dE = \frac{a^2}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{B}$$

3.2.2 Le théorème du moment cinétique donne
$$J \dot{\vec{\omega}} = \frac{a^2 i}{2} \vec{B}$$
 et la loi des mailles sur l'unique maille du circuit électrique conduit à
$$e + Ri + \frac{q}{C} = 0$$



3.2.2.1 L'équation électrique s'écrit donc $\frac{a^2}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{B} + Ri + \frac{q}{C} = 0$, d'où $\frac{\vec{\omega} \cdot \vec{B} a^2}{2} + Ri + \frac{q}{C} = 0$ puisque $i = \dot{q}$. Comme $\dot{\vec{\omega}} = \frac{a^2 i}{2J} \vec{B}$, $\frac{a^4 B^2}{4J} i + Ri + \frac{q}{C} = 0$ et donc $\dot{i} + \left(\frac{1}{RC} + \frac{a^4 B^2}{4JR} \right) i = 0$. On a donc

bien $i = i_0 \exp(-t/\tau)$ avec
$$\tau = \left(\frac{1}{RC} + \frac{a^4 B^2}{4JR} \right)^{-1}$$

électrique s'écrit alors : $\frac{a^2}{2} \vec{\omega}_0 \cdot \vec{B} + Ri_0 + \frac{q_0}{C} = 0$. On a donc
$$i_0 = -\frac{a^2}{2R} \vec{\omega}_0 \cdot \vec{B} - \frac{q_0}{RC}$$

3.2.2.2 Comme $i = \dot{q}$, $q(t) = -i_0\tau \exp(-t/\tau) + C$. Comme $q(0) = q_0$,

$$q(t) = i_0\tau(1 - \exp(-t/\tau)) + q_0.$$

3.2.2.3 Comme $J\dot{\vec{\omega}} = \frac{a^2 i}{2}\vec{B}$, $\vec{\omega}(t) = -\frac{a^2 i_0 \tau}{2J}\vec{B} \exp(-t/\tau) + D$. Comme $\vec{\omega}(0) = \vec{\omega}_0$,

$$\vec{\omega}(t) = \frac{a^2 i_0 \tau}{2J}\vec{B}(1 - \exp(-t/\tau)) + \vec{\omega}_0.$$

3.2.3 Quand t devient grand $\exp(-t/\tau)$ tend vers 0, donc $q(t)$ tend vers $q_\infty = i_0\tau + q_0$ et $\omega(t)$ tend vers $\vec{\omega}_\infty = \frac{a^2 i_0 \tau}{2J}\vec{B} + \vec{\omega}_0$. On a donc

$$q_\infty = -\left(\frac{a^2}{2R}\vec{\omega}_0 \cdot \vec{B} + \frac{q_0}{RC}\right)\left(\frac{1}{RC} + \frac{a^4 B^2}{4JR}\right)^{-1} \text{ et}$$

$$\vec{\omega}_\infty = -\frac{a^2}{2J}\left(\frac{a^2}{2R}\vec{\omega}_0 \cdot \vec{B} + \frac{q_0}{RC}\right)\left(\frac{1}{RC} + \frac{a^4 B^2}{4JR}\right)^{-1}\vec{B} + \vec{\omega}_0$$

3.2.4 À MOINS D'UNE ERREUR DE SIGNE DANS CE QUI PRÉCÈDE, POUR QUE CE QUI SUIT FONCTIONNE IL FAUT $q_0 < 0$ ET NON $q_0 > 0$ COMME INDIQUÉ DANS LE TEXTE.

3.2.4.1 La puissance reçue initialement par le générateur est $e_0 i_0 = \frac{a^2}{2}\vec{\omega}_0 \cdot \vec{B}\left(-\frac{a^2}{2R}\vec{\omega}_0 \cdot \vec{B} - \frac{q_0}{RC}\right)$.

Comme $\vec{\omega}_0 \cdot \vec{B} < 0$ et $q_0 < 0$, $i_0 > 0$, on a donc $e_0 i_0 < 0$, le roue se comporte donc initialement comme un générateur.

3.2.4.2 Comme $i(t)$ est de signe constant, le produit ei change de signe quand $\vec{\omega} \cdot \vec{B}$ change de signe *i.e.* quand $\omega = 0$. Ceci est vérifié quand $\frac{a^2 i_0 \tau B}{2J}(1 - \exp(-t_r/\tau)) + \omega_0 = 0$, soit

$$t_r = -\tau \ln\left(1 + \frac{2\omega_0 J}{a^2 i_0 \tau B}\right), \text{ s'il existe.}$$