

e3a 2008, filière PSI, épreuve de physique-chimie

corrigé proposé par Jean-Philippe Caniparoli, PSI, lycée Cormontaigne, Metz
courriel : artefact.act@wanadoo.fr

première partie : moteur de maquette d'avion

A/ Le moteur électrique à courant continu

A.1

Avec les conventions de l'énoncé, la force électromotrice induite est donnée par $e = n \int_{MNPQ} \vec{v} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = n \int_{MN} (a\Omega \vec{u}_\theta \wedge B\vec{u}_r) \cdot d\vec{\ell} + \int_{PQ} (a\Omega \vec{u}_\theta \wedge -B\vec{u}_r) \cdot d\vec{\ell} = -2nabB\Omega$, soit $E = -e = 2nabB\Omega = \Phi_0\Omega$, avec $\Phi_0 = 2nabB$.

En un point la résultante élémentaire des forces de Laplace vaut $d\vec{F}_L = id\vec{\ell} \wedge \vec{B}$. Sur les segments NP et QM, cette résultante est colinéaire à l'axe de $z'z$ et ne contribue donc pas au moment par rapport à $z'z$ des actions de Laplace. Sur le segment MN le moment élémentaire par rapport à l'axe $z'z$ vaut $dC = (a\vec{u}_r \wedge (id\vec{\ell} \wedge B\vec{u}_r)) \cdot \vec{u}_z = aiBdl$ soit une contribution au moment $C_{MN} = aiB \int_{MN} dl = abBi$. Pour le segment PQ, la force est opposée (l'intensité change de sens) de même que le sens du bras de levier, donc la contribution au couple est inchangée. Finalement, en tenant compte des n spires, $C_{em} = 2nabBi = \Phi_0 i$. Par symétrie, ce couple est dirigé selon $\vec{e}_z$, donc $\vec{C}_{em} = C_{em}\vec{u}_z$.

A.2

Le schéma électrocinétique donne : $U = L(di/dt) + Ri + E$.

A.3

L'axe zz' est un axe de symétrie du rotor, donc $\vec{\sigma} = J\vec{\Omega}$. Le théorème du moment cinétique s'écrit $J(d\Omega/dt) = -\vec{C}_u + \vec{C}_f + \vec{C}_{em}$.

Comme tous ces moments sont dirigés selon zz' , la projection de l'équation mécanique sur zz' s'écrit : $J(d\Omega/dt) = -C_u - \beta\Omega + i\Phi_0$.

A.4

On peut freiner le moteur en mettant l'induit en court-circuit ($U = 0$), car la force électromotrice E tend à faire circuler une intensité i de signe opposé à Ω , à l'origine d'un couple électromagnétique $C_{em} = \Phi_0 i$, également de signe opposé à Ω , constituant donc un couple de freinage.

Lorsque le moteur tourne en roue libre, il tend à s'arrêter car tous les moments sont résistants, y compris le couple électromagnétique.

A.5

En régime nominal établi, les grandeurs électriques sont constantes et les dérivées di/dt et $d\Omega/dt$ sont nulles ;

l'équation électrique du moteur s'écrit alors $U_{nom} = RI_{nom} + \Phi_0\Omega_{nom}$, soit

$$\Phi_0 = \frac{U_{nom} - RI_{nom}}{\Omega_{nom}} = 3,63.10^{-2} \text{ V.s.rad}^{-1}$$

A.6

En négligeant l'influence de l'inductance propre de l'induit, l'équation électrique simplifiée $U = Ri + \Phi_0 \Omega$ donne $i = (U - \Phi_0 \Omega)/R$, puis en reportant l'expression de l'intensité i dans l'équation mécanique :

$$J \frac{d\Omega}{dt} = \Phi_0 \left(\frac{U - \Phi_0 \Omega}{R} \right) - \beta \Omega - C_u$$

soit en regroupant les termes :

$$J \frac{d\Omega}{dt} + \left(\frac{\Phi_0^2}{R} + \beta \right) \Omega = \frac{\Phi_0 U}{R} - C_u$$

On déduit de cette équation linéaire du premier ordre à coefficients constants écrite sous la forme canonique $\tau(d\Omega/dt) + \Omega = \Omega_{lim}$ les valeurs

– du temps caractéristique

$$\tau = \frac{J}{\Phi_0^2/R + \beta} = 1,82 \text{ ms}$$

– de la vitesse angulaire limite

$$\Omega_{lim} = \frac{\Phi_0 U/R - C_u}{\Phi_0^2/R + \beta}$$

La solution générale de l'équation précédente $\Omega(t) = (\Omega(0) - \Omega_{lim}) \exp(-t/\tau) + \Omega_{lim}$, donne pour une vitesse initiale nulle $\Omega(t) = \Omega_{lim}(1 - \exp(-t/\tau))$. On atteint la vitesse limite à 1% près à l'instant τ' tel que $\Omega_{lim} - \Omega(\tau') = 10^{-2}\Omega_{lim}$, soit en reportant :

$$\tau' = \tau \ln 100 = 4,6\tau = 8,4 \text{ ms}$$

On retrouve bien $\tau' \approx 5\tau$.

A.7

En régime nominal, $\Omega_{lim} = N_{nom} = 3000 \text{ tr.min}^{-1}$. On déduit de l'expression précédente de Ω_{lim} l'expression de C_u en régime nominal :

$$C_u = \frac{\Phi_0 U_{nom}}{R} - \left(\frac{\Phi_0^2}{R} + \beta \right) \Omega_{lim} = \Phi_0 I_{nom} - \beta \Omega_{lim} = 0,087 \text{ N.m}$$

Au démarrage, $\Omega = 0$, donc l'équation électrique s'écrit en négligeant l'inductance (car sinon par continuité de i_L , i_d serait nul) : $U = Ri_d$, soit pour la tension nominale :

$$i_d = U_{nom}/R = 50 \text{ A}$$

Cette intensité est 20 fois plus élevée que l'intensité nominale. Il est nécessaire de démarrer le moteur sous tension réduite.

Au démarrage, l'équation du mouvement se simplifie en $J(d\Omega/dt) = \Phi_0 U/R - C_u$. Il y a démarrage si $d\Omega/dt > 0$, soit $\Phi_0 U/R - C_u > 0$, ce qui correspond à une tension minimale de démarrage pour le couple utile déterminé à partir des valeurs nominales :

$$U_{dmin} = \frac{RC_u}{\Phi_0} = 0,58 \text{ V}$$

B/ Commande du MCC par un hacheur

B.1

Un interrupteur idéal vérifie :

- dans l'état ouvert, $i = 0$;
- dans l'état fermé, $u = 0$.

Quelque soit l'état, la puissance instantanée est nulle, donc l'interrupteur ne consomme pas de puissance.

- Si l'interrupteur H_1 est fermé, la diode D_1 est polarisée en inverse (la tension à ses bornes est $-U_0$) donc elle se comporte comme un interrupteur ouvert.
- Si l'interrupteur H_1 est ouvert, la continuité de l'intensité i dans le moteur imposée par la présence de l'inductance, implique que la diode D_1 est fermée afin d'assurer la circulation du courant.

Remarque : l'énoncé se place implicitement dans l'hypothèse de fonctionnement en conduction continue : i ne s'annule jamais. En régime de conduction discontinue, les deux interrupteurs peuvent être simultanément ouverts.

B.2

Le rôle de la diode de roue libre D_1 est d'assurer la continuité du courant dans le moteur quand l'interrupteur H_1 est ouvert. En son absence, la présence de l'inductance L entraînerait des surtensions à chaque ouverture de H_1 .

B.3

- si $nT_{H1} < t < (n + \alpha)T_{H1}$, H_1 est fermé et $u(t) = U_0$ (pas de chute de tension aux bornes de H_1 fermé) ;
- si $(n + \alpha)T_{H1} < t < (n + 1)T_{H1}$, D_1 est fermé et $u(t) = 0$ (pas de chute de tension aux bornes de D_1 fermé).

B.4

D'après la question précédente,

$$\langle u(t) \rangle = \frac{1}{T_{H1}} \int_0^{T_{H1}} u(t) dt = \frac{1}{T_{H1}} \alpha T_{H1} U_0 = \alpha U_0$$

L'équation électrique s'écrit $u(t) = L(di/dt) + Ri + E \approx L(di/dt) + E$, soit en valeur moyenne sur une période :

$$\langle u(t) \rangle = \alpha U_0 = L \langle di/dt \rangle + \langle E \rangle = E$$

En effet, $i(t)$ est une fonction périodique donc sur une période $\langle di/dt \rangle = 0$, et l'hélice tourne à vitesse constante donc $E = \Phi_0 \Omega$ est une constante.

$$E = \alpha U_0 ; \Omega = \frac{E}{\Phi_0} = \frac{\alpha U_0}{\Phi_0} = 331 \alpha \text{ rad.s}^{-1} = 3,16 \cdot 10^3 \alpha \text{ tr.min}^{-1}$$

On obtient effectivement une vitesse de rotation proportionnelle à α , qui n'est pas exactement égale à $N_{nom} = 3000 \text{ tr.min}^{-1}$ lorsque $\alpha = 1$ car la chute de tension aux bornes de la résistance d'induit est négligée, contrairement au calcul de Φ_0 effectué à la question A.5.

Pour $\alpha = 0,6$, $\Omega = 1,9 \cdot 10^3 \text{ tr.min}^{-1}$.

B.5

En négligeant la résistance d'induit, l'équation approchée $u(t) \approx L(di/dt) + E$ donne dans chacune des 2 phases d'une période une évolution linéaire de l'intensité, la présence de l'inductance L imposant la continuité de l'intensité :

- si $nT_{H1} < t < (n + \alpha)T_{H1}$, $di/dt = (U_0 - E)/L > 0$, qui donne par intégration

$$i(t) = \frac{U_0 - E}{L}(t - nT_{H1}) + I_{min}$$

l'intensité croît linéairement de I_{min} à I_{max} ;

- si $(n + \alpha)T_{H1} < t < (n + 1)T_{H1}$, $di/dt = -E/L < 0$, soit

$$i(t) = -\frac{E}{L}(t - (n + \alpha)T_{H1}) + I_{max}$$

l'intensité décroît linéairement de I_{max} à I_{min} .

L'ondulation se calcule à partir de l'une ou l'autre des équations précédentes. Par exemple pour la première phase, $I_{max} = i((n + \alpha)T_{H1}) = (U_0 - E)\alpha T_{H1}/L + I_{min}$, d'où, puisque $E = \alpha U_0$:

$$\Delta I = \alpha(1 - \alpha)\frac{U_0 T_{H1}}{L}$$

Il est intéressant de diminuer l'ondulation du courant dans la mesure où les pertes par effet Joule dans la résistance d'induit augmentent avec l'ondulation.

Comme l'ondulation est inversement proportionnelle à l'inductance L , l'ajout d'une bobine de lissage en série avec le moteur permet de diminuer l'ondulation (lissage) en augmentant l'inductance équivalente de l'association moteur/bobine.

Sur le graphique, l'ondulation vaut 1 A, pour un rapport cyclique $\alpha = 0,6$ et une période $T_{H1} = 0,5$ ms. On en déduit :

$$L = \alpha(1 - \alpha)\frac{U_0 T_{H1}}{\Delta I} = 1,44 \text{ mH}$$

B.5

D'après le graphique, la valeur moyenne de l'intensité vaut, comme les variations sont linéaires :

$$\langle i(t) \rangle = \frac{I_{max} + I_{min}}{2} = 2,5 \text{ A}$$

On en déduit la chute de tension moyenne aux bornes de la résistance R , $\langle \Delta U \rangle = 0,6$ V, inférieure d'un facteur 10 à $E = \alpha U_0 = 7,2$ V. On peut en première approximation négliger cette chute de tension.

Les valeurs moyennes de l'intensité et de la tension déterminent le couple et la vitesse angulaire du moteur.

C/ Réalisation des signaux de commande du hacheur

C.1

Pour l'AO1 en régime linéaire,

- $v_- = v_+ = 0$
- $(U_{sat} - v_-)/R_1 - I = 0$ (loi des nœuds à l'entrée inverseuse)

soit

$$I = \frac{U_{sat}}{R_1}$$

L'AO1 permet d'effectuer une conversion tension-courant. Les AO 2 et 3 sont utilisés en montage suiveur pour isoler le montage de sortie de l'AO1 par rapport aux éléments placés en aval des AO 2 et 3.

C.2

À l'instant $t = 0$, la fermeture brève de H_2 permet la décharge de C_1 , donc

$$u_{C1}(t = 0^+) = 0$$

Entre les instants 0 et T_{H2} , l'intensité I traverse C_1 car l'intensité est nulle à l'entrée des montages suiveurs. Par conséquent $I = U_{sat}/R_1 = C_1(du_{C1}/dt)$, et après intégration, en tenant compte de la condition initiale $u_{C1}(t = 0^+) = 0$:

$$u_{C1}(0 < t < T_{H2}) = \frac{U_{sat}}{R_1 C_1} t$$

La brève fermeture de H_2 à l'instant T_{H2} permet à nouveau la décharge de C_1 , et le cycle recommence.

La période de $u_{C1}(t)$ est T_{H2} , et sa valeur maximale, obtenue en fin de charge vaut

$$U_{cmax} = \frac{T_{H2}}{R_1 C_1} U_{sat}$$

C.3

Les équations de fonctionnement de l'AO4 sont :

- loi des nœuds à l'entrée non inverseuse : $(v_{S3} - v_+)/R_4 + (0 - v_+)/R_4 = 0$, soit $v_+ = v_{S3}/2$.
- loi des nœuds à l'entrée inverseuse : $(v_{S2} - v_-)/R_4 + (u_0 - v_-)/R_4 = 0$, soit $v_- = (v_{S2} + u_0)/2$.
- $v_- = v_+$

Par conséquent $v_{S3} = v_{S2} + u_0$ et :

$$u_0 = v_{S3} - v_{S2} = u_{C1}$$

L'AO4 est donc utilisé en montage soustracteur, et la tension d'entrée sur la borne inverseuse de l'AO5 est $u_0 = u_{C1}$. L'ensemble des AO 2, 3 et 4 est nécessaire pour assurer que C_1 soit bien traversé par l'intensité I .

C.4

L'AO5 est utilisé en comparateur (les tensions sur ses 2 bornes d'entrée sont imposées).

Sur une période $[0, T_{H2}]$, $u_0(t) = u_{C1}$ varie entre 0 et U_{cmax} , donc comme V_{CONS} est compris entre ces deux valeurs, il y a basculement de l'AO5 à l'instant t_b compris entre 0 et T_{H2} tel que $u_{C1} = U_{cmax}t/T_{H2} = V_{CONS}$, soit

$$t_b = T_{H2} \frac{V_{CONS}}{U_{cmax}}$$

La tension $u_s(t)$ vérifie alors sur une période :

- si $0 < t < t_b$, $u_0(t) < V_{CONS}$, $u_s(t) = U_{sat}$
- si $t_b < t < T_{H2}$, $u_0(t) > V_{CONS}$, $u_s(t) = -U_{sat}$

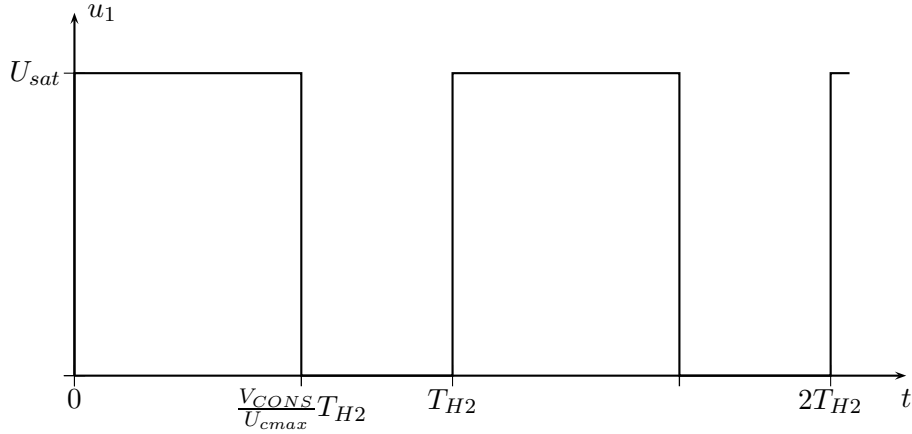
L'association $\{r, D_1\}$ constitue un montage redresseur :

- lorsque la diode est bloquée, $i = 0$, donc $u_1 = u_s$ avec la contrainte $u_1 \geq 0$;
- lorsque la diode est passante $u_1 = 0$ avec la contrainte $i = (u_1 - u_s)/r \geq 0$, soit $u_s \leq u_1 = 0$.

Par conséquent $u_1 = u_s$ si $u_s \geq 0$, et $u_1 = 0$ si $u_s \leq 0$.

Finalement sur une période $u_1(t)$ vérifie :

- $u_1(0 < t < T_{H2} V_{CONS}/U_{cmax}) = U_{sat}$;
- $u_1(T_{H2} V_{CONS}/U_{cmax} < t < T_{H2}) = 0$.



C.5

Si les diagrammes temporels du signal de commande et du hacheur se correspondent (l'interrupteur H_1 est fermé lorsque $u_1 = U_{sat}$, le rapport cyclique vérifie

$$\alpha = \frac{t_b}{T_{H2}} = \frac{V_{CONS}}{U_{cmax}} = \frac{V_{CONS}}{U_{sat}} \frac{R_1 C_1}{T_{H2}}$$

Le rapport cyclique α est proportionnel à la tension de consigne V_{CONS} qui permet donc de contrôler via α la vitesse de rotation du moteur.

Pour une valeur donnée du rapport cyclique ($\alpha = 0,6$), la valeur de la tension de consigne est donnée par :

$$V_{CONS} = \alpha \frac{T_{H2}}{R_1 C_1} U_{sat} = 3,6 \text{ V}$$

Le calcul de $\Omega = 1,9.10^3 \text{ tr.min}^{-1}$ pour cette valeur de α a été effectué à la question B.4.

D/ le capteur de vitesse

D.1

La fréquence des éclairs détectés est 30 fois plus élevée que la fréquence de rotation du moteur puisqu'il y a 30 éclairs par tour, d'où en convertissant la fréquence de rotation en tr.s^{-1} , $N_D = 30.2000/60 = 1000 \text{ Hz}$, et $T_D = 1 \text{ ms}$.

D.2

Pour la tension u_T :

- lorsque le phototransistor T est passant, $u_T = 0$;
- lorsqu’il est bloqué, l’intensité traversant sa branche est nulle (la résistance d’entrée de l’AO6 est infinie), donc la chute de tension aux bornes de la résistance R_2 en série avec T est nulle, et $u_T = U_{SAT} - u_{R2} = U_{SAT}$

Le potentiel v^- est associé au potentiel de sortie u_{S6} de l’AO6, via le redresseur {r, D₃}, qui impose $v^- = u_{S6}$ si $u_{S6} \geq 0$, et $v^- = 0$ si $u_{S6} \leq 0$. Les potentiels d’entrée de l’AO6 sont imposés de l’extérieur ; il se comporte donc en comparateur, avec pour tension différentielle d’entrée $\varepsilon_6 = V_1 - u_T$.

- si T est passant, $u_T = 0$, $\varepsilon_6 = V_1 > 0$, $u_{S6} = U_{SAT} > 0$ donc $v^- = U_{SAT}$;
- si T est bloqué, $u_T = U_{SAT}$, $\varepsilon_6 = V_1 - U_{SAT} < 0$, $u_{S6} = -U_{SAT} < 0$ donc $v^- = 0$;

Dans l’état stable du montage les potentiels sont constants, donc la tension u_{C7} aux bornes du condensateur est constante, ce qui entraîne $i = 0$ et $v^+ = Ri + V_0 = V_0$, quelque soit l’état du phototransistor T.

L’AO7 fonctionne en comparateur de tension différentielle d’entrée ε , ce qui permet de déterminer $u_2 = \pm U_{SAT}$ selon le signe de ε , puis $u_{C7} = u_2 - v^+ = u_2 - V_0$ et ainsi de compléter le tableau ci-dessous.

	u_T	v^-	v^+	ε	u_2	u_{C7}
T passant	0	U_{SAT}	V_0	$V_0 - U_{SAT} < 0$	$-U_{SAT}$	$-U_{SAT} - V_0$
T bloqué	U_{SAT}	0	V_0	$V_0 > 0$	U_{SAT}	$U_{SAT} - V_0$

D.3

Si les potentiels ne sont pas supposés constants, la loi des nœuds appliquée à l’entrée non inverseuse de l’AO7 s’écrit :

$$\frac{V_0 - v^+}{R_0} + i = \frac{V_0 - v^+}{R_0} + C_7 \frac{du_{C7}}{dt} = 0$$

soit

$$v^+ = V_0 + R_0 C_7 \frac{du_{C7}}{dt}$$

D’autre part

$$u_{C7} = u_2 - v^+$$

D.4

En éliminant u_{C7} dans les équations précédentes, on obtient :

$$v^+ = V_0 + R_0 C_7 \frac{d(u_2 - v^+)}{dt}$$

soit l’équation différentielle en v^+ , simplifiée dans l’hypothèse où u_2 est constant et écrite en introduisant la constante de temps $\tau = R_0 C_7 = 0,125$ s :

$$\tau \frac{dv^+}{dt} + v^+ = V_0 + \tau \frac{du_2}{dt} = V_0$$

Remarque : les données de l’énoncé conduisent à une valeur trop importante de τ , qui doit être en réalité suffisamment petit devant T_D pour que le régime stable puisse être atteint en un temps inférieur à T_D (voir plus loin).

D.5

La grandeur électrique continue pour un condensateur est la tension u_C à ses bornes. Ceci est une conséquence de la continuité de l'énergie, qui pour un condensateur est proportionnelle à u_C^2 . C'est de manière équivalente une conséquence de la non divergence de l'intensité $i_C = C(du_C/dt)$ traversant le condensateur.

D.6

On suppose qu'à $t = 0^-$ le système est stable et T bloqué, donc $v^+(0^-) = V_0$, $u_2(0^-) = U_{SAT}$ et $u_{C7}(0^-) = U_{SAT} - V_0$.

À l'instant $t = 0$, T devient passant, donc v^- bascule à U_{SAT} ce qui entraîne le basculement de u_2 à $u_2(0^+) = -U_{SAT}$. La continuité de u_{C7} implique

$$u_2(0^+) - v^+(0^+) = u_{C7}(0^+) = u_{C7}(0^-) = U_{SAT} - V_0$$

soit

$$v^+(0^+) = u_2(0^+) + V_0 - U_{SAT} = V_0 - 2U_{SAT}$$

v^+ vérifie ensuite l'équation différentielle de la question D.4, valable tant que u_2 ne bascule pas : $\tau(dv^+/dt) + v^+ = V_0$, qui admet pour solution générale $v^+(t) = A \exp(-t/\tau) + V_0$, soit en tenant compte de la condition initiale :

$$v^+(t > 0) = -2U_{SAT} \exp(-t/\tau) + V_0$$

puis

$$u_{C7}(t > 0) = u_2 - v^+ = -U_{SAT} - V_0 + 2U_{SAT} \exp(-t/\tau)$$

Lorsque le transistor repasse dans l'état bloqué à l'instant $t_D \ll \tau$ (t_D est de l'ordre de la microseconde alors que $\tau = 0,125$ s), $v^+(t_D) \approx v^+(0^+) = -2U_{SAT} + V_0$ et $v^- = 0$, donc ε reste négatif; u_2 ne bascule pas et reste égal à $-U_{SAT}$.

D.7

u_2 bascule lorsque v^+ redevient supérieur à v^- . Ceci ne peut se produire que lorsque T est bloqué ($v^- = 0$) donc lorsque v^+ redevient positif (si T est passant $v^- = U_{SAT} > v^+(t)$).

Le basculement se produit à l'instant t_0 tel que $v^+(t_0) = -2U_{SAT} \exp(-t_0/\tau) + V_0 = 0$, soit :

$$t_0 = \tau \ln \left(\frac{2U_{SAT}}{V_0} \right) = 0,4 \text{ s}$$

À l'instant t_0^- , $u_2 = -U_{SAT}$ et $v^+ = 0$ donc $u_{C7}(t_0) = -U_{SAT}$. À l'instant t_0^+ , u_2 a basculé à la valeur U_{SAT} , la continuité de u_{C7} entraîne alors $v^+(t_0^+) = u_2(t_0^+) - u_{C7}(t_0) = 2U_{SAT}$.

En notant $t' = t - t_0$, la résolution de l'équation différentielle vérifiée par v^+ pour $t > t_0$ soit $t' > 0$ avec la condition initiale précédente donne :

$$v^+(t > t_0) = (2U_{SAT} - V_0) \exp(-t'/\tau) + V_0 = (2U_{SAT} - V_0) \exp(-(t - t_0)/\tau) + V_0$$

La tension v^+ reste constamment positive pour $t > t_0$ si u_2 reste égal à U_{SAT} . En l'absence d'impulsion $v^- = 0$, et $\varepsilon = v^+ - v^- > 0$, donc u_2 ne bascule pas tant qu'il n'y a pas de nouvelle impulsion.

Par contre pour qu'il puisse y avoir basculement à l'impulsion suivante, il faut que v^+ soit revenu à une valeur inférieure à v^- au moment de l'impulsion soit U_{SAT} . La valeur de

τ résultant des données de l'énoncé entraîne le passage de nombreuses impulsions entre $t = 0$ et $t_0 = 0,4$ s (environ 400) puis avant la nouvelle bascule de u_2 : les données de l'énoncé ne permettent pas un fonctionnement satisfaisant du montage comme indiqué en D.4.

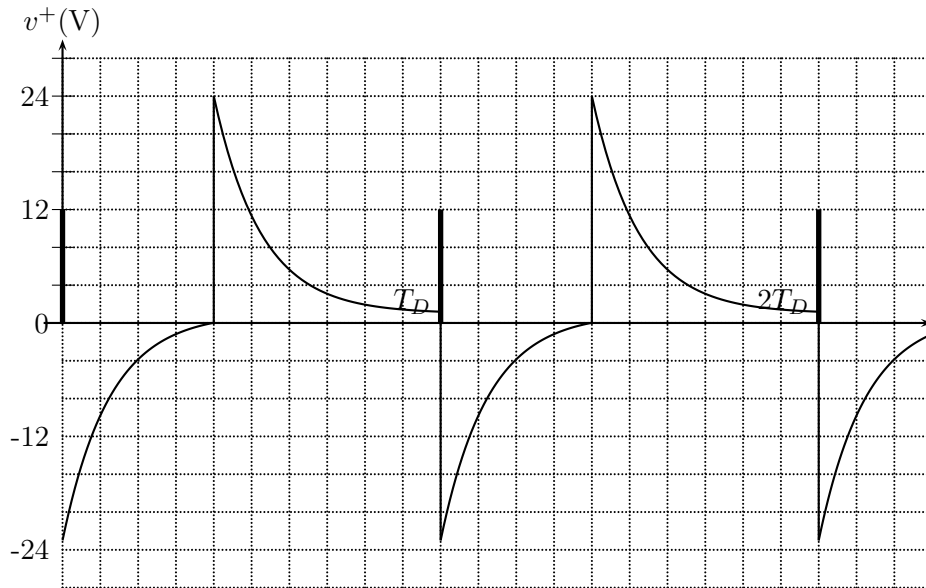
Pour obtenir une bascule à chaque impulsion, il faut que τ soit suffisamment petit devant T_D . Par exemple si $C_7 = 12,5$ nF, $\tau = 0,125$ ms et $t_0 = 0,4$ ms est inférieur à T_D . Comme $5\tau = 0,625$ ms, on peut supposer qu'à l'instant T_D où se produit la nouvelle impulsion $v^+ \approx V_0$, donc les calculs effectués précédemment s'appliquent à chaque période : $u_2(t)$ est alors un signal périodique de période T_D , égal à $-U_{SAT}$ entre 0 et t_0 et à $+U_{SAT}$ entre t_0 et T_D .

La tension de sortie u_2 du premier bloc n'a que deux états possibles $\pm U_{SAT}$; dans l'état de repos de l'entrée (T bloqué, $v_- = 0$), seul l'état U_{SAT} est stable d'où l'appellation monostable ; une impulsion à l'entrée entraîne le basculement de la sortie dans l'état $-U_{SAT}$, mais celle-ci évolue toujours vers l'état stable U_{SAT} en l'absence de nouvelle impulsion.

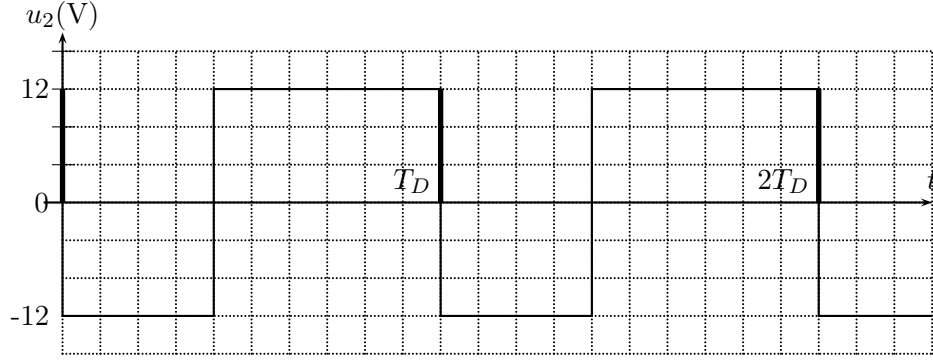
D.8

On effectue les tracés dans le cas où $\tau = 0,125$ ms soit $t_0 = 0,4$ ms et $T_D = 1$ ms avec :

- $v^+(0^+) = -23$ V, $v^+(t_0^-) = 0$ V, $v^+(t_0^+) = 24$ V, $v^+(T_D) \approx V_0 = 1$ V ;
- $u_2(0^+ < t < t_0) = -U_{SAT} = -12$ V ; $u_2(t_0 < t < T_D) = +U_{SAT} = +12$ V



chronogramme 1



chronogramme 2

D.9

La temporisation correspond à la durée t_0 de fonctionnement dans l'état non stable, alors que les impulsions de déclenchement ont une durée négligeable.

D.10

En basse fréquence, le condensateur C8 est équivalent à un interrupteur ouvert. Le condensateur peut être omis sur le schéma équivalent à basse fréquence qui est celui d'un amplificateur. La loi des nœuds à l'entrée inverseuse donne $(u_2 - 0)/R_7 + (u_3 - 0)/R_8 = 0$ soit

$$u_3 = -\frac{R_8}{R_7} u_2$$

En haute fréquence, la résistance R8 est court-circuitée par le condensateur qui se comporte à la limite des très grandes fréquences comme un court-circuit ; le schéma équivalent peut être tracé en omettant R8. u_3 tend alors vers 0, et le montage coupe les hautes fréquences. De manière plus précise en haute fréquence le montage se comporte comme un intégrateur. La loi des nœuds s'écrit $u_2/R_7 + C_8(du_3/dt) = 0$, soit

$$\frac{du_3}{dt} = -\frac{u_2}{R_7 C_8}$$

ce qui correspond bien à un intégrateur.

D.11

Dans le cas général la loi des nœuds à l'entrée inverseuse de l'AO8 s'écrit, comme $v^- = v^+ = 0$:

$$\frac{u_2}{R_7} + \frac{u_3}{R_8} + jC_8\omega u_3 = 0$$

soit

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{u_3}{u_2} = -\frac{1/R_7}{1/R_8 + jC_8\omega} = \frac{-R_8/R_7}{1 + jR_8C_8\omega}$$

On retrouve les valeurs asymptotiques précédentes, avec à basse fréquence un inverseur ($G_{BF} = 0$, $\varphi_{BF} = \pi$) car $R_7 = R_8$, et à haute fréquence un intégrateur (pente de -20 dB/décade, $\varphi_{HF} = \pi/2$). La pulsation de coupure de ce filtre a pour expression $\omega_c = 1/(R_8C_8)$, donc de fréquence de coupure :

$$N_c = \frac{1}{2\pi R_8 C_8} = 0,16 \text{ Hz}$$

D.12

Le filtre a une fréquence de coupure $N_c = 0,16$ Hz beaucoup plus basse que la fréquence $N_D = 1$ kHz de u_2 , donc le filtre ne conserve que la valeur moyenne de $u_2(t)$ en l'inversant : $u_3 = -(R_8/R_7) \langle u_2(t) \rangle$.

Le calcul de $\langle u_2(t) \rangle$ donne puisque $u_2(0 < t < t_0) = -U_{SAT}$ et $u_2(t_0 < t < T_D) = U_{SAT}$:

$$\langle u_2(t) \rangle = \frac{-U_{SAT}t_0 + U_{SAT}(T_D - t_0)}{T_D} = U_{SAT}(1 - 2N_D t_0) = U_{SAT}(1 - 60N t_0)$$

Car la fréquence N_D des éclairs est 30 fois plus élevée que la fréquence de rotation du moteur : $N_D = 30N$. Par conséquent comme $R_8 = R_7$:

$$u_3 = U_{SAT} \left(\frac{R_8}{R_7} \right) (60N t_0 - 1) = U_{SAT} (60N t_0 - 1)$$

D.13

L'AO9 est monté en suiveur, de sorte que l'AO8 fonctionne effectivement en sortie ouverte.

À la sortie de l'AO9 le potentiel est égal à u_3 , donc $u_4 = u_3 + U_{SAT} = U_{SAT}60N t_0$. Le générateur de tension en sortie sert à éliminer la composante du signal de sortie qui ne dépend pas de la vitesse de rotation du moteur.

D.14

D'après la question précédente $u_4 = 60U_{SAT}t_0N$, donc la tension de sortie u_4 est proportionnelle à la fréquence de rotation N donc à la vitesse angulaire Ω du moteur ce qui réalise la conversion fréquence-tension.

Deuxième partie : métallurgie du cobalt

A/ Grillage sulfatant du sulfure de cobalt

A.1

De l'enthalpie standard de réaction $\Delta_r G^\circ_A = -294400 + 44T = \Delta_r H^\circ - T\Delta_r S^\circ$, on déduit dans le cadre de l'approximation d'Ellingham

$$\Delta_r H^\circ = -294,4 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

$\Delta_r H^\circ < 0$ donc la réaction est exothermique et se produit avec un dégagement de chaleur qui tend à maintenir le réacteur à une température élevée.

A.2

D'après la loi d'action de masses :

$$K_A^\circ = \frac{p(\text{SO}_2)_{\text{éq}}^{16/25} p^{\circ 9/25}}{p(\text{O}_2)_{\text{éq}}}$$

La constante d'équilibre est liée à $\Delta_r G^\circ$ par la relation

$$K_A^\circ(T) = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^\circ}{RT}\right) = 7,87.10^{13} \text{ à } 950 \text{ K}$$

A.3

En prenant le logarithme décimal de la loi d'action de masse, on obtient la relation :

$$\frac{16}{25} \log p(\text{SO}_2)_{\text{éq}} - \log p(\text{O}_2)_{\text{éq}} = \log K_A^\circ$$

soit

$$\log p(\text{SO}_2)_{\text{éq}} = \frac{25}{16} \log p(\text{O}_2)_{\text{éq}} + \frac{25}{16} \log K_A^\circ$$

La variation de $\log p(\text{SO}_2)_{\text{éq}}$ avec $\log p(\text{O}_2)_{\text{éq}}$ est bien affine. Le calcul donne $(25/16) \log K_A^\circ = 21,71$, soit

$$\log p(\text{SO}_2)_{\text{éq}} = 21,71 + 1,5625 \log p(\text{O}_2)_{\text{éq}} = a + b \log p(\text{O}_2)_{\text{éq}}$$

avec $a = 21,71$ et $b = 25/16 = 1,5625$.

A.4

L'affinité chimique s'écrit $A = RT \ln(K_A^\circ/Q)$, soit

$$A = RT \ln \left(\frac{K_A^\circ p(\text{O}_2)}{p(\text{SO}_2)^{16/25} p^{\circ 9/25}} \right)$$

La droite A a une pente positive égale à 25/16, d'où son allure (voir le schéma complet). Si on se place à $p(\text{SO}_2)$ constant, on se déplace sur une droite horizontale, qui coupe A lorsque les pressions partielles vérifient la condition d'équilibre chimique.

- Les points de la droite A correspondent à l'équilibre chimique, pour lequel l'affinité A est nulle.
- Si on se déplace à partir de A vers la gauche, $\log p(\text{O}_2)$ donc $p(\text{O}_2)$ décroissent. D'après l'expression de l'affinité, celle-ci décroît également et devient négative : la réaction (A) est totalement déplacée dans le sens inverse, donc CoO n'est pas présent, et le domaine situé à gauche de A est domaine d'existence de $\text{Co}_9\text{S}_{8(s)}$.
- Inversement, si on se déplace vers la droite depuis A, $p(\text{O}_2)$ augmente et l'affinité chimique devient positive : la réaction (A) est totalement déplacée dans le sens direct, et on se trouve dans le domaine d'existence de $\text{CoO}_{(s)}$.

A.5

La température d'inversion de l'équilibre (B) vérifie $\Delta_r G_B^\circ(T_i) = 0$, soit

$$T_i = \frac{707200}{571} = 1240 \text{ K}$$

À 950 K, en-dessous de la température d'inversion $T_i = 1240 \text{ K}$, $\Delta_r G_B^\circ(T_i) < 0$, donc $K_B^\circ > 1$: la réaction (B) est qualitativement favorisée dans le sens direct donc la sulfatation se produit.

A.6

D'après la loi d'action de masses :

$$K_B^\circ = \frac{p^{\circ 3}}{p(\text{O}_2)_{\text{éq}} p(\text{SO}_2)_{\text{éq}}^2}$$

La constante d'équilibre est liée à $\Delta_r G_B^\circ$ par la relation

$$K_B^\circ(T) = \exp\left(-\frac{\Delta_r G_B^\circ(T)}{RT}\right) = 1,16 \cdot 10^9 \text{ à } 950 \text{ K}$$

A.7

De la même manière qu'en A.3, on obtient en prenant le logarithme décimal de la loi d'action de masse pour la réaction (B) :

$$2 \log p(\text{SO}_2)_{\text{éq}} + \log p(\text{O}_2)_{\text{éq}} = -\log K_B^\circ = -9,06$$

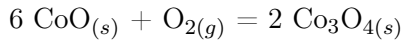
Soit la relation :

$$\log p(\text{SO}_2)_{\text{éq}} = -4,53 - 0,5 \log p(\text{O}_2)_{\text{éq}} = c + d \log p(\text{O}_2)_{\text{éq}}$$

$$c = -4,53, d = -0,5.$$

A.8

L'équation d'oxydation de l'oxyde de cobalt en Co_3O_4 s'écrit :



Les données de l'énoncé et la loi d'Hess permettent de calculer pour cette réaction :

- $\Delta_r H^\circ = -355 \text{ kJ.mol}^{-1}$;
- $\Delta_r S^\circ = -318,2 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$;

D'où à 950 K, $\Delta_r G^\circ = -52,71 \text{ kJ.mol}^{-1}$ et $K^\circ = 794$. La condition d'équilibre s'écrit $K^\circ = p^\circ/p(\text{O}_2)_{\text{éq}}$, soit

$$\log p(\text{O}_2)_{\text{éq}} = -\log K^\circ = -2,9$$

A.9

Les équations des droites A et B sont :

- (A) : $\log p(\text{SO}_2)_{\text{éq}} = 21,71 + 1,5625 \log p(\text{O}_2)_{\text{éq}}$;
- (B) : $\log p(\text{SO}_2)_{\text{éq}} = -4,53 - 0,5 \log p(\text{O}_2)_{\text{éq}}$

L'intersection de ces droites est définie par

$$\log p(\text{SO}_2)_\Omega = 21,71 + 1,5625 \log p(\text{O}_2)_\Omega = -4,53 - 0,5 \log p(\text{O}_2)_\Omega$$

soit

$$\log p(\text{O}_2)_\Omega = \frac{-4,53 - 21,71}{1,5625 + 0,5} = -12,7 ; \log p(\text{SO}_2)_\Omega = 1,83$$

A.10

Obtention de l'équation bilan : $\text{CoS}_{2(s)} + \dots = \text{CoSO}_{4(s)} + \dots$

- les atomes de cobalt Co sont équilibrés ;
- les atomes de soufre S sont équilibrés à l'aide de $\text{SO}_{2(g)}$:
 $\text{CoS}_{2(s)} + \dots = \text{CoSO}_{4(s)} + \text{SO}_{2(g)} + \dots$
- les atomes d'oxygène sont équilibrés à l'aide de $\text{O}_{2(g)}$:
 $\text{CoS}_{2(s)} + 3 \text{O}_{2(g)} = \text{CoSO}_{4(s)} + \text{SO}_{2(g)}$: réaction équilibrée ;
- enfin les coefficients stœchiométriques sont multipliés pour que le coefficient de $\text{O}_{2(g)}$ soit égal à 1 : $\frac{1}{3} \text{CoS}_{2(s)} + \text{O}_{2(g)} = \frac{1}{3} \text{CoSO}_{4(s)} + \frac{1}{3} \text{SO}_{2(g)}$

La loi d'action de masse pour cet équilibre s'écrit :

$$K^\circ = \frac{p(\text{SO}_2)_{\text{éq}}^{1/3} p^{\circ 2/3}}{p(\text{O}_2)_{\text{éq}}}$$

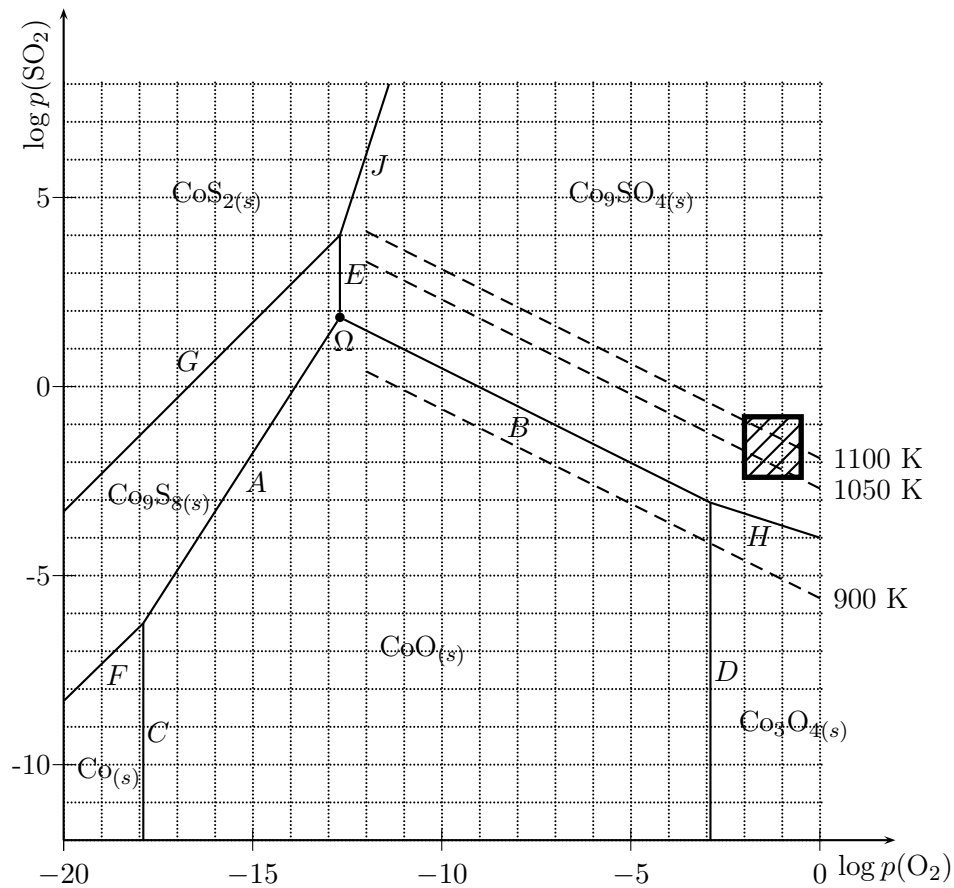
d'où en prenant le logarithme décimal :

$$\log p(\text{SO}_2)_{\text{éq}} = 3 \log p(\text{O}_2)_{\text{éq}} + 3 \log K^\circ$$

La pente de la droite correspondante J est donc égale à 3.

A.11

Voir schéma. Pour 3 espèces A,B et C, les 3 droites correspondant aux équilibres A/B, B/C et C/A sont concourantes, ce qui permet le tracé par continuité.



A.12

Voir schéma

A.13

Pour obtenir le grillage sulfatant du cobalt quelque soit les pressions partielles de $\text{O}_{2(g)}$ et de $\text{SO}_{2(g)}$ le domaine hachuré soit être entièrement situé dans le domaine d'existence du sulfate CoSO_4 . La température soit être inférieure à 1050 K pour cela.

A.14

Sur la figure c1, la zone hachurée se trouve partiellement dans le domaine du sulfate de cuivre : le cuivre est sulfaté lors du grillage à 950 K. Par contre sur la figure c2 la zone hachurée est située en dehors du domaine du sulfate de fer : le fer n'est pas sulfaté lors du grillage à 950 K et reste sous forme d'oxyde Fe_2O_3 .

A.15

Lors de l'extraction les sulfates passent en solution alors que les oxydes restent insolubles, donc on obtient en solution les sulfates de cobalt et de cuivre, tandis que le fer reste sous forme d'oxyde insoluble. L'opération d'extraction permet d'éliminer le fer mais pas le cuivre.

A.16

Comme la droite B s'élève lorsque la température augmente, la sulfatation est défavorisée par une élévation de température.

À 950 K, les diagrammes montrent que le domaine de pressions accessibles est totalement situé dans le domaine d'existence du sulfate de cobalt, tandis qu'il ne recouvre que partiellement le domaine d'existence du sulfate de cuivre. Par conséquent la sulfatation du cobalt est légèrement favorisée par rapport à celle du cuivre.

En élevant la température on peut donc envisager de ne sulfater que le cobalt. Cependant le contrôle de la température est délicat car la plage de température permettant la séparation est limitée (quelques dizaines de degrés) et située à haute température ; ceci nécessite également de limiter les écarts de température dans le four de manière à obtenir une température aussi uniforme que possible, ce qui reste délicat à haute température.

B/ électrolyse du sulfate de cobalt

B.1

Les espèces présentes sont

- Co^{2+} appartenant au couple (Co^{2+}/Co) ;
- l'eau et les ions H_3O^+ appartenant aux couples ($\text{H}_3\text{O}^+/\text{H}_{2(g)}$) et ($\text{O}_{2(g)}/\text{H}_2\text{O}$)

Les réactions envisageables sont :

- À l'anode l'oxydation de l'eau : $2 \text{H}_2\text{O} = \text{O}_{2(g)} + 4 \text{H}^+ + 4 \text{e}^-$, ou en utilisant l'espèce H_3O^+ : $6 \text{H}_2\text{O} = \text{O}_{2(g)} + 4 \text{H}_3\text{O}^+ + 4 \text{e}^-$, de potentiel d'électrode :

$$E = E^\circ(\text{O}_{2(g)}/\text{H}_2\text{O}) + \frac{RT}{4F} \ln \left(\frac{h^4 p(\text{O}_{2(g)})}{p^\circ} \right) = 1,23 - 0,06 \text{pH} = 1,05 \text{ V}$$

- À la cathode les réductions :

- de Co^{2+} : $\text{Co}^{2+} + 2 \text{e}^- = \text{Co}$; $E = E^\circ(\text{Co}^{2+}/\text{Co}) + 0,03 \log([\text{Co}^{2+}]/c^\circ)$. La solution contient 50 g/L de $\text{CoSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$ de masse molaire $M = 281 \text{ g/mol}$, soit $[\text{Co}^{2+}] = 0,178 \text{ mol/L}$, et un potentiel d'électrode $E = -0,31 \text{ V}$
- des ions H_3O^+ : $2 \text{H}_3\text{O}^+ + 2 \text{e}^- = \text{H}_{2(g)} + 2 \text{H}_2\text{O}$;

$$E = E^\circ(\text{H}_3\text{O}^+/\text{H}_{2(g)}) + 0,03 \log \left(\frac{h^2 p^\circ}{p(\text{H}_{2(g)})} \right) = -0,06 \text{pH} = -0,18 \text{ V}$$

B.2

- À l'anode seule l'oxydation de l'eau intervient ;
- à la cathode la réduction la plus favorisée thermodynamiquement est celle de l'oxydant le plus fort, associé au potentiel d'électrode le plus élevé, dans le cas présent l'eau. La réduction favorisée est celle de l'eau.

Du point de vue thermodynamique, l'électrolyse favorisée est l'électrolyse de l'eau en $O_{2(g)}$ à l'anode et $H_{2(g)}$ à la cathode.

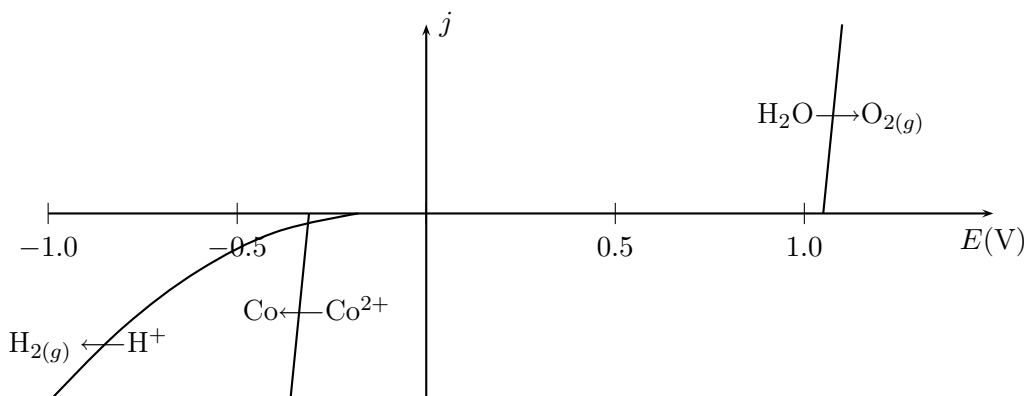
Elle a lieu pour une différence de potentiel supérieure à la différence de potentiels d'électrode :

$$U_{min} = 1,05 + 0,18 = 1,23 \text{ V}$$

B.3

En tenant compte des surtensions, les potentiels d'électrode à la limite de l'intensité nulle valent :

- oxydation de l'eau en $O_{2(g)}$ sur anode de graphite : $E = 1,05 + \eta_a = 1,75 \text{ V}$;
- réduction de l'eau en $H_{2(g)}$ sur cathode en aluminium : $E = -0,18 + \eta_c(H_2) = -0,28 \text{ V}$;
- réduction de Co^{2+} sur cathode d'aluminium : $E = -0,31 + \eta_c(Co) = -0,41 \text{ V}$



À courant nul la réduction de l'eau reste favorisée (les surtensions cathodiques sont égales) ; cependant la réduction de Co^{2+} est favorisée dès que le potentiel de cathode est suffisamment bas du fait de la faible pente pour le couple ($H_3O^+/H_{2(g)}$) sur Al : à un potentiel de cathode donné où la réduction de Co^{2+} se produit, la densité de courant associée à la réduction de Co^{2+} est très grande devant celle associée à la réduction de l'eau.

Finalement la réduction de Co^{2+} est favorisée du point de vue cinétique.

B.4

- oxydation anodique de l'eau : $6 H_2O = O_{2(g)} + 4 H_3O^+ + 4 e^-$;
 - réduction cathodique de Co^{2+} : $Co^{2+} + 2 e^- = Co$;
- d'où l'équation bilan de l'électrolyse : $2 Co^{2+} + 6 H_2O = 2 Co_{(s)} + O_{2(g)} + 4 H_3O^+$

B.5

La tension minimale d'électrolyse est la somme :

- de la différence minimale de potentiels d'électrode permettant l'obtention de Co, $\Delta E = 1,75 + 0,41 = 2,16$ V ;
- de la chute ohmique égale à 1,1 V ;

On en déduit la tension minimale d'électrolyse $U_{min} = 3,26$ V.

B.6

On suppose que la seule réduction se produisant est celle de Co^{2+} . L'obtention d'une mole de Co nécessite 2 moles d'électrons. Le nombre de moles d'électrons échangés pendant $\Delta t = 1$ jour = 86400 s est $N_e = I\Delta t/F$, soit $N_{\text{Co}} = I\Delta t/(2F)$ soit

$$m(\text{Co}) = M_{\text{Co}}N_{\text{Co}} = \frac{M_{\text{Co}}I\Delta t}{2F} = 264 \text{ kg}$$

B.7

Le rendement faradique est la fraction d'électrons utiles, c'est à dire participant effectivement à l'obtention du cobalt. Il est égal au rapport entre la masse de cobalt réellement obtenue et la masse théorique de cobalt obtenue pendant la même durée, si la seule réduction se produisant est celle de Co^{2+} . On en déduit

$$\rho_F = 256/264 = 0,97$$

97% des électrons sont utiles, 3% participent à la réduction parasite de l'eau, qui se produit toujours aux potentiels de cathode permettant la réduction de Co^{2+} .

B.8

En une journée, la charge échangée sous la tension d'électrolyse $U = 3,5$ V est égale à $q = I\Delta t$, soit une énergie quotidienne nécessaire $W = UI\Delta t = 3,024.10^9$ J pour la production d'une masse de cobalt $m(\text{Co}) = 256$ kg. L'énergie massique nécessaire est donc égale à :

$$W_m = \frac{UI\Delta t}{m(\text{Co})} = 11,8.10^3 \text{ kJ.kg}^{-1}$$