

"Gouttes d'eau et arc-en-ciel"

I - Gouttes et bullesI.1. Temps de transit dans l'atmosphère

1. En négligeant la poussée d'Archimède ($\rho \gg \rho_{\text{air}}$), $m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} + \vec{F}$ conduit pour $\vec{v}(t)$ à une équation de la forme $\tau \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} = \vec{V}_{\text{lim}}$. V_{lim} est donné par

$$mg = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho g = 6\pi\eta \frac{a V_{\text{lim}}}{(1+l/a)} \quad \text{d'où} \quad \boxed{V_{\text{lim}} = \frac{2}{3} \rho g \frac{a^2}{\eta} (1+l/a)}$$

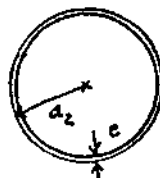
2. $\frac{2}{3} \frac{\rho g}{\eta} = 1,28 \cdot 10^8 \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$; pour les valeurs a_1 et a_2 proposées, la correction en l/a est négligeable.

$$a_1 = 10^{-5} \text{ m} \rightarrow V_{\text{lim}} \approx 1,3 \text{ cm s}^{-1}$$

$$a_2 = 10^{-4} \text{ m} \rightarrow V_{\text{lim}} \approx 1,3 \text{ ms}^{-1}$$

3. $h = 8 \text{ km}$. $a_1 = 10^{-5} \text{ m} \rightarrow$ temps de transit $t_1 = \frac{h}{V_{\text{lim}}} = 6,2 \cdot 10^3 \text{ s} \sim 1 \text{ semaine} \dots$
 $a_2 = 10^{-4} \text{ m} \rightarrow$ temps de transit $t_2 = 6,2 \cdot 10^3 \text{ s} \sim 1 \text{ h } 45 \text{ min}$.

4. Pour la bulle, $\frac{e}{a_2} = 0,1$, donc on peut convenablement approcher le volume par $4\pi a_2^2 e$. La correction l/a_2 est toujours négligeable; donc $4\pi a_2^2 e \rho g \approx 6\pi\eta a_2 V_{\text{lim}}$
d'où $V_{\text{lim}} \approx \frac{2}{3} a_2 e \frac{\rho g}{\eta} \approx 0,38 \text{ ms}^{-1}$, d'où un temps de transit $t_3 = 2,1 \cdot 10^4 \text{ s}$
soit un peu moins de 6h.

I.2. Chute d'une goutte à travers un nuage

5. et 6. N.B.: l'équation (admise) $\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$ suppose la gouttelette qui compose le nuage immatérielle (ce qui est précisé par l'énoncé).

En ignorant la traînée $\vec{F}$, $m\vec{g} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{v} \frac{dm}{dt} + m \frac{d\vec{v}}{dt}$; avec l'hypothèse $\frac{1}{m} \frac{dm}{dt} = \lambda v$, on obtient $m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - \lambda m v \vec{v}$: cela fait apparaître une "traînée effective" en v^2 .

En projetant sur $\vec{u}_2$ vertical descendant: $\frac{dv}{dt} = g - \lambda v^2 = g \left[1 - \frac{v^2}{V_{\text{lim}}^2} \right]$

$$\text{où } \boxed{V_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{g}{\lambda}}}$$

→ En posant $u = \frac{v}{V_{\text{lim}}}$, il vient $\frac{du}{1-u^2} = \frac{g dt}{V_{\text{lim}}}$ d'où $\text{Arctg}(u) = \frac{gt}{V_{\text{lim}}}$ (car

$$v=0 \text{ pour } t=0) \quad \text{On pose } \boxed{\tau_0 = \frac{V_{\text{lim}}}{g} = \frac{1}{\sqrt{g\lambda}}} \quad \text{et } \boxed{v(t) = V_{\text{lim}} \tanh(t/\tau_0)}$$

7. Avec $\lambda = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$, on trouve $V_{\text{lin}} = 160 \text{ m}^{-1}$ (ce qui est très grand) et $\tau_2 \approx 4 \text{ s}$

Avec le modèle de la question 1, on trouverait une telle durée linéaire pour $a \approx 1 \text{ mm}$:

→ le freinage par accretions ne domine que pour les très grosses gouttes (pluie d'orage traversant des nuages bas par exemple)

I.3. Forme des gouttes (nombre de Bond)

8. $\delta W = \gamma \Delta A$ donc γ est en $\text{J} \cdot \text{m}^{-2}$ ou en $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$

ρg est en $\text{N} \cdot \text{m}^{-3}$ → $\frac{\gamma}{\rho g}$ est homogène à une aise, on propose $L_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$

$$L_c \approx 8,5 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,85 \text{ mm} \quad \text{avec } \gamma = 7 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}.$$

9. $\Delta p_h = 2\gamma/a$ et $\frac{\Delta p_h}{\Delta p_c} = \frac{\rho g a^2}{\gamma} = \left(\frac{a}{L_c}\right)^2$.

10. La goutte est très sphérique si c'est la tension superficielle qui domine (minimisation de l'aire pour un volume donné), c'est à dire si $\Delta p_c \gg \Delta p_h$ ou $\boxed{a \ll L_c}$
 $\rightarrow$ les goutelettes de rayon $\leq 0,1 \text{ mm}$ sont parfaitement sphériques. $\boxed{B \ll 1}$

II Arcs-en-ciel

II.1. Approche géométrique (Descartes)

11. Arc primaire : 1 réflexion interne, $\theta_1 = 2(i-r) + \pi - 2r = \pi + 2i - 4r = \pi - \varphi_1$.

$$\frac{d\theta_1}{di} = 2 \left(1 - 2 \frac{dr}{di}\right) \quad \text{avec} \quad \cos i \sin r = n \cos r \sin i \quad \text{soit} \quad \frac{dr}{di} = 2 \left(1 - \frac{2 \cos i}{n \cos r}\right)$$

L'extremum est obtenu pour $i = i_0$ tel que $2 \cos i = n \cos r$

$$\text{En élevant au carré : } 4(1 - \sin^2 i) = n^2(1 - \sin^2 r) = n^2 - \sin^2 r$$

$$\boxed{\sin^2 i_0 = \frac{4 - n^2}{3}}; \quad \cos^2 i_0 = \frac{n^2 - 1}{3} \quad \text{et} \quad \cos^2 r_0 = \frac{2}{n} \cos i_0 = \frac{2}{n} \sqrt{\frac{n^2 - 1}{3}}$$

$$i_0 \in [0, \pi/2] \quad \text{donc} \quad i_0 = \arccos\left(\sqrt{\frac{n^2 - 1}{3}}\right) \quad \text{et} \quad r_0 = \arccos\left(\frac{2}{n} \sqrt{\frac{n^2 - 1}{3}}\right)$$

$$\text{Ainsi } \theta_1^c = \pi + 2 \arccos\left(\sqrt{\frac{n^2 - 1}{3}}\right) - 4 \arccos\left(\frac{2}{n} \sqrt{\frac{n^2 - 1}{3}}\right)$$

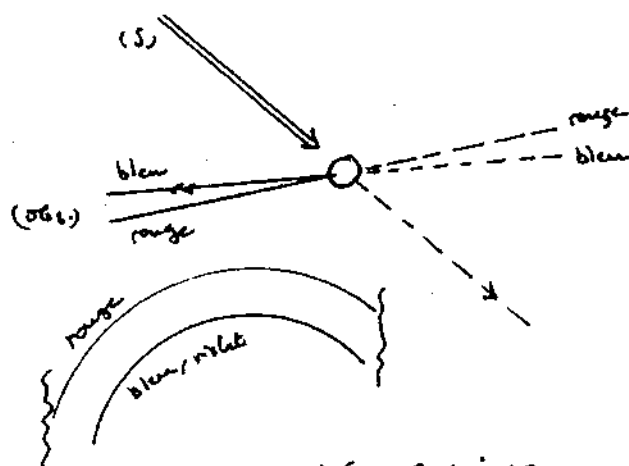
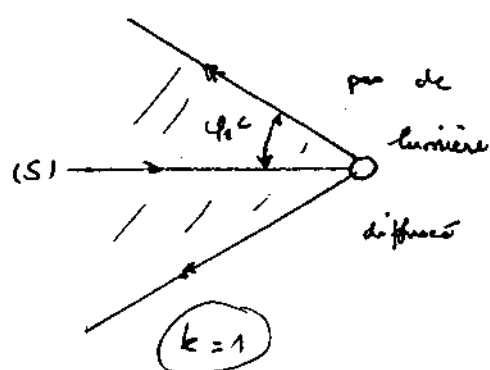
• On peut vérifier que c'est un minimum (cf question 17, $\theta_1^c > 0$)

• Cela exige $n \leq 2$, vérifié par l'eau dans le domaine optique...

Au minimum de $i = i_0$, θ_1 est stationnaire donc $\left(\frac{di}{d\theta_1}\right)$ est très élevé (visé dans cette théorie) → il y a accumulation de lumière sur un cône de demi-angle au sommet $n \approx \pi$ à π

12 et 13.

	n	$\sqrt{\frac{n^2-1}{3}}$	$\frac{2}{n} \sqrt{\frac{n^2-1}{3}}$	α_c	α'_c	θ_1^c	φ_1^c
rouge	1,331	0,507	0,762	40,35°	59,53°	137,6°	49,4° ou 42°25'
bleu/violet	1,346	0,520	0,773	39,38°	58,67°	139,8°	40,2°

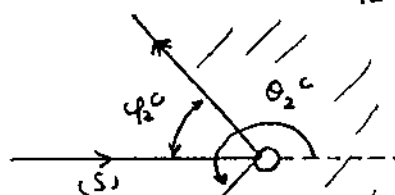
soit une largeur angulaire de $2,2^\circ = 2^\circ 12'$ env.Sur l'arc d'ordre 1, $\theta_1 \geq \theta_{1c}$ ou $\varphi_1 \leq \varphi_{1c}$: il s'agit d'une rétro-diffusion.

x centré sur la direction opposée à celle du soleil.

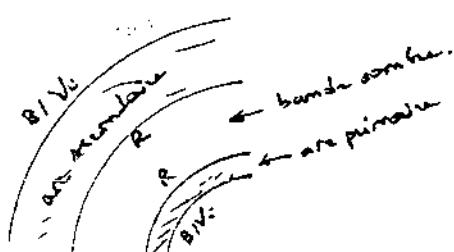
→ bleu à l'intérieur, rouge à l'extérieur

14. Arc secondaireSur l'arc secondaire $k=2$, $\theta_2 = 2\pi + 2i - \theta_1$

$$\theta_2^c = 2\pi + 2 \arccos\left(\sqrt{\frac{n^2-1}{8}}\right) - 6 \arccos\left(\frac{3}{n} \sqrt{\frac{n^2-1}{8}}\right)$$

pour le rouge $n=1,331$, $\theta_2^c = 230,36^\circ$; on prend ici $\varphi_2^c = \theta_2^c - \pi$ soit $\varphi_2^c = 50,4^\circ$ pour le bleu, $n=1,346$, $\varphi_2^c = 54,2^\circ$ 

$\theta \geq \theta_2^c$: pas de lumière diffusée avec $k=2$
à l'intérieur du cône de $\frac{1}{2}$ angle φ_2^c



→ les 2 arcs ne recouvrent pas.

L'ordre des couleurs est en sens inverse

→ l'arc secondaire est beaucoup moins lumineux
(2^e réflexion interne dans la goutte) et plus "étalé"

15. • Dans le cas du prisme, il y a aussi un minimum de déviation, mais :

- Il n'y a pas de réflexion interne (alors que dans le cas de la goutte, si $k=0$, il y a pas d'échappement de déviation)
- il y a une condition d'émergence particulière (pas de réflexion totale).
- les dioptries sont planes donc si le faisceau incident est parallèle, il ne sera pas !
→ direction d'émergence unique.

• Dans le cas où $k=3$, on trouverait $\theta_3^c \approx 317^\circ$ pour $n=1,331$, c'est proche de la direction du soleil ! De plus, cet arc serait très peu lumineux → raisonnable.

II. 2. Modèle de Young et modèle d'Airy pour les arcs sur numérisés

$$16. \quad \begin{cases} y = n \sin \theta = \frac{b}{a} \\ \theta_1 \rightarrow 0 \end{cases} \quad \frac{d\theta}{dy} = \frac{2}{\sqrt{1-y^2}} - \frac{4}{n} \times \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{y}{n})^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-y^2}} - \frac{4}{\sqrt{n^2-y^2}}$$

17. Le calcul de y_0 a été fait à la question 11: $y_0 = \sin \theta_0 = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}$

$$\sqrt{1-y_0^2} = \cos \theta_0 = \sqrt{\frac{n^2-1}{3}} \quad \text{et} \quad \sqrt{n^2-y_0^2} = 2\sqrt{1-y_0^2} = 2\sqrt{\frac{n^2-1}{3}}$$

$$\frac{d^2\theta}{dy^2} = \frac{2y}{[1-y^2]^{3/2}} - \frac{4y}{[n^2-y^2]^{3/2}} \quad ; \quad \text{en} \quad [n^2-y_0^2]^{3/2} = 8[1-y_0^2]^{3/2}$$

$$\text{donc} \quad \theta''_0 = \frac{2y_0}{[1-y_0^2]^{3/2}} \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2} \frac{y_0}{(1-y_0^2)^{3/2}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{4-n^2}{3}} \times \frac{3\sqrt{3}}{(n^2-1)^{3/2}}$$

$$\text{soit} \quad \boxed{\theta''_0 = \frac{9}{2} \frac{\sqrt{4-n^2}}{(n^2-1)^{3/2}}} \quad (>0 \dots)$$

- pour $n=1,333$, $\theta_1^c = 137^\circ$, $\theta_0 = 2,407$ radian ($\varphi_1^c = 42,1^\circ$)

$$\theta''_0 = 9,80 \quad (\text{conforme à la valeur donnée question 23...})$$

18. Si $\theta \rightarrow \theta_1^c$, $|\frac{db}{d\theta}| \rightarrow \infty$ et la méthode efficace différentielle Σ diverge

$$19. \quad \Sigma = a^2 \left| \frac{y dy}{\sin \theta d\theta} \right| \quad ; \quad \text{au voisinage de } \theta_1^c, \quad \Sigma \sim a^2 \frac{y_0}{\sin \theta_1^c} \left| \frac{dy}{d\theta} \right|$$

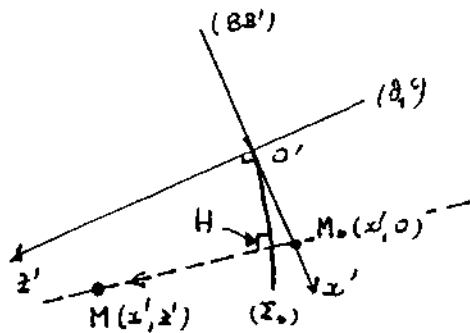
$$\text{avec} \quad \frac{d\theta}{dy} \sim \theta''_0 (y-y_0) \quad \text{or} \quad (y-y_0)^2 \approx \frac{2(\theta-\theta_1^c)}{\theta''_0}$$

$$\text{et} \quad \left| \frac{d\theta}{dy} \right| \sim \sqrt{2\theta''_0(\theta-\theta_1^c)} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\Sigma \sim a^2 \frac{y_0}{\sqrt{2\theta''_0 \sin \theta_1^c} (\theta-\theta_1^c)^{1/2}}}$$

($\beta=1/2$). [résultat donné à la question 33...]

20. Sur la sphère $\widehat{AP} = i + \pi - 2\alpha = \frac{\theta + \pi}{2}$: la position de P est stationnaire pour $\theta = \theta_1^c$, ce qui justifie la convergence approchée des 3 rayons. On pose approximativement du rayon incident au rayon émergent par une symétrie par rapport au diamètre (CP) .

21. Rayons et surface d'onde



Soit $M_0(x', 0)$ l'intersection du rayon émergent passant par M avec la droite (BB') , et $\vec{u}_M$ le vecteur unitaire de ce rayon.

En se plaçant dans le cadre de l'approximation

de l'optique géométrique, $\Phi(x', z') = \Phi(x', 0) + \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}_M \cdot \vec{M_0 M}$

or, pour $|\theta - \theta_1^c| \ll 1$, $\vec{u}_M$ est très proche de $\vec{u}_2$ et $\Phi(x', z') \approx \Phi(x', 0) + k z'$

soit $\Phi(x', z') \approx \psi(x') + k z'$ où $\psi(x') = \Phi(M_0)$.

22. Soit (Z_0) la surface d'onde passant par O' , d'équation $\Phi(x', z') = \psi(z)$; d'après le théorème de Malus, elle est traversée perpendiculairement par les rayons lumineux.

Elle est donc tangente en O' à l'axe Ox' . Au point H où sa trace est traversée

par le rayon $(M_0 M)$, on a $\left(\frac{dz'}{dx'}\right)_{(Z_0), H} \approx \theta - \theta_1^c$. Or sur cette trace $\psi(z) = \psi(x') + k z'$

donc $k \left(\frac{dz'}{dx'}\right)_{(Z_0), H} = -\frac{d\psi}{dx'}$. D'où $\boxed{\frac{d\psi}{dx'} \approx -k(\theta - \theta_1^c)}$

23. En utilisant la symétrie approximative par rapport au diamètre (CP) entre rayons incidents et rayons émergents (question 20.): $x' = \varepsilon a \approx b - b_0 = a(y - y_0)$.

Or $\theta - \theta_1^c \approx \frac{\theta''_0}{2} (y - y_0)^2$ [question 19.] d'où $\theta - \theta_1^c \approx \frac{\theta''_0}{2} \varepsilon^2$

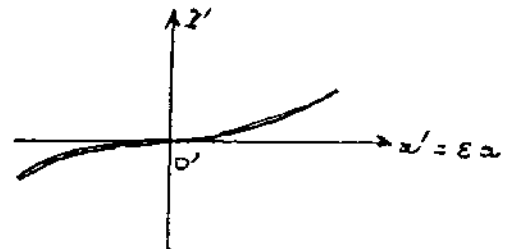
Ainsi $\frac{d\psi}{dx'} \approx -k \frac{\theta''_0}{2} \varepsilon^2 = -k \frac{\theta''_0}{2} \left(\frac{x'}{a}\right)^2$, relation que l'on intègre

on $\boxed{\psi(x') - \psi(0) \approx -k \frac{\theta''_0}{6} \frac{x'^3}{a^2} = -k \frac{\theta''_0}{6} a \varepsilon^3}$

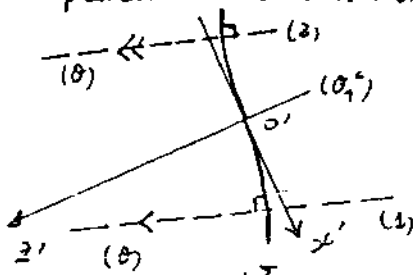
24. $\psi(x) - \psi(0) = -k z'$ conduit pour la trace de la surface d'onde à l'équation:

$$\boxed{z = \frac{\theta''_0}{6} \cdot \frac{x'^3}{a^2}}$$

D'où l'allure suivante:



En reprenant les directions d'axes de la fig. 5b):



allure qui est bien compatible avec l'extremum de θ pour le rayon $O'z'$

$(\theta \geq \theta_1^c)$

25. Théorie de Young: interférences à 2 ondes

La contribution de l'inclinaison des rayons (1) et (2) à la différence de marche à l'infini

$$\text{est } \delta_{2,1}^{\text{ind}} = 2 \varepsilon a \sin(\theta - \theta_1^c) \approx 2 \varepsilon a (\theta - \theta_1^c) \approx \theta''_0 a \varepsilon^3$$

La différence de phase correspondante est $k \delta_{2,1}^{\text{ind}} = k a \theta''_0 \varepsilon^3$; la différence de

phase au niveau de BB' est $\psi(\varepsilon a) - \psi(-\varepsilon a) = -\frac{1}{3} k a \theta''_0 \varepsilon^3$.

D'où la différence de phase totale:

$$\Delta(\varepsilon) = \frac{2}{3} k a \theta''_0 \varepsilon^3$$

26. Il y a interférence constructive si $\Delta(\varepsilon) = 2N\pi$ avec N entier relatif, soit pour

$$\varepsilon = \varepsilon_N \text{ tel que } \frac{k a}{3} \theta''_0 \varepsilon_N^3 = N\pi \quad \text{ou} \quad \varepsilon_N^3 = \frac{3N\pi}{k a \theta''_0}$$

$$\text{Or } \theta_N - \theta_1^c \approx \frac{\theta''_0}{2} \varepsilon_N^2 \quad \text{donc} \quad \theta_N - \theta_1^c \approx \frac{\theta''_0}{2} \left(\frac{3N\pi}{k a \theta''_0} \right)^{2/3} = \frac{(\theta''_0)^{1/3}}{2} \cdot \left(\frac{3N\pi}{k a} \right)^{2/3}$$

Comme $\theta_{-N} = \theta_N$, on peut se limiter à $N \geq 0$.

En fonction de la longueur d'onde, cela s'écrit encore

$$\theta_N - \theta_{1c} \approx \frac{(\theta''_0)^{1/3}}{2} \cdot \left(\frac{3N\lambda}{2a} \right)^{2/3}$$

27. Pour que les arcs surnuméraires soient visibles, il faut que les θ_N s'écartent assez notablement de θ_1^c , donc que l'on ait des gouttes de petite taille.

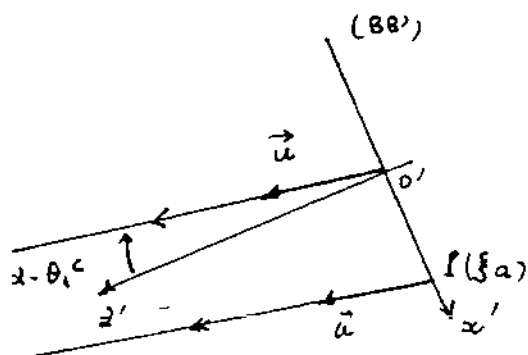
28. Si les valeurs de a sont dispersées, la visibilité des arcs se dégrade (analogie à un brouillage de franges d'interférence): pour observer des arcs, il faut une bonne homogénéité de la taille des gouttes.

$$29. N=1 \quad \text{et} \quad \theta_1 - \theta_1^c \geq 3 \cdot 10^{-2} \text{ radian} \quad (1,7^\circ) : \left(\frac{3\pi}{k a} \right)^{2/3} \geq \frac{2 \times 3 \cdot 10^{-2}}{(9,9)^{1/3}} = 2,8 \cdot 10^{-2}$$

$$\theta''_0 = 9,9$$

$$(k a)_{\text{max}} = 2,0 \cdot 10^3$$

$$a_{\text{max}} = 2 \cdot 10^3 \times \frac{\lambda}{2\pi} \approx 3,2 \cdot 10^2 \lambda \approx \underline{0,22 \text{ mm}} : \text{ce sont donc de petites gouttes.}$$

30. Théorie d'Airy: diffraction

Le premier terme correspond à la différence de trajets entre les rayons issus de O et de O' :

$$\exp \left[\frac{2\pi i}{\lambda} \vec{u} \cdot \vec{O'O} \right] \quad \text{avec} \quad \vec{u} \cdot \vec{O'O} = \int a \vec{u} \cdot \vec{u}_x \\ = \int a \cos(\alpha - \theta_1^c + \pi/2) = - \int a \sin(\alpha - \theta_1^c)$$

30. (suite) . le déphasage pour l'onde incidente entre P et O' est $\psi(\alpha') - \psi(\alpha)$
 d'où le terme $\exp[-i[\psi(\alpha') - \psi(\alpha)]] = \exp\left(ik \frac{\theta''_0}{\theta_0} a \frac{f^2}{2}\right)$ d'après le résultat
 de la question 23.

D'où $\underline{A}(\alpha) \propto \int_{-\xi_m}^{\xi_m} \exp[-ik\alpha(\alpha - \theta_1^c) \frac{f}{2}] \exp\left(ik\alpha \frac{\theta''_0}{\theta_0} \frac{f^2}{2}\right) df$, comme
 dans le cas de l'étude de la diffraction par une "barre de phase".

3.1. On pose $\frac{t^3}{3} = k\alpha \frac{\theta''_0}{\theta_0} f^2$ soit $t = \left(\frac{k\alpha \theta''_0}{2}\right)^{1/3} f$; alors

$$k\alpha(\alpha - \theta_1^c) \frac{f}{2} = k\alpha t \left(\frac{2}{k\alpha \theta''_0}\right)^{1/3} (\alpha - \theta_1^c) = \left(\frac{2k^2 \alpha^2}{\theta''_0}\right)^{1/3} (\alpha - \theta_1^c) t = \eta t$$

On trouve $\underline{A}(\alpha) \propto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\eta t} \exp(i \frac{t^3}{3}) dt$. Changer bien t en $-t$ un peu

à changer i en $-i$ dans cette intégrale qui est donc réelle : $\underline{A}(\alpha) = \text{Re}(\underline{A}(\alpha))$

$$\text{D'où } \underline{A}(\alpha) \propto \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} - \eta t\right) dt = 2 \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} - \eta t\right) dt = \underline{2\pi \text{Ai}(-\eta)}.$$

$$\text{avec } \eta = \left(\frac{2k^2 \alpha^2}{\theta''_0}\right)^{1/3} (\alpha - \theta_1^c).$$

→ Pour $\eta < 0$, soit $\alpha < \theta_1^c$, il ne devrait pas y avoir de lumière dans le cadre
 de l'optique géométrique. On voit que ce n'est pas tout à fait le cas pour $\eta > -2$.

32. Confrontation des deux modèles

$$\text{Avec } \theta_N - \theta_1^c = \frac{1}{2} \left[\frac{3\pi}{ka} (N + 1/4) \right]^{2/3} (\theta''_0)^{1/3}, \text{ on obtient } \eta_N = \frac{(2k^2 \alpha^2)^{1/3}}{2} \left[\frac{3\pi}{ka} (N + 1/4) \right]^{2/3}$$

$$\text{soit } \underline{\eta_N = \left[\frac{3\pi}{2} (N + 1/4) \right]^{2/3}}$$

33.34.

N	absc. max Airy	η_N	$\eta_N^{-1/2}$	$\eta_N^{-1/2} / A_N$
0	1,0188	1,115	0,947	0,847
1	3,2482	3,262	0,554	0,505
2	4,8201	4,826	0,455	0,902
3	6,1633	6,167	0,403	0,904
4	7,3722	7,375	0,368	0,902

} constant.

Sauf peut-être en ce qui concerne le premier ($N=0$), on a un très bon accord entre
 les deux modèles, tant en ce qui concerne les directions des maxima que leur intensité
 relative, même si la théorie d'Airy est la plus élaborée.