

1*a : Loi de Fourier : $\vec{j}_Q = -\lambda \vec{\text{grad}} T$

1*b : L'échange thermique (irréversible) se fait "du chaud" vers "le froid",
donc dans le sens des températures décroissantes : $\vec{j}_Q$ a le sens de $(-\vec{\text{grad}} T)$ 1/8

1*c : $\vec{j}_Q = -\lambda \vec{\text{grad}} T(r) = -\lambda \left[\begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{dT}{dr} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \end{array} \right] = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{e}_r$ $\vec{j}_Q$ est radial

1*d : $P_{th} = \oint \vec{j}_Q \cdot \vec{n} d^2S = \oint_{\text{surface latérale}} \vec{j}_Q \cdot \vec{e}_r d^2S + \oint_{\text{base } z=0} \vec{j}_Q \cdot (-\vec{e}_z) d^2S + \oint_{\text{base } z=l} \vec{j}_Q \cdot \vec{e}_z d^2S = \oint_{\text{lat}} j_Q(r) r d\theta dz$

$P_{th} = \int_{\text{lat}} j_Q(r) r d\theta dz = 2\pi r l j_Q$

1*e : Pour le volume compris entre les deux cylindres de longueur l et de rayons r et $(r+dr)$, en régime permanent, $dU=0$ et $\delta W=0$



donc $\delta Q = 0$ et $\delta Q = dt [P_{th}(r) - P_{th}(r+dr)] = -dt dr \frac{dP_{th}}{dr}$

Donc $\frac{dP_{th}}{dr} = 0$ et la puissance thermique P_{th} est indépendante de r

1*f : $P_{th} = 2\pi l r j_Q = -2\pi l \lambda r \frac{dT}{dr} \Rightarrow \frac{dT}{dr} = -\frac{P_{th}}{2\pi l \lambda} \cdot \frac{1}{r} = \frac{P_{th}}{2\pi l \lambda} \frac{d}{dr} \left(\ln \frac{1}{r} \right)$

$T(r) - T(R_1) = \frac{P_{th}}{2\pi l \lambda} \ln \frac{R_1}{r}$

$T = T_1 + \frac{P_{th}}{2\pi l \lambda} \ln \frac{R_1}{r}$

1*g : D'où $P_{th} = \frac{2\pi l \lambda}{\ln \frac{R_1}{R_2}} (T_2 - T_1) = g(T_1 - T_2)$ avec

$g = \frac{2\pi \lambda}{\ln \frac{R_2}{R_1}} > 0$

Relation analogue à $i = g_{el} (V_A - V_B)$ $g_{el} = \frac{1}{R_{el}}$

g est donc la "conductance" thermique par unité de longueur

i = débit de charge
analogue au débit thermique
 $V_A - V_B$ = ddp analogue à la différence de température

1*h : $g = \frac{2\pi \times 0,40 \cdot 10^3}{\ln \frac{8,5}{8}} = 41 \cdot 10^3 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1} = 41 \text{ kW m}^{-1} \text{ K}^{-1}$

2*a : $\mathcal{D}_m = \oint_{\text{section}} \rho \vec{v} \cdot \vec{e}_z d^2S = \rho v S = \mathcal{D}_m$

2*b : $\mathcal{P}_m = \oint_{\text{face } z_e} (P_e d^2S \vec{e}_z) \cdot \vec{v}(z_e) + \oint_{\text{face } z_s} (-P_s d^2S \vec{e}_z) \cdot \vec{v}(z_s) = P_e v S - P_s v S = (P_e - P_s) v S$

2*c : $dU = U_{AB'} - U_{AA'} = \left[U_{AB'}(t+dt) + U_{BB'}(t+dt) \right] - \left[U_{AA'}(t) + U_{A'B}(t) \right]$
régime permanent

$dU = U_{BB'}(t+dt) - U_{AA'}(t) = u_s dm_{BB'} - u_e dm_{AA'} = u_s \mathcal{D}_m dt - u_e \mathcal{D}_m dt = \mathcal{D}_m (u_s - u_e) dt$

2*d : 1^{er} principe $dU = \delta W + \delta Q = \mathcal{P}_m dt + \mathcal{P}_{th} dt$

$$\text{D'où } P_H = \frac{du}{dt} - P_m = \mathcal{D}_m (u_s - u_e) - (P_e - P_s) v S = \mathcal{D}_m (u_s - u_e) - (P_e - P_s) \frac{\mathcal{D}_m}{\rho} \quad \frac{2}{8}$$

$$P_H = \mathcal{D}_m \left[\left(u_s + \frac{P_s}{\rho} \right) - \left(u_e + \frac{P_e}{\rho} \right) \right]$$

Soit h l'enthalpie massique: $h = u + P v_{\text{massique}} = u + \frac{P}{\rho}$; $P_H = \mathcal{D}_m [h_s - h_e]$

Or $dh = C_p dT$ donc $h_s - h_e = \int_e^s C_p dT = C_p (T_{pf}(z_s) - T_{pf}(z_e))$

et $P_H = \mathcal{D}_m C_p (T_{pf}(z_s) - T_{pf}(z_e))$

3*a: On applique ce résultat à la tronche de fluide en régime permanent

entre z et $z+dz$: $dP_H = \mathcal{D}_m C_p (T_{pf}(z+dz) - T_{pf}(z)) = \mathcal{D}_m C_p \frac{dT_{pf}}{dz} dz$

cette puissance (entrante!) est l'opposé de la puissance qui sort (par la face latérale de longueur dz), calculée avec (1) $dP_R = -g dz (T_{pf}(z) - T_m)$

rayon R_1 rayon R_2

d'où $\mathcal{D}_m C_p \frac{dT_{pf}}{dz} dz = -g (T_{pf}(z) - T_m)$

$$\frac{dT_{pf}}{dz} = -(T_{pf}(z) - T_m) \times \frac{g}{\mathcal{D}_m C_p}$$

$$\boxed{\frac{dT_{pf}}{dz} = \frac{T_m - T_{pf}}{l_1}}$$

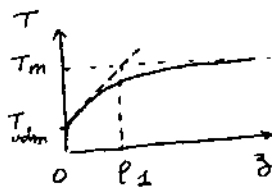
l_1 a bien la dimension d'une longueur

3*b La solution est $T_{pf} = T_m + A e^{-\frac{z}{l_1}}$

On détermine la constante d'intégration en $z=0$: $T_{pf} = T_{adm}$

$T_{adm} = T_m + A$ donc

$$\boxed{T_{pf} = T_m + (T_{adm} - T_m) e^{-z/l_1}}$$



Rem: la tangente à l'origine coupe l'asymptote en $z = l_1$

3*c: La puissance totale fournie par le fluide caloporteur au milieu est la puissance totale qu'il a reçue (et évacuée vers T_m), calculable avec (1):

$$P_{H, \text{ech}} = -\mathcal{D}_m C_p [T_{pf}(L) - T_{pf}(0)] = -\mathcal{D}_m C_p [T_m + (T_{adm} - T_m) e^{-L/l_1} - T_{adm}]$$

↑ "fournie par le fluide" = - "reçue par le fluide"

Si $L \gg l_1$, on fait l'approximation $e^{-L/l_1} \approx 0$ et $P_{H, \text{ech}} = -\mathcal{D}_m C_p [T_m - T_{adm}]$

3*d: La puissance reçue par la tronche est $dP_R = \mathcal{D}_m C_p [T_{pf}(z+dz) - T_{pf}(z)] = \mathcal{D}_m C_p \frac{dT_{pf}}{dz} dz$

Elle est reçue | par la face latérale de longueur dz : $-g dz (T_{pf}(z) - T_m)$
 et | par conduction thermique au sein du fluide, à travers

les faces d'abscisses z et $z+dz$: $j_q(z) S - j_q(z+dz) S = -\frac{d j_q}{dz} dz S = +\lambda \frac{dT}{dz^2} S dz$

d'où

$$\mathcal{D}_m C_p \frac{dT_{pf}}{dz} dz = -g dz (T_{pf}(z) - T_m) + \lambda \frac{dT}{dz^2} S dz$$

$$\frac{Dm C_p}{g} \frac{dT_{ff}}{dz} = [T_m - T_{ff}(z)] + \frac{\lambda_{ff} S}{g} \frac{d^2 T_{ff}}{dz^2}$$

Par raison d'homogénéité, on pose $l_2^2 = \frac{\lambda_{ff} S}{g}$ (et $l_1 = \frac{Dm C_p}{g}$) $l_2 = \sqrt{\frac{\lambda_{ff} S}{g}}$

Rem: l_2 est bien une longueur car, par analyse dimensionnelle:

$$[l_2^2] = \frac{[S][\lambda_{ff}]}{[g]} = \frac{[S][\lambda_{ff}]}{\lambda} = [S]$$

$$\text{On trouve bien } l_1 \frac{dT_{ff}}{dz} = [T_m - T_{ff}(z)] + l_2^2 \frac{d^2 T_{ff}}{dz^2}$$

l_1 est une distance caractéristique du transfert par convection

l_2 est une distance caractéristique du transfert par diffusion

Pour que la contribution des transferts thermiques diffusifs (au sein du fluide) puisse être négligée, il faut que la distance sur laquelle ils interviennent (donc l_2) soit très petite: $l_2 \ll l_1$

$$\text{donc } \sqrt{\frac{\lambda_{ff} S}{g}} \ll \frac{Dm C_p}{g} \quad \text{donc } Dm \gg \boxed{D_{mc} = \frac{\sqrt{\lambda_{ff} S g}}{C_p}}$$

Il faut donc un grand débit ("que la convection l'emporte"), ou bien λ_{ff} faible, donc un fluide mauvais conducteur thermique (et alors la conduction thermique n'intervient pas...)

$$D_{mc} = \frac{\sqrt{0,58 \times 2 \cdot 10^{-4} \times 40 \cdot 10^3}}{4,2 \cdot 10^3} = 5,1 \cdot 10^{-4} \text{ kg s}^{-1} \quad (\text{Rem: } \lambda_{ff} = 0,58 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1} \ll \lambda = 0,40 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1})$$

$$A^* a: \quad \Gamma \frac{dT_m}{dt} = P_{R, \text{ech}} - P_{R, \text{fuite}} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{perdue par la} \\ \text{pièce vers} \\ \text{l'extérieur} \end{array}$$

↑ reçue par la pièce en provenance du radiateur

$$\Gamma \frac{dT_m}{dt} = + Dm C_p (T_{adm} - T_m) - G_{fuite} (T_m - T_{ext})$$

$$\frac{dT_m}{dt} = \frac{Dm C_p}{\Gamma} T_{adm} + \frac{G_{fuite}}{\Gamma} T_{ext} - \frac{Dm C_p + G_{fuite}}{\Gamma} T_m$$

$$\text{Posons } \left\{ \begin{array}{l} \tau = \frac{\Gamma}{Dm C_p + G_{fuite}} \\ T_{st} = \frac{Dm C_p T_{adm} + G_{fuite} T_{ext}}{Dm C_p + G_{fuite}} \end{array} \right.$$

$$\frac{dT_m}{dt} = \frac{T_{st} - T_m}{\tau}$$

$$A^* b: \text{ La solution est } T_m = T_{st} + (T_m(0) - T_{st}) e^{-t/\tau}$$

T_{st} représente la température limite atteinte par la pièce, au bout d'un temps théoriquement infini, en pratique au bout d'un temps de l'ordre de quelques τ . τ représente la constante de temps du phénomène.

$A^* c: G_{fuite} \gg Dm C_p \quad T_{st} \approx T_{ext}$; les fuites l'emportent et la température de la pièce tend vers la température extérieure avec $\tau \approx \frac{\Gamma}{G_{fuite}}$
 $G_{fuite} \ll Dm C_p \quad T_{st} \approx T_{adm}$; les fuites sont négligeables et la température de la pièce tend vers "celle" du radiateur (T_{adm} , en fait celle de la chaudière...)

$$A^* d: Dm_0 = \frac{G_{fuite} (T_{st} - T_{ext})}{C_p (T_{adm} - T_{st})} = \frac{40 (292 - 283)}{4,2 \cdot 10^3 (333 - 292)} = 2,1 \cdot 10^{-3} \text{ kg s}^{-1}$$

Rem: Γ inutile!
 Il faut C_p donnée en 3^e e (erreur?)

4* e: On trouve $Dm_0 = 2.1.10^{-4} \text{ kg s}^{-1} \gg Dm_c = 5.1.10^{-4} \text{ kg s}^{-1}$?

Rum! rapport 4!

L'utilisation ici de l'équation (3) est abusive; on n'obtient donc que des ordres de grandeur...

$$\tau = \frac{\eta}{Dm_0 C_p + G_{\text{huile}}} = \frac{56.10^3}{2.1.10^{-3} \times 4.2.10^3 + 40} = 1.2.10^3 \text{ s} = 19 \text{ mn}$$

II 1* a: écoulement stationnaire: $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$

$$\left(\vec{v} \cdot \text{grad} \right) \vec{v} = v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = v \cdot \frac{\partial v(x)}{\partial z} \vec{e}_z = \vec{0} \quad \left. \begin{array}{l} v_x = v_y = 0 \end{array} \right\} \vec{0} = -\text{grad} P + \eta \Delta \vec{v}$$

$$\Delta \vec{v} \left| \begin{array}{l} \Delta v_x = 0 \\ \Delta v_y = 0 \\ \Delta v_z = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \end{array} \right. \quad \text{donc } \text{grad} P = \eta \frac{d^2 v}{dx^2} \vec{e}_z = \left| \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial z} \end{array} \right. \quad \text{donc } \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \Rightarrow P(z)$$

1* b: $\frac{dP}{dz} = \eta \frac{d^2 v(x)}{dx^2}$ $\frac{dP}{dz}$ est une fonction de z seul, et égal à une fonction de x seul:

$$\frac{dP(z)}{dz} = \text{cte} = -K$$

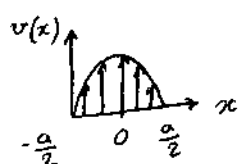
1* c: $\vec{v}(\pm \frac{a}{2}) = \vec{v}_{\text{tangentielle}} = \vec{0}$ sur une paroi solide fixe

1* d: $v(x)$ est solution de $\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{K}{\eta}$ donc $v(x) = -\frac{K}{2\eta} x^2 + \alpha x + \beta$

$$v(\frac{a}{2}) = -v(\frac{a}{2}) \Rightarrow \alpha = 0$$

$$v(\frac{a}{2}) = 0 \Rightarrow \beta = \frac{K a^2}{8\eta}$$

$$v(x) = \frac{K}{2\eta} \left(\frac{a^2}{4} - x^2 \right) \quad \text{Profil parabolique}$$



$v(x) \geq 0$ pour $|x| \leq \frac{a}{2}$ impose $K > 0$ (il faut $T(0) > P(L)$ pour que le fluide soit "poussé")

1* e: $Dm = \iint_{\text{section}} \rho \vec{v} \cdot \vec{e}_z dx dy = \rho \int_{-a/2}^{a/2} \int_0^H v(x) dx dy = \rho H \frac{K}{2\eta} \int_{-a/2}^{a/2} \left(\frac{a^2}{4} - x^2 \right) dx$

$$= \rho H \frac{K}{2\eta} \left[\frac{a^2}{4} x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-a/2}^{a/2} = \frac{\rho H K a^3}{12\eta} = Dm \quad \alpha = \frac{\rho H}{12\eta}$$

2* a: $\frac{dP(z)}{dz} = -K \Rightarrow P(z) = -Kz + \beta$ donc $P(L) - P(0) = -K(L-0) = -KL$

2* b: d'où $Dm = \frac{\alpha a^3}{L} [P(0) - P(L)]$ $G_p = \frac{\alpha a^3}{L}$

2* c: Dm (débit de masse) est l'analogue de i , débit de charge; $P(L) - P(0) = \Delta P$ est l'analogue d'une différence de potentiel: $\Delta V = V(A) - V(B)$ et la relation trouvée en 2* b est l'analogue de la loi d'Ohm pour un dipôle de résistance (électrique R), de conductance $G = \frac{1}{R}$

$i = \frac{V_A - V_B}{R} = G(V_A - V_B)$; G_p est donc la conductance hydraulique de la portion de fluide considérée

3*a: En régime stationnaire, les 3 parties de circuit sont traversées $\frac{5}{8}$ par le même débit; on a donc affaire à 3 conductances hydrauliques montées en série, dont les résistances s'ajoutent:

$$R_{eq} = R_{0 \rightarrow 3} + R_{3 \rightarrow 3+L_2} + R_{3+L_2 \rightarrow L} = \frac{3}{da^3} + \frac{L_2}{d(a-x)^3} + \frac{L-(3+L_2)}{da^3} = \frac{L-L_2}{da^3} + \frac{L_2}{d(a-x)^3}$$

$$\text{et } D_m = [P(0) - P(L)] G_{eq} = \frac{P(0) - P(L)}{R_{eq}} = \frac{d[P(0) - P(L)]}{\frac{L-L_2}{a^3} + \frac{L_2}{(a-x)^3}}$$

3*b: On peut faire un développement de $D_m(x)$ au voisinage de x_0 :

$$D_m(x) = D_m(x_0) + (x - x_0) \frac{\partial D_m}{\partial x} \Big|_{x_0} + \dots \text{on oublie...}$$

$$\text{on reconnaît } D_{m0} \quad \varepsilon \quad \uparrow \text{ on pose } b = - \frac{1}{D_{m0}} \frac{\partial D_m}{\partial x} \Big|_{x_0}$$

$$\text{D'où } D_m = D_{m0} (1 - b \varepsilon)$$

$$b = - \left[\frac{1}{D_m} \frac{\partial D_m}{\partial x} \right]_{x_0} = - \left[\frac{\partial}{\partial x} \ln D_m \right]_{x_0} = - \left[\frac{\partial}{\partial x} \ln \left(\frac{L-L_2}{a^3} + \frac{L_2}{(a-x)^3} \right) \right]_{x_0} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\ln \left(\frac{L-L_2}{a^3} + \frac{L_2}{(a-x)^3} \right) \right]_{x_0}$$

$$= \frac{-3 \frac{L_2}{(a-x_0)^4} \cdot (-1)}{\frac{L-L_2}{a^3} + \frac{L_2}{(a-x_0)^3}} = \frac{3 L_2}{(a-x_0)^4 \left[\frac{L-L_2}{a^3} + \frac{L_2}{(a-x_0)^3} \right]} = b$$

4*a: Appliqué à (c), le théorème de la résultante cinétique s'écrit/ projette sur Ox:

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = + \underbrace{P_{\text{gaz}} S}_{\text{force due au gaz}} - \underbrace{\int_0^S P_{\text{fl}}(z) H dz}_{\text{force due au fluide}} \neq 0 \quad \text{R approx} \quad \text{d'où } P_{\text{gaz}} = \frac{1}{S} \int_0^S P_{\text{fl}}(z) H dz = \text{cte!}$$

4*b: On suppose le gaz parfait ($PV = nRT$), évoluant à pression constante:

$$\frac{V}{T} = \text{cte} = \frac{V_0}{T_{m0}} = \frac{V_0 + \delta V}{T_{m0} + \delta T_m}; \text{ d'où } V_0 (T_{m0} + \delta T_m) = T_{m0} (V_0 + \delta V) \text{ donc } \boxed{\delta V = \frac{\delta T_m V_0}{T_{m0}}}$$

4*c: L'augmentation de volume δV correspond à un déplacement ξ tel que

$$\delta V = S \xi; \text{ d'où } D_m = D_{m0} \left(1 - \frac{b}{S} \delta V \right) = D_{m0} \left(1 - \frac{b}{S} \cdot \frac{V_0}{T_{m0}} \delta T_m \right)$$

$$\text{On pose } \boxed{\beta = \frac{b}{S} \frac{V_0}{T_{m0}}}$$

4*d: Cas: $T_{adm} > T_m > T_{ext}$

Si, par exemple, T_m augmente ($\delta T_m > 0$), alors D_m diminue et la puissance fournie par le radiateur (3); $P_{\text{réch}} = D_m C_p (T_{adm} - T_m)$ diminue par $(T_{adm} - T_m)$ et par D_m . l'effet est donc renforcé. Si $\delta T_m < 0$, $D_m \uparrow$, $(T_{adm} - T_m) \uparrow$, $P_{\text{réch}}$ augmente avec effet renforcé: il y a donc effet de régulation.

5*a: La solution de l'équation (8) est $\delta T_m = \frac{\tau_{st}}{\tau_0} \delta T_{ext} \left(1 - \frac{P_{mo} C_p}{G_{fuite}} \right) + A e^{-\frac{t}{\tau_{st}}}$

Au bout d'un temps infini (en pratique pour $t > \text{quelques } \tau_{st}$): $\delta T_{m\infty} = \frac{\tau_{st}}{\tau_0} \delta T_0 \left(1 - \frac{P_{mo} C_p}{G_{fuite}} \right)$
car $\delta T_{ext} = \delta T_0$

5*b: sans régulation ($\beta = 0$), $\tau_{st} = \tau_0$ donc $\delta T_{m\infty} = \delta T_0 \left(1 - \frac{P_{mo} C_p}{G_{fuite}} \right)$

d'où $\xi = \frac{\delta T_{m\infty}}{\delta T_{m\infty, nr}} = \frac{\tau_{st}}{\tau_0}$

5*c: On souhaite $|\delta T_{m\infty}| < |\delta T_{m\infty, nr}|$, c'est-à-dire une variation plus faible avec régulation que sans! On souhaite donc $\xi < 1$, donc $\frac{1}{\tau_0} < \frac{1}{\tau_{st}}$, ce qui est bien le cas avec $(T_{adm} - T_0) > 0$: $\frac{1}{\tau_{st}} = \frac{1}{\tau_0} + \underbrace{\frac{P_{mo} C_p}{\tau_0 G_{fuite}} \beta (T_{adm} - T_0)}_{>0} > \frac{1}{\tau_0}$

5*d: $\xi = \frac{1}{1 + \frac{P_{mo} C_p}{G_{fuite}} \beta (T_{adm} - T_0)}$

La régulation est d'autant meilleure que ξ est petit donc que:
le débit P_m est grand, C_p est grand (fluide de grande capacité calorifique),
 β est grand (donc b grand, grand volume V_0 , petite surface s), $(T_{adm} - T_0)$ est grand, et G_{fuite} est faible (peu de fuites...)

5*e: τ_{st} est la constante de temps de la solution 5*a', donc un temps caractéristique (temps de réponse) de δT_m , donc de la stabilisation. Il "remplace" τ_0 ; "retour plus rapide".

5*f: si $(T_{adm} - T_0) < 0$, $\xi > 1$; mais il faut que τ_{st} reste positif (que la solution de (8) ne soit pas une exponentielle croissante qui s'emballerait).

Il faut: $1 + \frac{P_{mo} C_p}{G_{fuite}} \beta (T_{adm} - T_0) > 0$ donc $T_0 - T_{adm} < \frac{G_{fuite}}{P_{mo} C_p \beta}$

5*g: mais le système (même lorsqu'il est stable: $\tau_{st} > 0$) est inadapté car $\xi > 1$: $\delta T_{m\infty} > \delta T_{m\infty, nr}$! On a intérêt à utiliser le système non régulé pour avoir $\delta T_{m\infty}$ le plus petit possible (et il vaut alors $\delta T_{m\infty, nr}$).

III 1*a: Direction de $\vec{B}(M)$: le plan (π) passant par M et contenant l'axe Oz est plan d'antisymétrie; $\vec{B}$ est un vecteur axial, donc $\vec{B}(M)$ est parallèle à π : $B_\theta = 0$

Le plan (π') passant par M et perpendiculaire à l'axe Oz est plan de symétrie; le vecteur $\vec{B}$ axial est donc perpendiculaire à (π') donc selon Oz : $\vec{B}(M) = B \vec{e}_z$

$\vec{B} = \mu_0 n I \vec{e}_z$ à l'intérieur d'un solénoïde infini (et nul en dehors).

Donc ici: $\vec{B} = \mu_0 n I(t) \vec{e}_z$

1*b: La spire est un conducteur cylindrique de longueur $(2\pi R_m)$ et de section $e \times dz$: $dq = \frac{\sigma \cdot e \cdot dz}{2\pi R_m}$

1*c $\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt}$ et $\phi = \oint_{\text{circuit}} \vec{B} \cdot \vec{n} d^2S = \oint_{\text{circuit}} B_0(t) \cdot \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z d^2S = B_0(t) \times \pi R_m^2$

$$d'où \quad e = - \frac{d\Phi_0}{dt} \pi R_m^2$$

7/8

1* d: D'après la loi de Pouillet ($e = Ri$), $dI_{ind} = e dg = - \frac{\sigma e}{2} R_m \mu_0 n \frac{dI}{dt} dz$

2* a: $\vec{B}_{ind} = \mu_0 n' dI_{ind} \vec{e}_z = \mu_0 \frac{dI_{ind}}{dz} \vec{e}_z = - \frac{\sigma e}{2} R_m \mu_0^2 n \frac{dI}{dt} \vec{e}_z$

2* b: En régime sinusoïdal forcé $I = I \cos \omega t$ et $\frac{dI}{dt} = -I \omega \sin \omega t$

$$\frac{\|\vec{B}_{ind}\|}{\|\vec{B}\|} = \frac{1}{\mu_0 n |I|} \times \frac{\sigma e}{2} R_m \mu_0^2 n \left| \frac{dI}{dt} \right| = e R_m \times \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \times \frac{1}{\omega |I|} \sim \frac{e R_m}{\delta^2}$$

"de l'ordre de grandeur de"

Donc $\frac{\|\vec{B}_{ind}\|}{\|\vec{B}\|} \ll 1$ si $\frac{e R_m}{\delta^2} \ll 1$ donc si $e \ll \frac{\delta^2}{R_m} = e_c$ $e_c = \frac{\delta^2}{R_m}$

$$\frac{e}{e_c} = \frac{e R_m \mu_0 \sigma \cdot 2 \pi b}{2} = \frac{5 \cdot 10^{-4} \times 8,3 \cdot 10^{-3} \times 4 \pi \cdot 10^{-2} \times 6 \cdot 10^7 \times 2 \pi \times 100}{2} = 9,8 \cdot 10^{-2} \ll 1 (?)$$

On est donc les conditions de validité des calculs à seulement 10% (= 0,1) près...
Donc calculs discutables....

2* c: δ représente l'épaisseur de peau, c'est-à-dire l'épaisseur de métal dans laquelle circulent des courants induits notables.

En supposant $\|\vec{B}_{ind}\| \ll \|\vec{B}\|$, on a négligé $\vec{B}_{ind}$ dans le calcul de e (qui elle-même contribue à créer I_{ind}); on a donc négligé l'auto-inductance du tube.

3* a: $\Phi_{ind} = \iint_{\text{Bobine}} \vec{B}_{ind} \cdot \vec{n} d^2S = n l \iint_{\text{1 spire}} \vec{B}_{ind} \cdot \vec{e}_z d^2S = n l \left[\iint_{\text{disque de rayon } R_m} \vec{B}_{ind} \cdot \vec{e}_z d^2S + \iint_{\text{couronne entre } R_m \text{ et } R_{spire} = b} \vec{B}_{ind} \cdot \vec{e}_z d^2S \right]$

Pour $r > R_m$: $\vec{B}_{ind} = \vec{0}$ (extérieur du solénoïde infini équivalent)

$\iint_{\text{couronne entre } R_m \text{ et } R_{spire}} \vec{B}_{ind} \cdot \vec{e}_z d^2S = 0$ donc $\Phi_{ind} = n l B_{ind} \pi R_m^2$

3* b: $e_{total} = - \frac{d\Phi_{total}}{dt} = - \frac{d}{dt} [\Phi_{propre} + \Phi_{ind}] = - \frac{d}{dt} [LI + \Phi_{ind}] = -L \frac{dI}{dt} + n l \pi R_m^2 \frac{\sigma e}{2} \mu_0 n \frac{dI}{dt}$

$$\Gamma = \frac{1}{2} \times \mu_0^2 n^2 \sigma l e R_m^3 \quad \boxed{\Gamma = \frac{1}{2}}$$

3* c: $\underline{Z}(\omega) = R + j\omega L$

3* d: $e_g + e_{total} = RI$ I est solution de: $RI + \frac{L dI}{dt} - \Gamma \frac{d^2 I}{dt^2} = e_g$ (fem du générateur)

En notation complexe $\underline{I} (R + j\omega L - (j\omega)^2 \Gamma) = \underline{E}$

La bobine possède alors l'impédance $\underline{Z}' = R + \omega^2 \Gamma + j\omega L$, de la forme

$\underline{Z}' = R' + j\omega L$ avec $R' = R + \omega^2 \Gamma$ $\delta R = \omega^2 \Gamma$

3* e: $\delta R = 4 \pi^2 \times 10^4 \times \frac{1}{2} \times (4 \pi \cdot 10^{-2})^2 \times (3 \cdot 10^4)^2 \times 6 \cdot 10^7 \times 0,1 \times 5 \cdot 10^{-4} (8,3 \cdot 10^{-3})^2 = 0,48 \Omega$

Modification qui semble petite, mais ne l'est pas! Si la bobine a un rayon $b = 10$ mm, avec $n l = 3000$ spires, d'un fil de 0,5 mm de rayon/avec:

$R = n l \frac{2 \pi b}{\sigma \pi r^2} = \frac{3000 \times 2 \pi \times 10^{-2}}{6 \cdot 10^7 \times \pi \times (5 \cdot 10^{-4})^2} = 4 \Omega$! $\frac{\delta R}{R} > 10\%$ donc mesurable!

3f*: δR dépend de σ , e et R_m^3 . En déplaçant la bobine le long du tube, des variations de δR apparaissent si σ varie (inhomogénéités du métal du tube), si e et R_m^3 varient le long du tube mais surtout si il y a dans le tube des discontinuités qui empêchent les lignes de courant induit de se refermer (donc qui empêchent les courants induits de circuler: $\delta R \downarrow$). Ces discontinuités peuvent être des fissures, piqures dues à la corrosion... La corrosion peut aussi provoquer des variations de e et R_m .

3*g: Pour augmenter δR (mesure plus précise) on augmente la fréquence; mais alors l'effet de peau empêche la circulation en profondeur des courants induits.

A une fréquence optimale correspond à une épaisseur de peau δ de l'ordre de l'épaisseur e :

$$e \sim \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma}} \quad \text{donc } f_{opt} \sim \frac{1}{\pi e^2 \mu_0 \sigma} = \frac{1}{\pi \times (5 \cdot 10^{-4})^2 \times 4\pi \cdot 10^{-7} \times 6 \cdot 10^7} = 17 \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

$$f_{opt} \sim 20 \text{ kHz}$$

Avec une fréquence plus élevée, les influences de e et R_m disparaissent; on détecte des discontinuités de surface, donc des effets de corrosion.