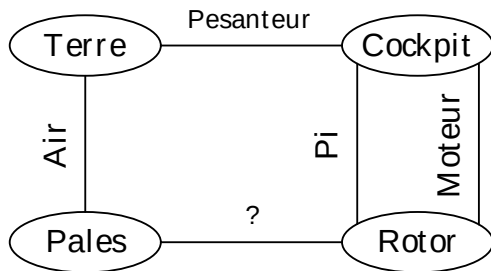


Étude de quelques aspects de l'hélicoptère

I. Principe d'une voilure tournante



$$\text{I.1 } V_{\text{air}}(r) = \left\| \vec{V}(M \in \text{air}/P) \right\| = \left\| \underbrace{\vec{V}(M \in \text{air}/C)}_{\text{air calme vol stationnaire}} + \vec{V}(M \in C/R) + \underbrace{\vec{V}(M \in R/P)}_{\alpha = \text{Cst}} \right\|$$

$$\vec{V}(M \in \text{air}/P) = \underbrace{\vec{V}(O \in C/R)}_{\text{Pivot en O}} + \vec{\Omega}(C/R) \wedge \vec{OH} = -\omega \vec{z} \wedge r \vec{y}_r = \omega r \vec{x}_r \Rightarrow \boxed{\omega r = V_{\text{air}}(r)} \quad [\text{I.1}]$$

$$\text{I.2 } dFi = \frac{1}{2} \rho S C_i V^2 = \frac{1}{2} \rho l dr C_i (\omega r)^2 = \frac{\rho l C_i \omega^2}{2} r^2 dr = \boxed{K_i r^2 dr = dFi} \quad [\text{I.2}]$$

I.3

$$1) \quad \vec{R}(T \xrightarrow{\text{air}} P) \quad [\text{I.3}]$$

$$2) \quad \vec{M}(O, T \xrightarrow{\text{air}} P) \quad [\text{I.4}]$$

$$\vec{M}(O, T \xrightarrow{\text{air}} P) = (K_x \vec{x}_r + K_z \vec{z}) \wedge \vec{y}_r \int_0^R -r^3 dr = \boxed{-\frac{K_x R^4}{4} \vec{z} + \frac{K_z R^4}{4} \vec{x}_r = \vec{M}} \quad [\text{I.4}]$$

I.4

$$1) \quad \vec{R}(T \xrightarrow{\text{air}} P) \quad [\text{I.5}]$$

$$\vec{R} \cdot \vec{M}(O) = \frac{K_x K_z R^7}{12} - \frac{K_z K_x R^7}{12} = 0 ; \text{ il existe donc un axe central : } \vec{R} \cdot \vec{M}(O) = 0 ; \quad [\text{I.5}]$$

$$2) \quad O$$

n cherche le point H tel que :

$$\vec{M}(H, T \xrightarrow{\text{air}} P) = \vec{0} = \vec{M}(O, T \xrightarrow{\text{air}} P) + \vec{R}(T \xrightarrow{\text{air}} P) \wedge \vec{OH} ;$$

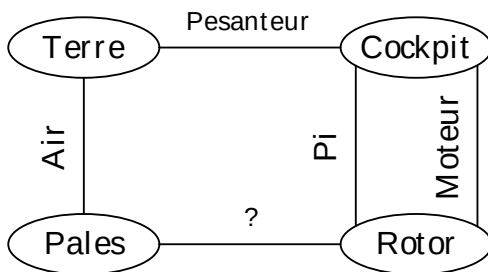
$$\Rightarrow \vec{R} \wedge \vec{OH} = -\vec{M}(O) ; \text{ avec } \vec{R} \cdot \vec{M}(O) = 0 . \text{ La solution de cette division vectorielle vaut :}$$

$$\overrightarrow{OH} = \frac{\overrightarrow{R} \wedge -\overrightarrow{M}(O)}{R^2} + \lambda \overrightarrow{R} ; \quad [\text{I.6}]$$

$$\overrightarrow{R} \wedge -\overrightarrow{M}(O) : \begin{vmatrix} \frac{K_x R^3}{3} \\ 0 \\ \frac{K_z R^3}{3} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -\frac{K_z R^4}{4} \\ 0 \\ \frac{K_x R^4}{4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{K_x^2 R^7}{12} \\ 0 \end{vmatrix} + \frac{K_z^2 R^7}{12} \text{ et } R^2 : \begin{vmatrix} \frac{K_x R^3}{3} \\ 0 \\ \frac{K_z R^3}{3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{K_x R^3}{3} \\ 0 \\ \frac{K_z R^3}{3} \end{vmatrix} = \frac{K_x^2 R^6}{9} + \frac{K_z^2 R^6}{9}$$

$$\overrightarrow{OH} = \frac{\frac{K_x^2 R^7}{12} + \frac{K_z^2 R^7}{12}}{\frac{K_x^2 R^6}{9} + \frac{K_z^2 R^6}{9}} \vec{y}_r = \boxed{\frac{3R}{4} \vec{y}_r = \overrightarrow{OH}} \quad [\text{I.7}]$$

I.5



; Principe fondamental appliqué au deux pales :

$$\overrightarrow{M}(O, T \xrightarrow{\text{air}} \{P, P\}) \cdot \vec{z} + \overrightarrow{M}(O, R \rightarrow \{P, P\}) \cdot \vec{z} = \vec{\delta}(O, \{P, P\}/T) \cdot \vec{z}$$

$$\vec{\delta}(O, \{P, P\}/T) \cdot \vec{z} \stackrel{\substack{\vec{V}(O/\text{Terre})=\vec{0} \\ \vec{z} \in \text{Terre}}}{=} \frac{d \vec{\sigma}(O, \{P, P\}/T) \cdot \vec{z}}{dt} \text{ et } \vec{\Omega}(\{P, P\}/T) = \underbrace{\vec{\Omega}(\{P, P\}/R)}_{\alpha = \text{Cst}} + \vec{\Omega}(R/T)$$

•

$$\stackrel{\substack{\vec{V}(O/\text{Terre})=\vec{0} \\ O \in \{P, P\}}}{=} \frac{d \overbrace{\mathbf{I}(O/\{P, P\})}^{\text{Cste}} \vec{\Omega}(R/T) \cdot \vec{z}}{dt} = 0$$

d'où :

$$\overrightarrow{M}(O, R \rightarrow \{P, P\}) \cdot \vec{z} = -\overrightarrow{M}(O, T \xrightarrow{\text{air}} \{P, P\}) \cdot \vec{z} . \quad [\text{I.8}]$$

Principe fondamental appliqué au rotor :

$$\overrightarrow{M}(O, \{P, P\} \rightarrow R) \cdot \vec{z} + \overrightarrow{M}(O, C \xrightarrow{\text{Pi}} R) \cdot \vec{z} + \overrightarrow{M}(O, C \xrightarrow{\text{Moteur}} R) \cdot \vec{z} = \vec{\delta}(O, R/T) \cdot \vec{z}$$

D'où, avec [I.8] :

$$\overrightarrow{M}(O, T \xrightarrow{\text{air}} \{P, P\}) \cdot \vec{z} + \overrightarrow{M}(O, C \xrightarrow{\text{Moteur}} R) \cdot \vec{z} = \vec{\delta}(O, R/T) \cdot \vec{z}$$

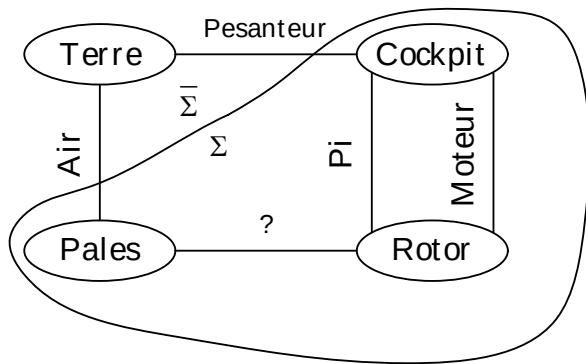
$$\vec{M}(O, C \xrightarrow{\text{Moteur}} R) \cdot \vec{z} = -\vec{M}(O, T \xrightarrow{\text{air}} \{P, P\}) \cdot \vec{z} + \underbrace{\vec{\delta}(O, R/T)}_{\vec{\Omega}(R/T) = \vec{Cste}} \cdot \vec{z}$$

$$\text{Or, } 2\vec{M}(O, T \xrightarrow{\text{air}} P) = 2\vec{M}(H, T \xrightarrow{\text{air}} P) + 2\vec{R}(T \xrightarrow{\text{air}} P) \wedge \vec{HO}$$

$$\text{[I.3] donne } 2\vec{M}(O, T \xrightarrow{\text{air}} P) = 2\left(\frac{K_x R^3}{3} \vec{x}_r + \frac{K_z R^3}{3} \vec{z}\right) \wedge -\frac{3R}{4} \vec{y}_r = \frac{R^4 K_z}{2} \vec{x}_r - \frac{R^4 K_x}{2} \vec{z} ; \text{ d'où :}$$

$$\vec{M}(O, C \xrightarrow{\text{Moteur}} R) \cdot \vec{z} = -\left(\frac{R^4 K_z}{2} \vec{x}_r - \frac{R^4 K_x}{2} \vec{z}\right) \cdot \vec{z} = \boxed{\frac{R^4 K_x}{2} = C} \quad \text{[I.9]}$$

I.6



: Théorème de l'énergie cinétique appliqué à Σ :

$$P(T \xrightarrow{\text{Pesanteur}} C/T) + P(T \xrightarrow{\text{Air}} P/T) + \underbrace{P(C \xleftarrow{P_i} R)}_{\text{parfait}} + P(C \xleftarrow{\text{Moteur}} R) + \underbrace{P(P \xleftarrow{?} R)}_{\text{parfait}} =$$

$$\frac{dE_c(C/T)}{dt} + \underbrace{\frac{dE_c(R/T)}{dt}}_{\text{masse négligeable}} + \underbrace{\frac{dE_c(P/T)}{dt}}_{\text{masse négligeable}}$$

$$- \frac{dE_p(T \xrightarrow{\text{Pesanteur}} C/T)}{dt} + F(T \xrightarrow{\text{Air}} P)V(P/T) + F(C \xrightarrow{\text{Mot}} R)V(R/C) = \frac{dE_c(C/T)}{dt}$$

$$F(C \xrightarrow{\text{Mot}} R)V(R/C) = \frac{dE_c(C/T)}{dt} + \frac{dE_p(T \xrightarrow{\text{Pesanteur}} C/T)}{dt} - F(T \xrightarrow{\text{Air}} P)V(P/T)$$

$$\bullet F(C \xrightarrow{\text{Mot}} R)V(R/C) = P_0 ;$$

$$\bullet \frac{dE_c(C/T)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\underbrace{MV^2(G_C/T)}_{\text{quasi nul à l'initialisation du mouvement}} + \underbrace{I(G_C/T)\vec{\Omega}(C/T) \cdot \vec{\Omega}(C/T)}_0 \right) \square 0 ;$$

- $$\frac{dE_p(T \xrightarrow{\text{Pesanteur}} C/T)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\underbrace{-M(-g\vec{z}) \cdot \vec{O_T G_C}}_{\text{quasi constant à l'initialisation du mouvement}} \right] = 0 ;$$
- $$-F(T \xrightarrow{\text{Air}} P) V(P/T) = -2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{K_x R^3}{3} \vec{x}_r + \frac{K_z R^3}{3} \vec{z} \\ \frac{K_z R^4}{4} \vec{x}_r - \frac{K_x R^4}{4} \vec{z} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(P/C) = \omega \vec{z} \\ \vec{V} \left(O \in \frac{P}{R/T} \right) \end{array} \right\} = \frac{K_x R^4 \omega}{2} = -C\omega$$

$$F(C \xrightarrow{\text{Mot}} R) V(R/C) = \boxed{P_0 = \frac{K_x R^4 \omega}{2} = -C\omega} \quad [\text{I.10}]$$

- P

principe fondamental de la dynamique appliqué à l'hélicoptère réduit à ses résultantes projetées sur $\vec{z}$:

$$F(T \xrightarrow{\text{Pesanteur}} C) \cdot \vec{z} + F(T \xrightarrow{\text{Air}} P) \cdot \vec{z} = \underbrace{M \vec{A}(G_H/R_g)}_{\text{au décollage}} \cdot \vec{z} ;$$

- P

pour l'ensemble des 2 pales, la portance est un glisseur $F\vec{u}_z$ appliqué en O :

$$F = 2F_z = \boxed{\frac{2K_z R^3}{3} = F} \quad [\text{I.11}]$$

- I

il y a décollage si $F \geq Mg$, et la puissance minimale vaut alors :

$$\left. \begin{array}{l} P_0 = -C\omega = \frac{R^4 K_x}{2} \omega = \frac{R^4 \rho l C_x \omega^2}{4} \omega \\ F = \frac{\rho l C_z \omega^2 R^3}{3} = Mg \Rightarrow \frac{\rho l \omega^2 R^3}{3} = \frac{Mg}{C_z} \end{array} \right\} P_0 = \frac{\rho l \omega^2 R^3}{3} \frac{3R \omega C_x}{4} = \boxed{\frac{3}{4} Mg R \omega \frac{C_x}{C_z} = P_0} \quad [\text{I.12}]$$

I.7 La puissance au décollage vaut :
$$P = -C\omega = \frac{1}{4} \rho C_x l \omega^3 R^4 \quad [\text{I.13}]$$

Avec $C_x = \kappa_1 + \kappa_2 \kappa_0^2 \alpha^2$, **[I.14]**, fonction croissante de α , si α et donc C_x augmentent à P constant, la pulsation ω diminue, et le moment $|C| = \frac{P}{\omega}$ augmente.

On peut écrire la portance $F = \frac{4P}{3R\omega} \frac{C_z}{C_x}$: à P constant, si α croît, C_z et C_x croissent tandis que ω diminue : on ne peut conclure simplement sur la variation de la portance.

Mais en éliminant la pulsation ω entre F et P , on a :

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{\rho l C_z R^3}{3} \frac{3R}{4} \frac{C_x}{C_z} \omega^3 \Rightarrow \omega^2 = \left(\frac{4P}{\rho l C_x R^4} \right)^{\frac{2}{3}} \\ F &= \frac{\rho l C_z R^3}{3} \omega^2 = \frac{\rho l C_z R^3}{3} \left(\frac{4P}{\rho l C_x R^4} \right)^{\frac{2}{3}} \end{aligned} \right\} F = \left(\frac{16}{27} \rho l R P^2 \frac{C_z^3}{C_x^2} \right)^{1/3}$$

$$\text{L'étude de } \gamma = \frac{C_z^3}{C_x^2} = \frac{\kappa_0^3 \alpha^3}{(\kappa_1 + \kappa_2 \kappa_0^2 \alpha^2)^2} \text{ donne } \frac{d\gamma}{d\alpha} = \kappa_0^3 \alpha^2 \frac{\overbrace{3\kappa_1 - \kappa_2 \kappa_0^2 \alpha^2}^{>0 \text{ ?}}}{(\kappa_1 + \kappa_2 \kappa_0^2 \alpha^2)^3} :$$

la portance croît avec α de 0 à $\frac{1}{\kappa_0} \sqrt{\frac{3\kappa_1}{\kappa_2}} = 8$, décroît au-delà. [I.15]

I.8 [I.1] donne $\omega r = V$; d'où : $\omega_{\max} R = V_{\max} = 0,6c \Rightarrow \omega_{\max} = 0,6 \frac{c}{R}$ [I.16]

$\omega_{\max} \approx \frac{6 \times 34}{5} \approx 41 \text{ rad.s}^{-1} \approx 6,5 \text{ Hz}$ [I.17]

I.9 On a alors, [I.13] et [I.14], pour $\alpha = 0$: $P = \frac{1}{4} \rho \kappa_1 l \omega_{\max}^3 R^4 = 0,054 \rho \kappa_1 l c^3 R = P$ [I.18]

$P \approx 0,054 \times 1,3 \times 1,5 \times 10^{-2} \times 0,26 \times 340^3 \times 5 \approx 54 \text{ kW} \approx P$ [I.19]

I.10 L'hélicoptère décolle, [I.12], pour $\left. \begin{aligned} \frac{\rho l \omega^2 R^3}{3} &= \frac{Mg}{C_z} \\ C_z &= \kappa_0 \alpha \end{aligned} \right\} \frac{\rho \kappa_0 \alpha l \omega_{\max}^2 R^3}{3} = Mg \text{ soit :}$

$\alpha_{\text{dec}} = \frac{3Mg}{\rho \kappa_0 l \omega_{\max}^2 R^3}$ [I.20]

$\alpha_{\text{dec}} \approx \frac{3 \times 1300 \times 9,8}{1,3 \times 0,1 \times 0,26 \times \left(\frac{6 \times 34}{5} \right)^2 \times 5^3} \approx 5,4^\circ \approx \alpha_{\text{dec}}$ [I.21]

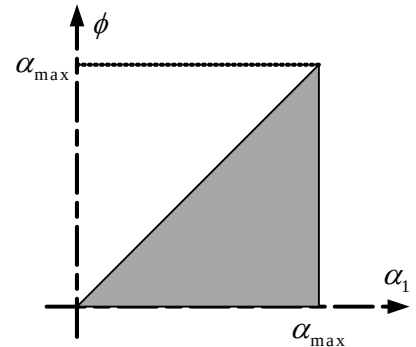
I.11 La puissance développée, [I.12], est alors :

$P_0 = \frac{3}{4} MgR \omega \frac{C_x}{C_z} = 0,45 Mgc \frac{\kappa_1 + \kappa_2 \kappa_0^2 \alpha_{\text{dec}}^2}{\kappa_0 \alpha_{\text{dec}}} = P_0$ [I.22]

$$P_0 = 0,45 \times 1\,300 \times 9,8 \times 340 \frac{1,5 \cdot 10^{-2} + 49 \cdot 10^{-4} \times \left(\frac{5,4 \times \pi}{180}\right)^2}{0,1 \frac{5,4 \times \pi}{180}} \quad \boxed{128 \text{ kW} \quad 174 \text{ CV} \quad P_0} \quad [\text{I.23}]$$

I.12 Ce qui fait un moteur d'au moins 90 kg, soit 7% de la masse totale. Dans le passé avec des **moteurs moins performants, la charge utile de l'hélicoptère était plus faible.**

I.13 $\alpha(0) = \alpha_1$ et $\alpha(R) = \alpha - \phi$ dans l'intervalle $[0, \alpha_{\max}]$ dans le domaine triangulaire ci-contre où $\phi \leq \alpha \leq \alpha_{\max}$



I.14 Portance d'une pale vrillée :

$$\text{résultante : } \int_0^R \frac{1}{2} \rho \kappa_0 \left(\alpha_1 - \phi \frac{r}{R} \right) l \omega^2 r^2 dr = \boxed{F_z^* = \frac{1}{6} \rho l \omega^2 R^3 \kappa_0 \left(\alpha_1 - \frac{3}{4} \phi \right)} \quad [\text{I.24}]$$

$$\text{moment en } O : \int_0^R \frac{1}{2} \rho \kappa_0 \left(\alpha_1 - \phi \frac{r}{R} \right) l \omega^2 r^3 dr = \boxed{M_{por}^* = \frac{1}{8} \rho l \omega^2 R^4 \kappa_0 \left(\alpha_1 - \frac{4}{5} \phi \right)} \quad \text{selon } \vec{x}_r \quad [\text{I.25}]$$

I.15 [I.3] et [I.24] nous indiquent que la résultante de la portance d'une pale vrillée est identique à celle

$$\text{d'une pale non vrillée d'incidence } \boxed{\alpha_{eq} = \alpha_1 - \frac{3}{4} \phi} \quad [\text{I.26}]$$

$$\alpha_1 \geq \phi \Rightarrow \alpha_1 - \frac{3}{4} \phi \geq \phi - \frac{3}{4} \phi \Rightarrow \boxed{\alpha_{eq} \geq \frac{\phi}{4}} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

I.16 Connaissant le résultat de la question I.4, on utilise l'équation [I.6] en norme. Le point d'application

$$\text{est alors à la distance } \frac{M_{por}^*}{F_z^*} = \frac{\frac{1}{8} \cancel{\rho l \omega^2 R^4} \cancel{\kappa_0} \left(\alpha_1 - \frac{4}{5} \phi \right)}{\frac{1}{6} \cancel{\rho l \omega^2 R^3} \cancel{\kappa_0} \left(\alpha_1 - \frac{3}{4} \phi \right)} \quad \boxed{R^* = \frac{3}{4} R \frac{\alpha_1 - 4\phi/5}{\alpha_1 - 3\phi/4}} \quad [\text{I.27}]$$

$$\text{Et } \left. \begin{array}{l} \frac{R^*}{R_g} = \frac{\alpha_1 - 4\phi/5}{\alpha_1 - 3\phi/4} \\ \alpha_1 = \alpha_{eq} + \frac{3}{4} \phi \end{array} \right\} \frac{R^*}{R_g} = \frac{\alpha_{eq} + \frac{3}{4} \phi - \frac{4\phi}{5}}{\alpha_{eq} + \frac{3}{4} \phi - \frac{3\phi}{4}} = \boxed{\frac{R^*}{R_g} = 1 - \frac{\phi}{20\alpha_{eq}} < 1} \quad [\text{I.28}]$$

- L'intérêt du vrillage des pales est de **rapprocher le point d'application de l'axe du rotor** et donc de moins « fléchir » les pales.

I.17

- Couple de traînée de l'ensemble des 2 pales :

$$-2 \int_0^R \frac{1}{2} \rho \underbrace{\left[\kappa_1 + \kappa_2 \kappa_0^2 \left(\alpha_1 - \phi \frac{r}{R} \right)^2 \right]}_{C_x(\alpha(r))} l \omega^2 r^3 dr = \boxed{C^* = -\rho l \omega^2 R^4 \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2 \kappa_0^2 \alpha_1^2}{4} - \kappa_2 \kappa_0^2 \frac{2\alpha_1 \phi}{5} + \kappa_2 \kappa_0^2 \frac{\phi^2}{6} \right)} \quad [\text{I.29}]$$

- Avec $C(\alpha_{eq}) = -\rho l \omega^2 R^4 \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2 \kappa_0^2 \alpha_{eq}^2}{4} \right)$ couple de traînée d'une hélice non vrillée, et en posant :

$$C_{x,eq} = \kappa_1 + \kappa_2 \kappa_0^2 \alpha_{eq}^2 \text{ avec } \alpha_{eq} = \alpha_1 - \frac{3}{4} \phi, \text{ il vient :}$$

$$\frac{C^*}{C(\alpha_{eq})} = \frac{\frac{\kappa_1 + \kappa_2 \kappa_0^2 \alpha_1^2}{4} - \kappa_2 \kappa_0^2 \frac{2\alpha_1 \phi}{5} + \kappa_2 \kappa_0^2 \frac{\phi^2}{6}}{\frac{\kappa_1 + \kappa_2 \kappa_0^2 \alpha_{eq}^2}{4}} = 1 + \frac{\kappa_2 \kappa_0^2 \phi}{C_{x,eq}} \left(-\frac{1}{10} \alpha_{eq} + \frac{7}{240} \phi \right)$$

$$\boxed{\frac{C^*}{C(\alpha_{eq})} = 1 + \frac{7\kappa_2 \kappa_0^2 \phi}{240 C_{x,eq}} \left(\phi - \frac{24}{7} \alpha_{eq} \right)} \quad [\text{I.30}]$$

- Interprétation de l'énoncé : « Peut-on définir un angle ϕ pour un vrillage optimal en ce qui concerne « l'extrémisation » du **moment** de traînée ? », car la traînée – définie ci-dessous redemanderait un nouveau calcul ! La question est peut-être de rechercher une valeur optimale pour les deux composantes du torseur de traînée qui demande une étude complexe ! ?
 o Traînée de l'ensemble des deux pales :

$$2 \int_0^R \frac{1}{2} \rho \underbrace{\left[\kappa_1 + \kappa_2 \kappa_0^2 \left(\alpha_1 - \phi \frac{r}{R} \right)^2 \right]}_{C_x(\alpha(r))} l \omega^2 r^2 dr = \boxed{R^* = \rho l \omega^2 R^3 \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2 \kappa_0^2 \alpha_1^2}{3} - \kappa_2 \kappa_0^2 \frac{2\alpha_1 \phi}{4} + \kappa_2 \kappa_0^2 \frac{\phi^2}{5} \right)}$$

- o On a l'air de vouloir chercher un **extremum** de [I.29] en fonction de ϕ :

$\frac{\partial C^*}{\partial \phi} = -\rho l \omega^2 R^4 \left(-\kappa_2 \kappa_0^2 \frac{2\alpha_1}{5} + \kappa_2 \kappa_0^2 \frac{\phi}{3} \right) = 0$, pour $\boxed{\phi = \frac{6\alpha_1}{5}}$. Ce qui n'a pas une grande utilité, car ϕ est une valeur fixe obtenue par construction alors que α_1 est un angle variable au cours du temps. Ce qui veut peut-être dire que le constructeur va optimiser « ses » ailes pour un point de fonctionnement correspondant à la plus grande durée d'utilisation, donc pour une valeur de α_1 très utilisée. Peut-être que le « vrillage » change d'un client à l'autre en fonction de l'utilisation de l'hélicoptère ? Alors le moment vaut :

$$C^* = -\rho l \omega^2 R^4 \left(\frac{\kappa_1}{4} + \frac{\kappa_2 \kappa_0^2 \alpha_1^2}{4} - \kappa_2 \kappa_0^2 \alpha_1^2 \frac{12}{25} + \kappa_2 \kappa_0^2 \alpha_1^2 \frac{6}{25} \right) = \boxed{-\rho l \omega^2 R^4 \left(\frac{\kappa_1}{4} + \frac{\kappa_2 \kappa_0^2 \alpha_1^2}{100} \right)}$$

I.18 Il vient en différentiant $C = -\frac{1}{4}\rho C_x(\alpha)l\omega^2 R^4 = -\frac{1}{4}\rho(\kappa_1 + \kappa_2\kappa_0^2\alpha^2)l\omega^2 R^4$:

$$\delta C = -\frac{1}{2} \rho \kappa_2 \kappa_0^2 l \omega^2 R^4 \alpha \delta \alpha \quad \text{[L31]}$$

I.19

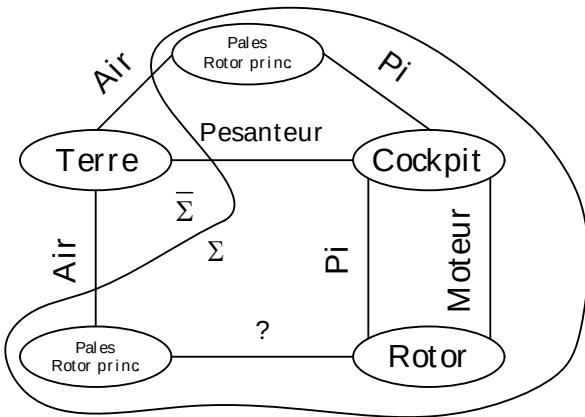
- Par analogie avec [I.1], la vitesse d'une particule d'air à l'extrémité du rotor anticouple

$$V_{ac} = \omega_{ac} R_{ac} \text{ ; d'o\`u : } \omega_{ac} = 0,6 \frac{c}{R_{ac}} = \boxed{\omega_{\max} \frac{R}{R_{ac}} = \omega_{ac}} \quad \text{[I.32]}$$

- $\omega_{ac} \approx 0,6 \frac{340}{0,8} \approx 41 \frac{5}{0,8} \approx 255 \text{ rad.s}^{-1} \approx 41 \text{ Hz} \approx \omega_{ac}$

- $$\text{na } \zeta = \frac{\omega_{ac}}{\omega_{\max}} = \frac{R}{R_{ac}} \approx 6,25 \quad \text{[L33]}$$

I.20 Toujours par analogie directe entre les deux rotors.



- Pour le rotor anticouple :

portance (horizontale) : $F_{z,ac} = \frac{1}{3} \rho \kappa_0 \alpha_{ac} l_{ac} \omega_{ac}^2 R_{ac}^3$, et

$$\text{variation : } \delta F_{z,ac} = \frac{1}{3} \rho \kappa_0 l_{ac} \omega_{ac}^2 R_{ac}^3 \delta \alpha_{ac}$$

- Principe fondamental de la dynamique appliqué à l'hélicoptère, réduit à ses moments en O et projeté sur $\vec{z}$:

$$\overrightarrow{M}(O, T \xrightarrow{\text{air}} P) . \vec{z} + \overrightarrow{M}(O, T \xrightarrow{\text{air}} P_{ac}) . \vec{z} + \underbrace{\overrightarrow{M}(O, T \xrightarrow{\text{pesanteur}} C) . \vec{z}}_{g\vec{z} \text{ colinéaire à } \vec{z}} =$$

$$\underbrace{\vec{\delta}(O, C/T) . \vec{z}}_{\vec{\Omega}(C/T) \text{ quasi C}^{\text{st}}} + \underbrace{\vec{\delta}(O, \{H-C\}/T) . \vec{z}}_{\text{masse « négligeable »}}$$

On doit donc avoir : $C + d_{ac} F_{z,ac} = 0$ et naturellement $\delta C + d_{ac} \delta F_{z,ac} = 0$

$$\text{D'où : } \delta\alpha_{ac} = \frac{3}{2} \kappa_0 \kappa_2 \underbrace{\frac{\omega^2 R^3}{\omega_{ac}^2 R_{ac}^3}}_{\zeta} \frac{lR}{l_{ac} d_{ac}} \alpha \delta\alpha = \boxed{\frac{3}{2} \kappa_0 \kappa_2 \zeta \frac{lR}{l_{ac} d_{ac}} \alpha \delta\alpha = \delta\alpha_{ac}} \quad [\text{I.34}]$$

I.21. ?? Que répondre, puisque l'on n'a jamais envisagé que le vol stationnaire et que l'on ne sait pas comment sont modifiées les pales du rotor principal pour obtenir une accélération ??

II. Tête de rotor

$$\text{II.1 } V(PF/C) : \left\{ \begin{array}{c} \dot{\lambda} \vec{z} \\ \vec{\Omega}(R_f/R) \cdot \vec{z} = 0 \end{array} \right\} \underbrace{A; \vec{?}, \vec{?}, \vec{z}}_{\perp, 1, +}$$

- On peut y associer la liaison classique : **annulaire à doigt** (dont j'ignore si elle est normalisée !).
- Association simple :
 - En série :
 - Entre (**C**) et un solide (**1**) : une glissière d'axe $\vec{z}$;
 - Entre (**1**) et un solide (**2**) : un pivot de centre A et d'axe orthogonal à $\vec{z}$;
 - Entre (**2**) et (**PF**) : un pivot de centre A et d'axe orthogonal à $\vec{z}$.
 - En parallèle, entre (**C**) et (**PF**) :
 - une annulaire de centre A ;
 - une ponctuelle perpendiculaire à $\vec{z}$ et « déportée » par rapport à $(O; \vec{z})$ afin d'avoir un « bras de levier » pour empêcher la rotation autour de $(O; \vec{z})$.
 - Et cætera !

II.2 Pifométriquement :

- **Pas collectif** : λ , car la translation a l'air de modifier globalement l'inclinaison des deux pales. La translation suivant l'axe du rotor semble avoir le même effet sur les deux pales et de plus indépendant de l'angle que fait le rotor avec le cockpit ;
- **Pas cyclique** : Θ et φ , car l'angle d'inclinaison du plateau fixe par rapport à $\vec{z}$, géré par ses deux projections Θ et φ sur deux axes orthogonaux à $\vec{z}$ a l'air de modifier – par superposition – périodiquement l'inclinaison des deux pales.
- À ce stade de lecture de l'énoncé, il est difficile d'être plus précis !

II.3 Désolidariser en rotation les deux plateaux.

- Le **plateau fixe** – lié au cockpit – reçoit les informations mécaniques de réglage depuis le cockpit par le biais des biellettes (**3**) qui ne peuvent donc tourner indéfiniment autour de l'axe $\vec{z}$, par rapport au cockpit ; il en sera de même du plateau fixe ;
- Le **plateau mobile** – lié au rotor – fournit les informations mécaniques de réglage aux pales par le biais des biellettes (**2**) qui ne peuvent donc tourner indéfiniment autour de l'axe $\vec{z}_f$, par rapport au rotor ; il en sera de même du plateau mobile.

II.4 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}$; i.e. : $L\vec{u} = e\vec{x}_r + (L - \lambda)\vec{z} - e\vec{x}_p$, d'où :

$$L^2 = e^2 + (L - \lambda)^2 + e^2 - 2e^2 \cos \alpha + 2(L - \lambda)e \sin \alpha$$

$$L^2 = 2e^2 + \lambda^2 - 2L\lambda - 2e^2 \cos \alpha + 2(L - \lambda)e \sin \alpha$$

$$0 = 2\frac{e^2}{L^2} + \frac{\lambda^2}{L^2} - 2\frac{\lambda}{L} - 2\frac{e^2}{L^2} \cos \alpha + 2\left(\frac{L}{L} - \frac{\lambda}{L}\right)\frac{e}{L} \sin \alpha$$

$$-\frac{\lambda^2}{L^2} + 2\frac{\lambda}{L}\left(1 + \frac{e}{L} \sin \alpha\right) = 2\frac{e^2}{L^2}(1 - \cos \alpha) + 2\frac{e}{L} \sin \alpha$$

$$-\frac{\lambda^2}{L^2} + 2\frac{\lambda}{L}(1 + \varepsilon \sin \alpha) = 2\varepsilon^2 - 2\varepsilon^2 \cos \alpha + 2\varepsilon \sin \alpha$$

$$-\left[\frac{\lambda^2}{L^2} - 2\frac{\lambda}{L}(1 + \varepsilon \sin \alpha) + (1 + \varepsilon \sin \alpha)^2\right] + (1 + \varepsilon \sin \alpha)^2 = 2\varepsilon^2 - 2\varepsilon^2 \cos \alpha + 2\varepsilon \sin \alpha$$

$$-\left[\frac{\lambda}{L} - (1 + \varepsilon \sin \alpha)\right]^2 = 2\varepsilon^2 - 2\varepsilon^2 \cos \alpha + 2\varepsilon \sin \alpha - (1 + 2\varepsilon \sin \alpha + \varepsilon^2 \sin^2 \alpha)$$

$$\left[\frac{\lambda}{L} - (1 + \varepsilon \sin \alpha)\right]^2 = 2\varepsilon^2 \cos \alpha + \varepsilon^2 \sin^2 \alpha + 1 - 2\varepsilon^2 = 2\varepsilon^2 \cos \alpha + \varepsilon^2 (1 - \cos^2 \alpha) + 1 - 2\varepsilon^2$$

$$\left[\frac{\lambda}{L} - (1 + \varepsilon \sin \alpha)\right]^2 = \varepsilon^2 \cos \alpha (2 - \cos \alpha) + 1 - \varepsilon^2$$

$$\frac{\lambda}{L} = (1 + \varepsilon \sin \alpha) \pm \sqrt{\underbrace{\varepsilon^2 \cos \alpha (2 - \cos \alpha) + 1 - \varepsilon^2}_{\text{mentalement } > 0}}$$

Choix du signe avec le cas particulier : $\alpha = 0 \Leftrightarrow e = 0$

$$\frac{\lambda}{L} = (1 + 0) \pm \sqrt{\varepsilon^2 (2 - 1) + 1 - \varepsilon^2} = 1 \pm 1^{\text{imposé}} = 0 \Rightarrow - ; \text{d'où :}$$

$$\boxed{\frac{\lambda}{L_\varepsilon}(\alpha) = (1 + \varepsilon \sin \alpha) - \sqrt{\varepsilon^2 [\cos \alpha (2 - \cos \alpha) - 1] + 1}} \quad \text{[II.1]}$$

Remarque : je ne me vois pas faire l'étude de cette fonction alors que q questions attendent une réponse en temps limité ! Merci la calculette !

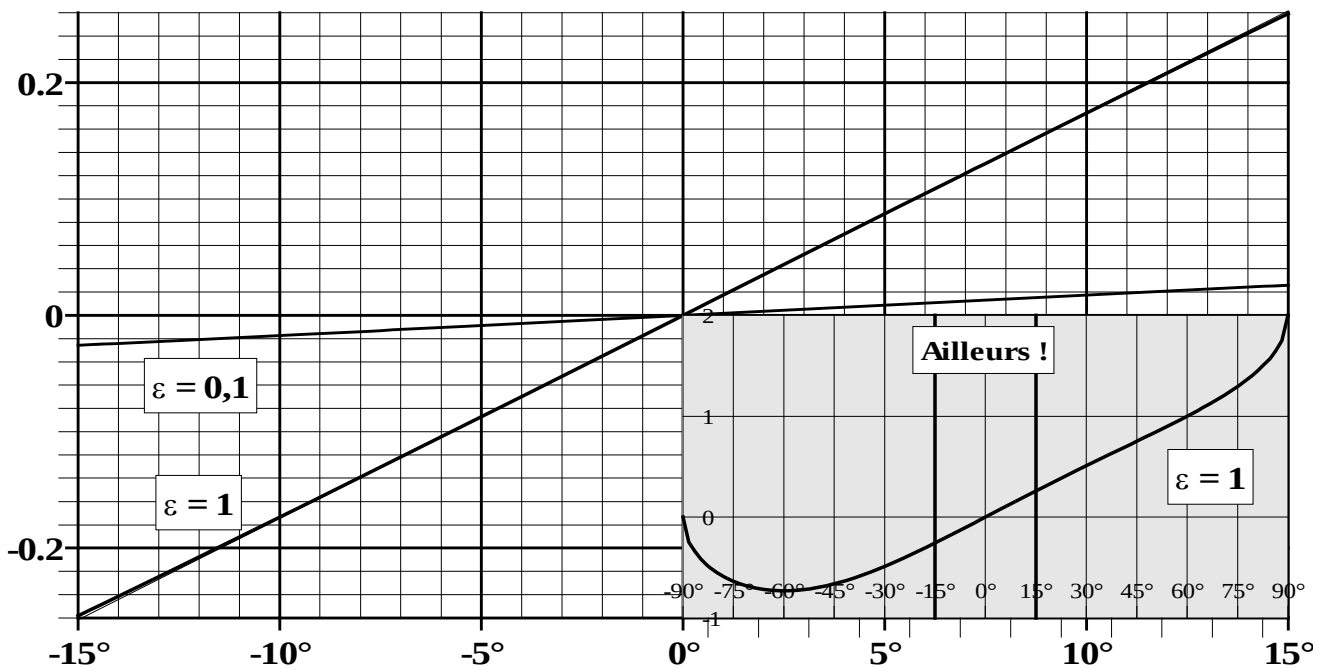


Figure 1 : tracé machinal de [II.1] et [II.2], avec epsilon = 0,1 puis 1 ; on « voit » en bas et à gauche la différence entre les deux courbes, ailleurs elles sont « confondues ». L'encadré montre l'évolution de la courbe dans l'intervalle farfelu [-90,90].

II.5 Si $\alpha \neq 1$ alors [II.1] devient : $\frac{\lambda}{L} = (1 + \varepsilon\alpha) - \sqrt{\varepsilon^2 [(2-1)-1] + 1} = \frac{\lambda}{L} \neq \varepsilon\alpha$ **[II.3]**

II.6 Remarque : Synthèse « mentale » des figures 7 à 9 qui dans leur volonté de simplifier le problème ne facilitent pas tellement (à mon avis) la réflexion du candidat de MP. La justification de tout cela demanderait des dessins théoriquement précis en projections multiples (de type dessin industriel ou descriptive) ou en perspective : ce qui n'est pas très facile pour le candidat type.

D'autre part on remarque que lorsque la translation est nulle (peut-on, d'ailleurs « bloquer » cette translation dans un hélicoptère ?), i.e. lorsque le pilote veut faire varier le pas cyclique le quadrilatère ABCO est un parallélogramme.

- Le mouvement de (**PM**) par rapport à (**R**) est une rotation alternée, orthogonale à l'axe du rotor :
 - Θ permet de choisir le lieu des extrema de l'oscillation de (**PM**) par rapport à (**C**), donc de choisir où (par rapport à (**C**)) les pales ont un angle d'incidence maximal ;
 - φ permet de choisir l'amplitude du mouvement de (**PM**) par rapport à (**R**), donc de choisir la valeur de l'incidence maximale des pales sur un tour de (**R**).
- L'amplitude angulaire vaut φ_0

II.7 Interprétation de l'énoncé : « Montrer que tout se passe comme si l'on imposait une translation verticale sinusoïdale, *par rapport au rotor, au point B* ».

- $\overrightarrow{AB} = -e\vec{x}_m$;
- Quelles sont ses projections dans B_r ?
 - $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{x}_r = -e\vec{x}_m \cdot \vec{x}_r = -e(\cos \psi \vec{x}_f + \sin \psi \vec{y}_1) \cdot \vec{x}_r = -e(\cos \psi (\cos \varphi \vec{x}_1 - \sin \varphi \vec{z}) + \sin \psi \vec{y}_1) \cdot \vec{x}_r$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{x}_r = -e(\cos \psi (\cos \varphi (\cos (\Theta - \theta) \vec{x}_r + ? \vec{y}_r) - \sin \varphi \vec{z}) + \sin \psi (-\sin (\Theta - \theta) \vec{x}_r + ? \vec{y}_r)) \cdot \vec{x}_r$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{x}_r = -e \left[\cos \psi \cos \varphi \cos (\Theta - \theta) - \sin \psi \sin (\Theta - \theta) \right] ; \text{ avec } \varphi = \varphi_0 \text{ « modéré »} :$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{x}_r \stackrel{\varphi \approx 1}{=} -e \left[\cos \psi \underbrace{\cos \varphi}_1 \cos (\Theta - \theta) - \sin \psi \sin (\Theta - \theta) \right] \stackrel{\substack{\psi \approx \theta \\ \theta_0 = 0 \\ \text{par facilité}}}{=} -e \cos (\theta + \Theta - \theta)$$

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{x}_r \approx -e \cos \Theta}$$

[II.4]

o $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{y}_r = -e \vec{x}_m \cdot \vec{y}_r = -e (\cos \psi \vec{x}_f + \sin \psi \vec{y}_1) \cdot \vec{y}_r = -e (\cos \psi (\cos \varphi \vec{x}_1 - \sin \varphi \vec{z}) + \sin \psi \vec{y}_1) \cdot \vec{y}_r$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{y}_r = -e (\cos \psi (\cos \varphi (\vec{x}_r + \sin (\Theta - \theta) \vec{y}_r) - \sin \varphi \vec{z}) + \sin \psi (\vec{x}_r + \cos (\Theta - \theta) \vec{y}_r)) \cdot \vec{y}_r$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{y}_r = -e [\cos \psi \cos \varphi \sin (\Theta - \theta) + \sin \psi \cos (\Theta - \theta)] ; \text{ avec } \varphi = \varphi_0 \text{ « modéré »} :$$

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{y}_r \approx -e \sin \Theta}$$

[II.5]

o La projection de AB sur ces deux axes est constante : c'est du réglage.

o $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{z} = -e \vec{x}_m \cdot \vec{z} = -e (\cos \psi \vec{x}_f + \sin \psi \vec{y}_1) \cdot \vec{z} = -e (\cos \psi (\cos \varphi \vec{x}_1 - \sin \varphi \vec{z}) + \sin \psi \vec{y}_1) \cdot \vec{z}$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{z} = -e (\cos \psi (\cos \varphi (\vec{x}_r + \vec{y}_r) - \sin \varphi \vec{z}) + \sin \psi (\vec{x}_r + \vec{y}_r)) \cdot \vec{z}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{z} = e \cos \psi \sin \varphi ; \text{ avec } \varphi = \varphi_0 \text{ « modéré »} :$$

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{z} \approx \varphi_0 e \cos \theta}$$

[II.6]

- Le mouvement vertical de B par rapport à (**R**) est bien de type harmonique.
- Les extrema de [II.6] sont donnés par : $\sin \theta = 0$, i.e. : $\theta = 0 \quad [\pi]$ dans B_r , donc sont donnés par $\theta = \Theta \quad [\pi]$ dans B.

II.8 $\tan \alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{z}}{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{x}_r} = \frac{\cos \psi \sin \varphi}{\cos \psi \cos \varphi \cos (\Theta - \theta) - \sin \psi \sin (\Theta - \theta)} ; \text{ avec } \varphi = \varphi_0 \text{ « modéré »} :$

$$\tan \alpha \stackrel{\varphi \approx 1}{=} \frac{\cos \psi \overbrace{\sin \varphi_0}^{\varphi_0}}{\cos \psi \underbrace{\cos \varphi}_1 \cos (\Theta - \theta) - \sin \psi \sin (\Theta - \theta)} \stackrel{\substack{\psi \approx \theta \\ \theta_0 = 0 \\ \text{par facilité}}}{=} \frac{\varphi_0 \cos \theta}{\cos (\theta + \Theta - \theta)} \approx \frac{\varphi_0 \cos \theta}{|\cos \Theta|} \approx \tan \alpha \quad \text{[II.7]}$$

III. Contrôle d'accélération ...

III.1 Principe fondamental de la dynamique appliqué à la masse m – de centre d'inertie G – du capteur, réduit à ses résultantes projetées sur $\vec{u}_z$:

$$m \vec{A}(G/R_g) \cdot \vec{u}_z = \vec{R}(T \rightarrow m) \cdot \vec{u}_z + \vec{R}(C \xrightarrow{\text{ressort}} m) \cdot \vec{u}_z + \vec{R}(C \xrightarrow{\text{amortisseur}} m) \cdot \vec{u}_z$$

$$m \vec{A}(G/R_g) \cdot \vec{u}_z = m g \vec{u}_z \cdot \vec{u}_z - k(z - z_0) \vec{u}_z \cdot \vec{u}_z - \mu \dot{z} \vec{u}_z \cdot \vec{u}_z \quad [\text{III.1}]$$

$$\text{Or : } m \vec{A}(G/R_g) \cdot \vec{u}_z = m \vec{A}(G/R) \cdot \vec{u}_z + m \vec{A}(G \in R/R_g) \cdot \vec{u}_z + \left[2 \underbrace{\vec{\Omega}(R/R_g)}_{\text{Hypothèse}} \wedge \vec{V}(G/R) \right] \cdot \vec{u}_z$$

$$m \vec{A}(G/R_g) \cdot \vec{u}_z = m \ddot{z} - m a_c \quad [\text{III.2}]$$

$$m \ddot{z} - m a_c = m g - k(z - z_0) - \mu \dot{z}$$

Lorsque l'accéléromètre est au repos ($\ddot{z} = \dot{z} = a_c = 0$) on a : $z = 0$; d'où :

$$0 = m g - k(-z_0) \Rightarrow z_0 = -\frac{m g}{k} \text{ et finalement :}$$

$$m \ddot{z} + \mu \dot{z} + k z = m(g + a_c) - m g = \boxed{m a_c = m \ddot{z} + \mu \dot{z} + k z} \quad [\text{III.3}]$$

III.2 Les conditions initiales sont implicitement nulles, d'où :

$$m A_c = m p^2 Z + \mu p Z + k Z = Z(k + \mu p + m p^2)$$

$$H = \frac{Z}{A_c} = \frac{m}{k + \mu p + m p^2} = \boxed{\frac{\frac{m}{k}}{1 + \frac{\mu}{k} p + \frac{m}{k} p^2}} = H \quad [\text{III.4}]$$

III.3

• **G**

ain statique : $\boxed{K = \frac{m}{k}} \square \frac{96 \cdot 10^{-6}}{38,6} \square 2 \cdot 10^{-6} \quad [\text{III.5}]$

• **P**

ulsion propre non amortie : $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}} \square \sqrt{\frac{38,6}{96 \cdot 10^{-6}}} \square 634 \text{ rad.s}^{-1} \square 100 \text{ Hz} \quad [\text{III.6}]$

•

coefficient d'amortissement : $\frac{2z}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{\mu}{k} \Rightarrow \boxed{z = \frac{\mu}{2\sqrt{km}}} \approx \frac{0,15}{2\sqrt{38,6 \times 96 \times 10^{-6}}} \approx 1,2$ [III.7]

•

, d'où $Q = 0$ et ω_2 inexistant (pas de résonance) ;

•

$$\omega_{-3} = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{1 - \frac{\mu^2}{2km} + \sqrt{\frac{8k^2m^2}{4k^2m^2} - \frac{4\mu^2km}{4k^2m^2} + \frac{\mu^4}{4k^2m^2}}} = \frac{\sqrt{2km - \mu^2 + \sqrt{8k^2m^2 - 4\mu^2km + \mu^4}}}{m\sqrt{2}}$$

$$\omega_{-3} = \frac{\sqrt{2 \times 38,6 \times 96 \times 10^{-6} - 0,15^2 + \sqrt{8 \times 38,6^2 \times 96^2 \times 10^{-12} - 4 \times 0,15^2 \times 38,6 \times 96 \times 10^{-6} + 0,15^4}}}{96 \times 10^{-6} \sqrt{2}}$$

$\omega_{-3} \approx 310 \text{ rad.s}^{-1}$ [III.8]

III.4 Tracé à la main de ces courbes bien connues du taupin !!!

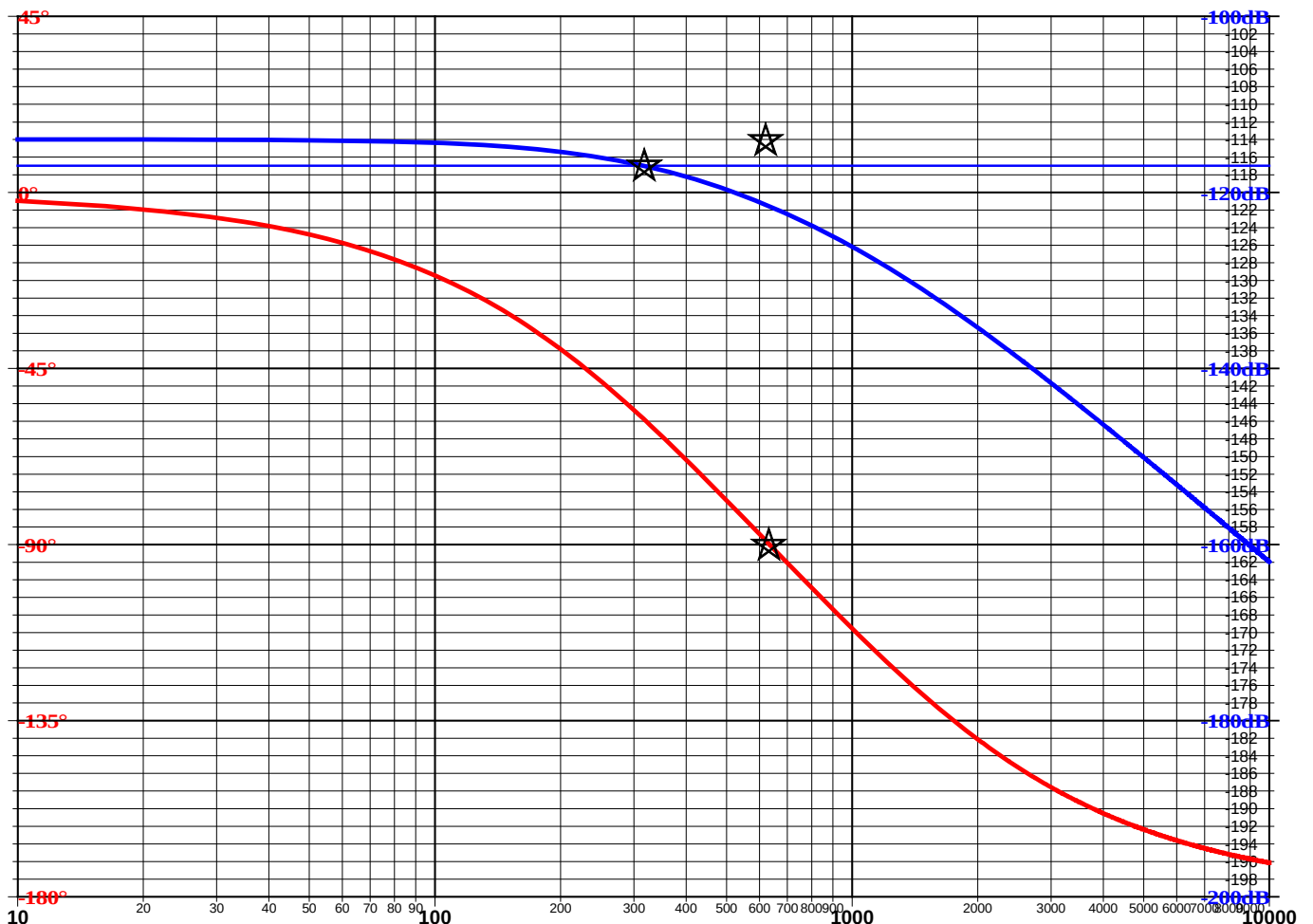


Figure 2 : tracé machinal de fonctions très scolaire.

III.5 Filtre passe bas du deuxième ordre, voisin de l'amortissement critique et de pulsation de coupure à -3 dB de 310 rad.s^{-1} .

III.6 Capacité d'équilibre : $C_0 = \epsilon_0 \frac{S}{\delta} \approx 141 \text{ pF}$

III.7 $C_1 = \epsilon_0 \frac{S}{\delta + z}$ et $C_2 = \epsilon_0 \frac{S}{\delta - z}$, d'où : $\Delta C = C_2 - C_1 = \epsilon_0 \frac{2Sz}{\delta^2 - z^2} = \Delta C$ [III.9]

• t la charge vaut $q = -C_1 v_1 - C_2 v_2 = v_1 \Delta C$, quand $v_2 = -v_1$ [III.10]

III.8 Pour de petits déplacements : $\Delta C = \epsilon_0 \frac{2Sz}{\delta^2} \approx 2,8 \text{ pF}$, quand $z = 1 \text{ } \mu\text{m}$. [III.11]

• n a alors : $q = \frac{2\epsilon_0 S v_1}{\delta^2} z$. [III.12]

III.9 Remarque : Je ne vois pas trop la réponse attendue :

le fait que l'on n'aura plus linéarité entre q et z ?

l'importance croissante des forces électrostatiques (mais elles sont étudiées plus loin) ??

III.10 Énergie électrostatique du condensateur i : $W_{ei} = \frac{1}{2} C_i v_i^2$

puis : $W_{e1} + W_{e2} = W_{el} = \frac{1}{2} (C_1 v_1^2 + C_2 v_2^2)$ [III.13]

III.11 d'où la force électrostatique : $\vec{F}_{el} = \frac{1}{2} \left(v_1^2 \frac{dC_1}{dz} + v_2^2 \frac{dC_2}{dz} \right) \vec{u}_z$ [III.14]

III.12 puis avec les expressions des C_i : $\vec{F}_{el} = \frac{1}{2} \frac{C_0}{\delta} \left(-\frac{v_1^2}{(1+z/\delta)^2} + \frac{v_2^2}{(1-z/\delta)^2} \right) \vec{u}_z$ [III.15]

III.13 Pour z petit et avec $v_2 = -v_1$: $\vec{F}_{el} = \frac{2C_0}{\delta^2} v_1^2 z \vec{u}_z$ [III.16]

• $v_1^2 = \frac{U^2}{2} (1 - \cos(2\omega_1 t))$ contient du **continu** et la fréquence $2\omega_1$.

III.14 En prenant des fréquences f_1 élevées devant $\omega_0/2\pi$ (valeur en dessous de laquelle doivent être les variations de $z(t)$ si l'on veut une réponse $H = G$ indépendante de la fréquence), on pourra remplacer

v_1^2 par sa valeur moyenne, ce qui donne : $\vec{F}_{el} = \frac{C_0 U^2}{\delta^2} z \vec{u}_z$ avec une raideur :

$$K_{el} = \frac{C_0 U^2}{\delta^2} \approx 3,2 \text{ N.m}^{-1}.$$

III.15 On obtient les mêmes résultats qu'aux **III.1** et **III.2** en remplaçant la raideur k par la raideur globale :

$$k' = k - K_{el} \approx 35,4 \text{ N.m}^{-1} ; \text{ un peu plus faible que sans les effets électriques.} \quad [\text{III.17}]$$

III.16 On calcule alors pour la fonction de transfert des caractéristiques peu modifiées :

• P

pulsation propre non amortie : $\omega_0' = \sqrt{\frac{k'}{m}} \approx 607 \text{ rad.s}^{-1} \approx 97 \text{ Hz}$ [III.18]

• g

gain statique : $K' = \frac{m}{k'} \approx \frac{96 \cdot 10^{-6}}{35,4} \approx 3 \cdot 10^{-6} ;$ [III.19]

• C

coefficient d'amortissement : $z = \frac{\mu}{2\sqrt{k'm}} \approx \frac{0,15}{2\sqrt{35,4 \times 96 \cdot 10^{-6}}} \approx 1,3$ [III.20]

III.17 Le spectre de gain de $H' = \frac{Z'}{A}$ est strictement décroissant en fonction de la pulsation donc le gain maximal de H' est son gain statique K' ; donc : $A_{\max} K' = Z'_{\max}$. Avec un déplacement maximal de $0,3\delta$, on peut mesurer une accélération maximale de $0,3 \frac{\delta}{K'} \approx 0,3 \frac{10^{-4}}{96 \cdot 10^{-6}} \approx 11 \text{ m.s}^{-1}$.

III.18 Principe fondamental de la dynamique appliqué à l'hélicoptère, réduit à ses résultantes, projetées sur $\vec{z}$ (on néglige les effets de la traînée du rotor anticouple qui créent une portance de l'hélicoptère) :

$$M \vec{A}(G/R_g) \cdot \vec{z} = \vec{R}(T \xrightarrow{\text{perturbation}} C) \cdot \vec{z} + \vec{R}(T \xrightarrow{\text{pesanteur}} C) \cdot \vec{z} + \vec{R}(T \xrightarrow{\text{air}} \{P, P\}) \cdot \vec{z}$$

$$Ma_c = f - Mg + \underbrace{(F_{z,eq} - \delta F_z)}_{F_z} = f - Mg + (Mg - \delta F_z) = \boxed{f - \delta F_z = Ma_c}$$

- Si $a_c > 0$, l'hélicoptère a tendance à monter. Or, l'asservissement devrait avoir tendance à le faire baisser en diminuant la portance, donc l'incrément de portance δF_z doit être positif de manière à ce que $F_{z,eq} - \delta F_z$ diminue. $\boxed{\delta F_z > 0}$

III.19 $\frac{\Delta\lambda}{V_s} = \frac{K_m}{1+Tp}$ [III.21]

III.20 Remarque : le paragraphe : « La fonction de transfert ... temps caractéristique T » de l'énoncé et la rédaction de cette question ne me sont pas très clairs. Le moteur et les vérins ne sont pas très bien définis ; pour moi un vérin est un moteur linéaire et cette notion me semble incompatible avec la phrase : « il convertit ce signal, via les vérins, en une translation ... ». Sont-ce des leviers ? Mais, dans la question on nous indique que les vérins (pourquoi un pluriel d'ailleurs ? Est-ce la tringlerie ?) possèdent un comportement du premier ordre !

- **Moteur :** on peut supposer que c'est un **moteur à courant continu** bien connu du taupin lambda qui est classiquement modélisé par une fonction de transfert du deuxième ou du premier ordre selon le degré de précision qu'on souhaite obtenir.
- **Vérins ou tringlerie** (c'est moi qui propose l'alternative !) :
 - **Vérins électriques :** comportant le moteur rotatif précédent et un système « vis-écrou » qui se comporte comme un gain pur (à moins qu'on tienne compte de la dynamique du système vis écrou !)
 - **Tringlerie :** à l'image du « quatre barres » le comportement d'une tringlerie spatiale est fortement non linéaire et sa fonction de transfert est souvent quelconque. Petits mouvements associés à un premier ordre, c'est possible ; peut-être qu'une observation plus attentive des photographies de la figure 7 permettrait une meilleure réponse !
- L'organe limité me semble être le moteur dont les limites techniques sont bien connues : seuil, saturation, hystérésis

III.21

- AffichageT
donne : $K_1 = \frac{\lambda}{\alpha} \square \varepsilon L$ [III.22]
- [I.11] et $C_z = \kappa_0 \alpha$ donnent :

$$F_z = 2 \frac{\rho l C_z \omega^2}{3} R^3 = \frac{\rho l \kappa_0 \alpha \omega^2 R^3}{3} \Rightarrow \frac{F_z}{\alpha} = K_2 = \frac{\rho l \kappa_0 \omega^2 R^3}{3} \quad \text{[III.23]}$$

III.22

- AffichageT
et la **figure 12** de l'énoncé donnent : $\frac{V_s}{Z} = \frac{K_s 2 \varepsilon_0 S v_1}{\delta^2}$ [III.24]

- AffichageT
donne : $\frac{\Delta\lambda}{V_s} = \frac{K_m}{1+Tp}$

- $\frac{\Delta\alpha}{\Delta\lambda} = K_1$
- et $\frac{\Delta F_z}{\Delta\alpha} = K_2$ [III.25]

•
donne :
$$H = \frac{\frac{m}{k}}{1 + \frac{\mu}{k}p + \frac{m}{k}p^2}, \text{ ou } H' ;$$

III.23
$$\frac{A_c}{F} = \frac{\frac{1}{M}}{1 + \frac{1}{M} \frac{\frac{m}{k}}{1 + \frac{\mu}{k}p + \frac{m}{k}p^2} \frac{K_s 2\varepsilon_0 S v_1}{\delta^2} \frac{K_m}{1 + Tp} K_1 K_2}$$

$$\frac{A_c}{F} = \frac{\frac{\left(1 + \frac{\mu}{k}p + \frac{m}{k}p^2\right)(1 + Tp)}{M \left(1 + \frac{\mu}{k}p + \frac{m}{k}p^2\right)(1 + Tp)}}{\frac{\left(1 + \frac{\mu}{k}p + \frac{m}{k}p^2\right)(1 + Tp)}{\left(1 + \frac{\mu}{k}p + \frac{m}{k}p^2\right)(1 + Tp)} + \frac{m K_s 2\varepsilon_0 S v_1 K_m K_1 K_2}{M k \delta^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{\mu}{k}p + \frac{m}{k}p^2\right)(1 + Tp)}}$$

$$\frac{A_c}{F} = \frac{\frac{1}{M} \left(1 + \frac{\mu}{k}p + \frac{m}{k}p^2\right)(1 + Tp)}{\left(1 + \frac{\mu}{k}p + \frac{m}{k}p^2\right)(1 + Tp) + \frac{m K_s 2\varepsilon_0 S v_1 K_m K_1 K_2}{M k \delta^2}}$$

$$\frac{A_c}{F} = \frac{\frac{1}{M} \left(1 + \frac{\mu}{k}p + \frac{m}{k}p^2\right)(1 + Tp)}{\frac{m K_s 2\varepsilon_0 S v_1 K_m K_1 K_2}{M k \delta^2} + \left(\frac{\mu}{k} + T\right)p + \left(\frac{\mu T}{k} + \frac{m}{k}\right)p^2 + \frac{m T}{k}p^3}$$

etc. !

III.24

- Pifométriquement, la turbulence atmosphérique est chaotique donc le champ d'effort qu'elle exerce sur les pâles est a priori quelconque et se modélise par un torseur quelconque qui a un effet tridimensionnel sur la traînée et la portance. C'est donc le comportement en translation dans toutes les directions et en rotation dans toutes les directions qu'il faut maîtriser. L'accélération d'entraînement est pertinente mais incomplète.
- Toujours aussi pifométriquement, il faudrait probablement trois accéléromètres orthogonaux deux à deux (quoique ! il faudrait alors trois boucles d'asservissement ! est-ce la question posée ?) et une centrale inertielle pour détecter les mouvements naissants de rotation, puisque tout le comportement dynamique de l'hélicoptère est conditionné par l'incidence des pales. Tous les mouvements naissants sont contrebalancés par les réglages – manuels ou asservis – du plateau fixe.
- **Remarque** : une réponse pertinente à cette question demanderait plus de réflexion.

**

*

Remarque : Bien que relu, ce corrigé n'est probablement pas exempt d'erreurs de calcul, d'interprétation ou pire de compréhension !