

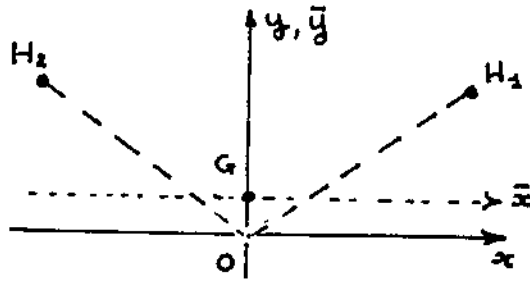
Problème I: Eau et micro-ondesI. 1. Traitement classique de la rotation d'une molécule d'eau

$$I. 1. 1. \quad x_{H_1} = -x_{H_2} = a \sin \beta/2 = 75,8 \text{ pm}$$

$$y_{H_1} = y_{H_2} = a \cos \beta/2 = 58,6 \text{ pm.}$$

$$I. 1. 2. \quad \text{par symétrie } x_G = 0 \quad \text{et } 18 y_G = 2 y_{H_1} \rightarrow y_G = \frac{y_{H_1}}{9} = 6,5 \text{ pm}$$

I. 1. 3.



$$\bar{x}_O = 0 \quad \bar{y}_O = -y_G = -6,5 \text{ pm.}$$

$$\bar{x}_{H_1} = x_{H_1} = -x_{H_2} = -\bar{x}_{H_2} = 75,8 \text{ pm}$$

$$\bar{y}_{H_1} = \bar{y}_{H_2} = y_{H_1} - y_G = 52,1 \text{ pm.}$$

$$I. 1. 4. \quad J_D = \sum_{i=1}^N m_i d_i^2(\bar{x}) \quad : \text{unite } \text{kg.m}^2$$

$$J_x = 1,67 \cdot 10^{-27} [16 \times (6,51 \cdot 10^{-12})^2 + 2 \times (52,1 \cdot 10^{-12})^2] = 1,02 \cdot 10^{-47} \text{ kg.m}^2$$

$$J_y = 1,67 \cdot 10^{-27} \times 2 \times (75,8 \cdot 10^{-12})^2 = 1,92 \cdot 10^{-47} \text{ kg.m}^2$$

$$J_z = J_x + J_y = 2,94 \cdot 10^{-47} \text{ kg.m}^2$$

$$I. 1. 5 \quad E_{c,x} = \frac{1}{2} J_x \omega_x^2$$

$$I. 1. 6 \quad \sigma_x = J_x \omega_x \rightarrow E_{c,x} = \frac{\sigma_x^2}{2 J_x}$$

$$I. 1. 7 \quad \frac{1}{2} J_x \langle \omega_x^2 \rangle = \frac{k_B T}{2} \quad \langle \omega_x^2 \rangle = \frac{k_B T}{J_x} \rightarrow \omega_q = \sqrt{\frac{k_B T}{J_x}} = 2,2 \cdot 10^{13} \text{ rad.s}^{-1}$$

$$f_q = \frac{\omega_q}{2\pi} = 3,57 \cdot 10^{12} \text{ Hz} \quad \tau_q = \frac{1}{f_q} = 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ s.}$$

I. 2 Les rayonnements micro-ondes.

$$I. 2. 1 \quad - E = 1,62 \cdot 10^{-24} \text{ J}$$

$$- \lambda = \frac{c}{f} = 0,122 \text{ m.}$$

- non! car les dimensions du circuit sont de l'ordre de grandeur de λ .

$$I. 2. 2. \quad \left. \begin{array}{l} \sigma \text{ est en } \Omega^{-1} \text{ m}^{-1} \\ \mu_0 \text{ " " } \Omega \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1} \\ f \text{ " " } \text{s}^{-1} \end{array} \right\} \rightarrow \sigma \mu_0 f \text{ est en } \text{m}^{-2} \rightarrow \sigma \sim \frac{1}{\sqrt{\sigma \mu_0 f}} \text{ à un facteur multiplicatif près}$$

A.N un ordre de grandeur de σ est $2,3 \cdot 10^{-6} \text{ m.}$

I. 2. 3. Mutant prendre tout de suite les valeurs réelles

$$\vec{E} = E_0 \cos 2\pi \left(f t + \frac{z}{\lambda} \right) \vec{e}_x \rightarrow \vec{B} = \frac{1}{c} (-\vec{e}_z) \wedge \vec{E} = -\frac{E_0}{c} \cos 2\pi \left(f t + \frac{z}{\lambda} \right) \vec{e}_y$$

$$\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} = - \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(2\pi(\rho t + \frac{z}{\lambda})) \vec{e}_z$$

$$\langle \cos^2(2\pi\rho t + \varphi) \rangle_t = \frac{1}{2} \rightarrow \langle \vec{\Pi} \rangle_t = - \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{e}_z$$

$$I.2.4 \quad |\langle \vec{\Pi} \rangle_t| = \frac{10^3}{0,1} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \quad E_0 = 10^2 \sqrt{2\mu_0 c} = 2750 \text{ Vm}^{-1}$$

$$I.2.5 \quad E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0 \vec{e}_x \quad E_p \sim 1,7 \cdot 10^{-26} \text{ J}$$

L'agitation thermique donne E_{th} de l'ordre de grandeur de $k_B T \sim 5 \cdot 10^{-21} \text{ J}$

On voit que $E_{th} \gg E_p$. L'eau ne se polarise pas dans un tel champ.

I.3 Absorption du rayonnement électromagnétique

$$I.3.1. \quad k^2 = \frac{\epsilon_2(\omega) \omega^2}{c^2} \quad \text{avec} \quad \epsilon_2(\omega) = \epsilon' - j\epsilon'' \quad (\text{précision: avec } \epsilon' \text{ et } \epsilon'' > 0)$$

et $\epsilon'' \ll \epsilon'$. A priori on aura une onde plane évanescente

En l'absence d'autres transformations possibles (ex: chimiques)

Le milieu va absorber de l'énergie et s'échauffer.

$$I.3.2 \quad \epsilon_2(\omega) = 1,77 + \frac{65}{1+j\omega\tau} = 1,77 + 65 \left(\frac{1-j\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2} \right)$$

$$\rightarrow \epsilon' = 1,77 + \frac{65}{1+\omega^2\tau^2} \quad \epsilon'' = \frac{65\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}$$

$$\omega\tau = 0,062 \rightarrow \omega^2\tau^2 \ll 1 \rightarrow \epsilon' = 66,8 \quad \epsilon'' = 4,03.$$

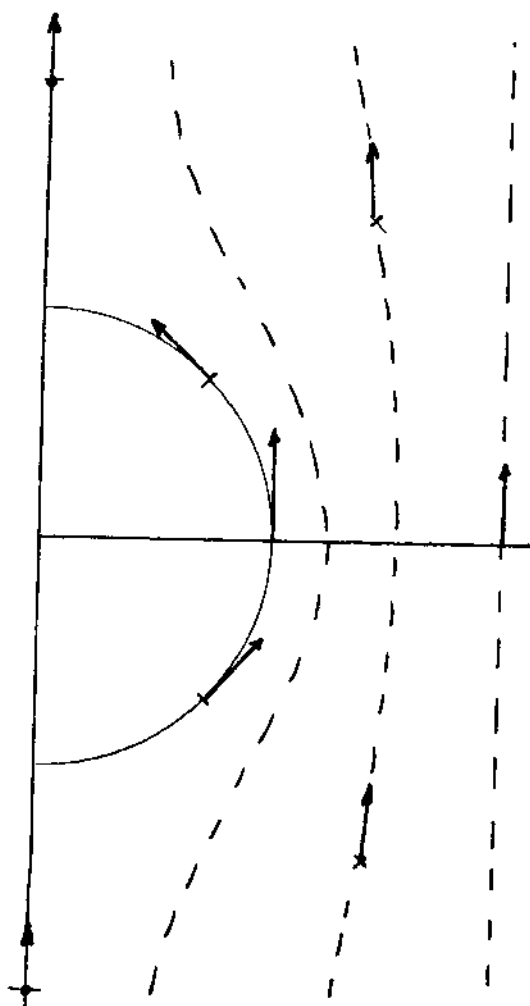
$$I.3.3. \quad k = \frac{\omega}{c} (\epsilon' - j\epsilon'')^{1/2} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon'} (1 - j\frac{\epsilon''}{\epsilon'})^{1/2} \approx \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon'} (1 - \frac{j\epsilon''}{2\epsilon'})$$

$$\rightarrow k' = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon'} = 419 \text{ m}^{-1} \quad k'' = \frac{\omega}{2c} \frac{\epsilon''}{\sqrt{\epsilon'}} = 12,6 \text{ m}^{-1} \ll k'$$

I.3.4. L'énergie décroît en $e^{-2k''z}$ (dans le sens des $z \downarrow$)

$$\text{en } z = -L \rightarrow e^{-2k''L} = \frac{1}{2} \quad 2k''L = \ln 2 \quad L = \frac{\ln 2}{2k''} = 0,027 \text{ m.}$$

Remarque: C'est sympathique, après tous ces calculs, de nous dire que ce modèle est complètement faux !



II.2.9

$$\text{II.2.10. } g \vec{\text{rad}} \frac{v^2}{2} = - g \vec{\text{rad}} \frac{P}{\rho}$$

$$\rightarrow g \vec{\text{rad}} \left(\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) = \vec{0}$$

$$\rightarrow \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} = C \quad \text{théorème de Bernoulli}$$

$$\text{qd } r \rightarrow \infty \quad \vec{v}_\infty \begin{cases} u \cos \theta \\ -u \sin \theta \\ 0 \end{cases} \rightarrow v^2 = u^2$$

$$\text{et } P(\infty) = 0 \rightarrow C = \frac{u^2}{2}$$

$$\text{II.2.11. pour } r=a \quad v_r=0 \quad v_\theta = -\frac{3u}{2} \sin \theta$$

$$v^2 = \frac{9}{4} u^2 \sin^2 \theta$$

$$\frac{9}{8} u^2 \sin^2 \theta + \frac{P}{\rho} = \frac{u^2}{2}$$

$$\rightarrow P = \rho \frac{u^2}{2} \left[1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta \right]$$

Il n'y a pas de traînée: Les forces de pression au dessus et au dessous du plan horizontal s'équilibrent par symétrie et il n'y a pas de forces tangentielles.

II.3. Sphère en mouvement de translation dans un fluide visqueux: Approche qualitative.

$$\text{II.3.1. } \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_b \frac{du}{dt} = -\frac{4}{3} \pi a^3 \rho_b g + \frac{4}{3} \pi a^3 \rho g - 6 \pi \eta a u$$

$$\frac{du}{dt} + \frac{9\eta}{2\rho_b a^2} u = -\left(1 - \frac{\rho}{\rho_b}\right) g \quad \text{avec } u=0 \text{ à } t=0$$

$$\rightarrow u = -\frac{2}{9\eta} (\rho_b - \rho) a^2 \left[1 - e^{-t/\tau} \right] \quad \text{avec } \tau = \frac{2\rho_b a^2}{9\eta}$$

$$\text{II.3.2. } |u_\infty| = \frac{2}{9\eta} (\rho_b - \rho) a^2 \quad \text{pour le brouillard: } u_\infty = 1,23 \cdot 10^{-5} \text{ m.s}^{-1}$$

$$\text{" la pluie } u_\infty = 12,3 \text{ m.s}^{-1}$$

Pour le brouillard, les gouttelettes tombent très lentement (elles restent quasiment en suspension), pour la pluie l'air semble un peu trop grande, mais il est difficile de se faire une véritable idée de la vitesse de chute de la pluie, surtout quand les averses sont violentes...

$$\text{II.3.3. } Re = \frac{\rho r v}{\eta} \text{ doit être } < 1$$

pour le brouillard $Re \approx 10^{-6}$ c'est bon!

" la pluie $Re \approx 900$ c'est mauvais

A grande vitesse la traînée est proportionnelle à v^2

Problème II. Mouvement de sphères dans les fluides

4/6

II.1. Fluide parfait dans un champ de pesanteur

$$\text{II.1.1} \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad } P$$

$$\text{II.1.2} \quad \text{au repos } \vec{v} = \vec{0} \rightarrow \vec{g} = \frac{1}{\rho} \text{grad } P$$

$$\rightarrow dP = -\rho g dz \rightarrow P = -\rho g z + C^te$$

II.2. Ecoulement stationnaire d'un fluide parfait autour d'une sphère immobile.

$$\text{II.2.1} \quad \text{div } \vec{v} = 0$$

$$\text{II.2.2} \quad \vec{v} = \text{grad}(\Phi(\vec{r})) \rightarrow \text{Rot } \vec{v} = \vec{0}$$

$$\text{II.2.3} \quad \Phi_u = u z \rightarrow \text{grad} \Phi_u = \vec{v}_u = u \vec{e}_z \quad \text{champ de vitesse uniforme } u \text{ parallèle à } Oz$$

$$\text{II.2.4} \quad \Phi_u = u r \cos \theta \rightarrow \vec{v}_u = \begin{pmatrix} u \cos \theta \\ -u \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{II.2.5} \quad \Phi_s = \left(u r + \frac{b}{r^2} \right) \cos \theta \rightarrow \vec{v}_s = \begin{pmatrix} \cos \theta \left(u - \frac{2b}{r^3} \right) \\ -\sin \theta \left(u + \frac{b}{r^3} \right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{II.2.6} \quad \text{div } \vec{v}_s &= \frac{2}{r} \cos \theta \left(u - \frac{2b}{r^3} \right) + \cos \theta \cdot \frac{6b}{r^4} - \sin \theta \left[\frac{u}{r} + \frac{b}{r^4} \right] - \sin \theta \left[\frac{u}{r} + \frac{b}{r^4} \right] \\ &= \cos \theta \left[u \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \right) + \frac{b}{r^4} (-4 + 6 - 1 - 1) \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\text{II.2.7} \quad v_r = 0 \rightarrow u = \frac{2b}{a^3} \rightarrow b = \frac{u a^3}{2} \rightarrow \vec{v}_s = \begin{pmatrix} u \cos \theta \left(1 - \frac{a^3}{2r^3} \right) \\ -u \sin \theta \left(1 + \frac{a^3}{2r^3} \right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{II.2.8} \quad \text{pour } r = a \text{ et } u = 1 \quad \vec{v}_s = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{pour } r = 2a \text{ et } u = 1 \quad \vec{v}_s = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} \cos \theta \\ -\frac{17}{16} \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

r	θ	v _r	v _θ	r	θ	v _r	v _θ
a	0	0	0	2a	0	7/8	0
a	π/4	0	-3/(2√2)	2a	π/4	7/(8√2)	-17/(16√2)
a	π/2	0	-3/2	2a	π/2	0	-17/16
a	3π/4	0	-3/(2√2)	2a	3π/4	-7/(8√2)	-17/(16√2)
a	π	0	0	2a	π	-7/8	0

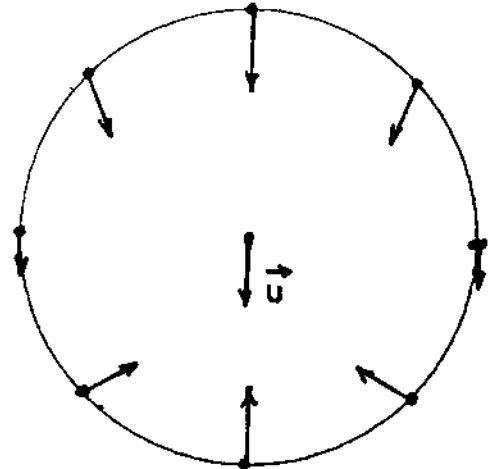
II.4. Interactions hydrodynamiques dans un fluide visqueux

5/5

II.4.1 $\tan \frac{3\alpha u}{4z} = 1$ $\vec{U}(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}=0} = \begin{pmatrix} -2 \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$

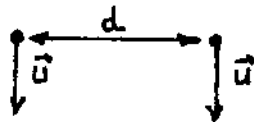
θ	U_r	U_θ
0	-2	0
$\pi/4$	$-\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
$\pi/2$	0	1
$3\pi/4$	$+\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
π	+2	0

II.4.2



Les billes sont supposées immobiles par rapport au référentiel. Les forces exercées par le fluide sont donc de m même que la vitesse du fluide soit $\vec{U}(\vec{r})$

II.4.3.



En régime permanent

$$m\vec{g} - 6\pi\eta a(\vec{u} - \vec{U}(\vec{r}_{AB})) = 0$$

$$6\pi\eta a\vec{u} = m\vec{g} + 6\pi\eta a\vec{U}(\vec{r}_{AB})$$

d'après ce qui précède $\vec{U}(\vec{r}_{AB})$ est dirigée comme $\vec{U}$ vers le bas la force correspondante s'ajoute donc au poids de la particule; en prenant $|\vec{U}| = \frac{3\alpha u}{4d}$ on a

$$|\vec{u}| = \frac{m}{6\pi\eta a} g + \frac{3\alpha |\vec{u}|}{4d} \rightarrow u = \frac{mg}{6\pi\eta a} \times \frac{1}{1 - \frac{3\alpha}{4d}}$$

Deux billes proches sédimentent donc plus vite qu'une bille isolée.

