

I. 1. 1. Equation de Navier-Stokes (d'Euler pour un fluide visqueux; loi fondamentale de la dynamique appliquée à une particule de fluide de masse ρd^3r):

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \text{dérivée particulaire de la vitesse} = \text{accélération}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \text{accélération locale}; (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \text{accélération convective}$$

$\rho \vec{g}$ = densité volumique de force de pesanteur

$-\text{grad} P$ = densité volumique de force équivalente aux forces de pression

$\eta \Delta \vec{v}$ = densité volumique de force équivalente aux forces de viscosité dans un fluide newtonien

I. 1. 2. Nombre de Reynolds $Re = \frac{\text{temps caractéristique de la diffusion}}{\text{temps caractéristique de la convection}} = \frac{\rho h^2 / \eta}{h / v}$

$$Re = \frac{\rho h v}{\eta}$$

La longueur caractéristique est ici h ($h \ll w \ll L$), la plus petite dimension.

$Re = \frac{10^3 \times 10^{-5} \times 10^{-4}}{10^{-3}} = 10^{-3} \ll 1$; écoulement "rampant"; $h \ll d$ où d serait l'épaisseur de la couche limite; la viscosité est à prendre en compte dans tout le fluide (sur toute l'épaisseur h).

I. 1. 3. Ecoulement selon Ox: $\vec{v} = v_x(x, y, z, t) \vec{e}_x$

Invariance par translation selon Oy: $\frac{\partial \vec{v}}{\partial y} = \vec{0}$

Fluide incompressible: $\text{div} \vec{v} = 0$ donc $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$ } $v_x(z, t)$

I. 1. 4. En régime stationnaire $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$; $\vec{v} = v_x(z) \vec{e}_x$

De plus, ici: $(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = 0$ } $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{0}$
car $v_y = v_z = 0$ car $v_x(z, t) = 0$

L'équation de Navier-Stokes devient: $0 = \rho \vec{g} - \text{grad} P + \eta \Delta \vec{v}$

En projection: $\frac{\partial P}{\partial x} = + \eta \Delta v_x$ (1)
avec $P(x, y, z)$ } $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$ (2) $\Rightarrow P(x, z)$
 $\frac{\partial P}{\partial z} = - \rho g$ (3)

(1) s'écrit $\frac{\partial P}{\partial x} = \eta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) = \eta \frac{\partial^2 v_x(z)}{\partial z^2} = \eta \frac{d^2 v_x}{dz^2}$ = fonction de z seule.

$\frac{\partial P}{\partial x}$ est indépendante de x ; $\frac{\partial P}{\partial x} = a(z)$; $P = a(z) \cdot x + b(z)$

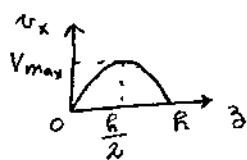
$\Delta P = P(0) - P(L) = -a(z)L$ donc $a(z) = -\frac{\Delta P}{L}$ (indépendant de z)

$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\Delta P}{L}$; réinjecté dans (1) $-\frac{\Delta P}{L} = \eta \frac{d^2 v_x}{dz^2}$

I. 1. 5. Par intégration: $v_x = -\frac{1}{2} \frac{\Delta P}{L \eta} z^2 + A z + B$ } $B=0$; $A=...$

Non glissement sur les parois: $v_x(0) = v_x(h) = 0$ } $v_x = \frac{\Delta P}{2 L \eta} z(h-z)$

On obtient un profil des vitesses parabolique; écoulement de Couette 2/7



$$v_{\max} = v_x\left(\frac{R}{2}\right) = \frac{\Delta P \cdot R^2}{8 L \eta}$$

$$V_0 = \frac{1}{R} \int_0^R v_x(z) dz = \frac{1}{R} \frac{\Delta P}{2 L \eta} \int_0^R z(R-z) dz = \boxed{\frac{\Delta P \cdot R^2}{12 L \eta}} = V_0$$

I. 1. 6 $Q = \iint_{\text{section}} \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_{y=-\frac{W}{2}}^{y=\frac{W}{2}} \int_{z=0}^R v_x(z) dy dz = \int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} dy \int_0^R v_x(z) dz = W \cdot R V_0 = V_0 A$ (cf. II. 1. 1.)

D'où $Q = \frac{R^3 W \Delta P}{12 \eta L}$

I. 1. 7 $\Delta P = \frac{Q \cdot 12 \eta L}{R^3 W} = \frac{10^{-12} \times 12 \times 10^{-3} \times 10^{-3}}{(10^{-5})^3 \times 10^{-4}} = 120 \text{ Pa}$

Le dispositif de vases communicants fonctionne en régime (quasi) stationnaire avec un fluide parfait (et incompressible) dans les deux "colonnes" à gauche et à droite. On peut donc y appliquer le théorème de Bernoulli entre un point de la surface (pression P_0 , vitesse quasi-nulle car grande section, altitude z_G à gauche, z_D à droite) et un point au fond (pression $P(0)$ à gauche, $P(L)$ à droite et vitesse $v(0) = v(L)$): $\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + g z = \text{cte}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{à gauche: } 0 + \frac{P_0}{\rho} + g z_G = \frac{v(0)^2}{2} + \frac{P(0)}{\rho} + 0 \\ \text{à droite: } 0 + \frac{P_0}{\rho} + g z_D = \frac{v(L)^2}{2} + \frac{P(L)}{\rho} + 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} g z_G = \frac{P(0)}{\rho} \\ g z_D = \frac{P(L)}{\rho} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} g(z_G - z_D) = \frac{P(0) - P(L)}{\rho} \\ g \Delta H = \frac{\Delta P}{\rho} \end{array} \right\}$$

D'où $\Delta H = \frac{\Delta P}{\rho g} \approx \frac{120}{10^3 \times 10} = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 1,2 \text{ cm}$

Pour $R = 100 \mu\text{m}$, on trouve $\Delta P = \frac{120}{10^3} = 0,12 \text{ Pa}$ et $\Delta H = \frac{1,2 \cdot 10^{-2}}{10^3} = 12 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 12 \mu\text{m}$.

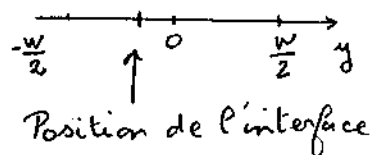
L'expérience est réalisable pour $R = 10 \mu\text{m}$ avec $\Delta H = 1,2 \text{ cm}$ ajustable par un expérimentateur soigneux; elle est irréalisable pour $R = 100 \mu\text{m}$ et $\Delta H = 12 \mu\text{m}$!

I. 2. 1. D'après le résultat trouvé en I. 1. 6 (Hagen-Poiseuille):

$$\left. \begin{array}{l} Q_1 = \frac{R^3 \Delta P}{12 L} \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2} \right) W \times \frac{1}{\eta_1} \\ Q_2 = \frac{R^3 \Delta P}{12 L} \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) W \times \frac{1}{\eta_2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 Q_1 \eta_1 = (1 + \alpha) K \\ 2 Q_2 \eta_2 = (1 - \alpha) K \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{Q_1 \eta_1}{Q_2 \eta_2} = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \frac{Q_1 \eta_1 - Q_2 \eta_2}{Q_1 \eta_1 + Q_2 \eta_2}}$$

I. 2. 2 $\alpha = \frac{50 \eta_e - \eta_R}{50 \eta_e + \eta_R} = \frac{50 \cdot 10^{-3} - 10^{-1}}{50 \cdot 10^{-3} + 10^{-1}} = \frac{0,5 - 1}{0,5 + 1} = -\frac{1}{3} = -0,33$

Et ça s'arrête là.... On passe à autre chose.... Bof....

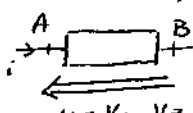


II. 1. 1 Le courant électrique est un écoulement de charges, l'intensité i représentant le débit de charge, analogue à Q , débit volumique.

3/7

$$i = \iint \vec{j}_q \cdot d^2\vec{S} \quad \text{et} \quad Q = \iint \vec{v} \cdot d^2\vec{S} = V_0 A \quad (\text{trouvé en I. 1. 6})$$

$$\begin{aligned} \text{II. 1. 2. } P_m &= \text{puissance des forces de pression qui s'exercent sur les 2 faces } (x=0; x=L) \\ &= \iint_{\text{section } x=0} P(0) \vec{e}_x \cdot d^2\vec{S} \cdot \vec{v}(0) - \iint_{\text{section } x=L} P(L) \vec{e}_x \cdot d^2\vec{S} \cdot \vec{v}(L) = P(0)Q(0) - P(L)Q(L) \\ &= [P(0) - P(L)]Q = \Delta P \cdot Q \end{aligned}$$

En électrocinétique :  La puissance reçue par le dipôle est : $P = i(V_A - V_B) = i u$

L'analogie de $\Delta P = P(0) - P(L)$ est donc la différence de potentiel $u = V_A - V_B$

II. 2. 1. On fait donc une analogie avec la loi d'Ohm : $u = R i$ avec

$\Delta P = R_{hd} \cdot Q$ et on obtient, d'après la loi de Hagen-Poiseuille :

$$R_{hd} = \frac{\Delta P}{Q} = \frac{12 \eta L}{R^3 W} = \boxed{\frac{12 \eta L}{R^3 A} = R_{hd}}$$

II. 2. 2 : $\eta_e = \frac{R_{hd}}{L}$ = résistance hydraulique par unité de longueur de canal.

II. 2. 3 : Les différentes tranches sont "montées en série" (elles sont traversées par le même débit ; les différences de pression s'ajoutent) : les résistances hydrauliques s'ajoutent. Il y a n tranches d'eau de longueur (chacune) $(\lambda - L_g)$ donc de résistance (chacune) $\eta_e (\lambda - L_g)$.

Il y a n tranches d'huile de longueur L_g , de résistance linéique

$\eta_R (= \frac{\eta_R}{\eta_e})$, donc de résistance $\eta_R L_g$.

$$R_{eq} = n \left[\eta_e (\lambda - L_g) + \eta_R L_g \right] = n \eta_e \left[\lambda - L_g + \frac{\eta_R}{\eta_e} L_g \right] \quad \text{avec } n \lambda = L$$

$$\text{et } \Delta P = Q_0 R_{eq} = \boxed{Q_0 \eta_e L \left[1 + \frac{L_g}{\lambda} \left(\frac{\eta_R}{\eta_e} - 1 \right) \right] = \Delta P}$$

Si $\eta_e \ll \eta_R$: $\frac{\eta_R}{\eta_e} - 1 \approx \frac{\eta_R}{\eta_e}$ et $\Delta P \approx Q_0 \eta_e L \left(1 + \frac{L_g \eta_R}{\lambda \eta_e} \right)$; $R_{eq} \approx \eta_e L \left(1 + \frac{L_g \eta_R}{\lambda \eta_e} \right) > \eta_e L$
 [Si de plus on n'a pas $L_g \ll \lambda$, on peut garder $\Delta P \approx \frac{Q_0 \eta_e L L_g \eta_R}{\lambda \eta_e}$]

II. 2. 4 : $Q_0 = Q_1 + Q_2$ est l'équivalent de la loi des nœuds : il y a conservation du débit (de volume ou de charge).

II. 2. 5 : Initialement, les canaux étant remplis d'eau et soumis à la même différence de pression ΔP : $Q_i = \frac{\Delta P}{\eta_e L_i}$

Puisque $L_2 > L_1$, alors $Q_2 < Q_1$ et les gouttes d'huile s'orientent vers le bras 1.

II. 2. 6 : Lorsqu'un nombre croissant de gouttes pénètre dans le bras 1, $R_{eq,1} \nearrow$ (cf fin de II. 2. 3) et $Q_1 \downarrow$; il faut que l'on ait toujours $Q_1 \geq Q_2$, donc

$$\frac{1}{\eta_e L_1 \left(1 + \frac{L_g \eta_R}{\lambda \eta_e} \right)} \geq \frac{1}{\eta_e L_2} \quad , \text{ donc } L_2 \geq L_1 \left(1 + \frac{L_g \eta_R}{\lambda \eta_e} \right) \quad , \text{ donc } \frac{L_2 - L_1}{L_1} \geq \frac{L_g}{\lambda} \times \frac{\eta_R}{\eta_e}$$

$$\text{II.3.1. a) } \vec{P} = \iiint \rho \vec{v} d^3r = \rho \int_{x=0}^L \int_{y=-\frac{W}{2}}^{+\frac{W}{2}} \int_{z=0}^R \vec{v}(z,t) dx dy dz = \rho L W \int_0^R v(z,t) dz \vec{e}_x$$

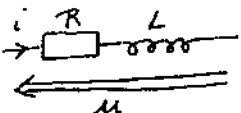
$$\vec{P} = \rho L Q(t) \vec{e}_x$$

$$\text{b) Théorème de la résultante cinétique: } \frac{d\vec{P}}{dt} = \left[\iint_{x=0} P(0) dy dz - \iint_{x=L} P(L) dy dz \right] \vec{e}_x$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = [P(0) - P(L)] R W \vec{e}_x = \Delta P \cdot R W \vec{e}_x \quad \text{d'où: } \rho L \frac{dQ}{dt} = R W \Delta P \quad \Delta P = \frac{\rho L}{A} \frac{dQ}{dt}$$

$$\text{donc } \boxed{I_{Rd} = \frac{\rho L}{A}}$$

c) $\Delta P = I_{Rd} \frac{dQ}{dt}$ est l'équivalent hydraulique de $u = L \frac{di}{dt}$; I_{Rd} est donc l'équivalent hydraulique d'une auto-inductance.

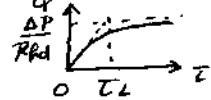
II.3.2. a) Le circuit électrique équivalent est 

$$\text{avec } u = R i + L \frac{di}{dt}$$

$$\text{On obtient donc } \boxed{\Delta P = R_{Rd} Q + I_{Rd} \frac{dQ}{dt}} \quad \frac{\Delta P}{I_{Rd}} = \frac{R_{Rd}}{I_{Rd}} Q + \frac{dQ}{dt}$$

b) On pose (homogénéité): $\tau_L = \frac{I_{Rd}}{R_{Rd}}$ $\frac{\Delta P}{I_{Rd}} = \frac{Q}{\tau_L} + \frac{dQ}{dt}$ (τ_L est l'analogue de $\tau = \frac{L}{R}$)

$$\text{La solution est } Q = \frac{\Delta P}{R_{Rd}} (1 - e^{-t/\tau_L})$$



$$\text{c) } \tau_L = \frac{\rho L}{A} \times \frac{R^2 A}{12 \eta_e L} = \frac{\rho R^2}{12 \eta_e} = \frac{10^3 \times 10^{-10}}{12 \cdot 10^{-3}} = 8,33 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 8,33 \mu\text{s} \ll 1 \text{ ms}$$

A l'échelle de temps des expériences, l'établissement du régime permanent est instantané, et les effets d'inertance sont négligeables.

$$\text{II.4.1. a) } \Delta P_{cap} = \frac{2\gamma}{R} = \frac{2 \times 7 \cdot 10^{-2}}{10^{-5}} = 14 \cdot 10^3 \text{ Pa} \quad \left. \begin{array}{l} \Delta P_{hyd} = \rho g H \approx \rho g h = 10^3 \times 10 \times 10^{-5} = 0,1 \text{ Pa} \\ \Delta P_{hyd} \ll \Delta P_{cap} \end{array} \right\}$$

$\Delta P_{cap} = 0,14 \text{ Pa}$ (donc équivalent à une colonne de 1,4 m); ΔP_{cap} suffit pour "pousser" l'eau dans le micro-canal, même en l'absence de dénivellation.

b) Relation de Bernoulli entre un point de la surface du large réservoir ($v \neq 0$; $P = P_0$) et le point A ($v = \dot{x}$; $P = P_A$):

$$0 + \frac{P_0}{\rho} = \frac{(\dot{x})^2}{2} + \frac{P_A}{\rho} \quad \boxed{P_0 - P_A = \rho \frac{(\dot{x})^2}{2}} \quad \text{effet négligeable}$$

c) Dans l'eau, au niveau de l'interface de droite (en x), la pression est $\left(P_0 - \frac{2\gamma}{R} \right)$ (différence de pression capillaire)

$$\left[(P_A - \rho g x) \text{ et } Q = h W \dot{x} = A \dot{x} \text{ (loi de Hagen-Poiseuille)} \right]$$

$$\text{d'où } P_0 - \frac{2\gamma}{R} = P_0 - \rho \frac{(\dot{x})^2}{2} - \rho g A x \dot{x}$$

$$\boxed{\rho \frac{\dot{x}^2}{2} + \rho g A x \dot{x} - \frac{2\gamma}{R} = 0}$$

$$e) \quad x = \frac{2}{\lambda_e A} \sqrt{\frac{P\delta}{R}} Y$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{b dY}{\theta dT} = \frac{2}{\lambda_e A} \sqrt{\frac{P\delta}{R}} \times \frac{2\lambda_e A}{P} \frac{dY}{dT} \quad \left. \vphantom{\frac{dx}{dt}} \right\} \text{d'où}$$

$$\frac{P}{2} \times \frac{16\delta}{R P} \left(\frac{dY}{dT} \right)^2 + \lambda_e A \times \frac{2}{\lambda_e A} \sqrt{\frac{P\delta}{R}} \times 4 \sqrt{\frac{\delta}{P R}} \cdot Y \cdot \frac{dY}{dT} - \frac{2\delta}{R} = 0$$

$$4 \frac{\delta}{R} \left(\frac{dY}{dT} \right)^2 + 4 \frac{\delta}{R} Y \cdot \frac{dY}{dT} - \frac{\delta}{R} = 0 \Leftrightarrow 4 \left(\frac{dY}{dT} \right)^2 + 4 Y \frac{dY}{dT} - 1 = 0$$

Analyse dimensionnelle: T, M, L : dimensions d'un temps, d'une masse, d'une longueur

$$[T] = \frac{[P]}{[\lambda_e]} \cdot L^2 = \frac{[P]}{M \cdot L^{-3}} \times \frac{[P]}{[R^2 A]} = \frac{[P]}{M L^{-3}} \times \frac{M L T^{-2}}{L^2} \times T \times \frac{1}{L^4} = \frac{M}{M} \times \frac{L}{L} \times T^2 \cdot T^{-2} \text{ sans dimension}$$

$$[Y] = \frac{L [\lambda_e] L^2 [R]^{\frac{1}{2}}}{[P\delta]^{\frac{1}{2}}} = L^3 \times \frac{M L T^{-2}}{L^2 \cdot L^4} T \times \left[\frac{L}{M L^{-3} M L T^{-2} L^{-1}} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{M L^2 T^{-1}}{[M^2 L^{-4} T^{-2}]^{\frac{1}{2}}} = \frac{M L^2 T^{-1}}{M L^{-2} T^{-1}} \text{ sans dimension}$$

$$f) \quad \theta = \frac{P R^2}{2 \times 12 \eta_e} = \frac{10^3 \cdot 10^{-10}}{2 \times 12 \times 10^{-3}} = 4,17 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

$$b = \frac{2 R^2}{12 \eta_e} \sqrt{\frac{P\delta}{R}} = \frac{2 \times 10^{-10}}{12 \times 10^{-3}} \sqrt{\frac{10^3 \times 7 \cdot 10^{-2}}{10^{-5}}} = 4,41 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 44,1 \mu\text{m}$$

g) Cas $Y \ll 1$. On réglige $4Y \frac{dY}{dT}$: $\left(\frac{dY}{dT} \right)^2 = \frac{1}{4}$ $\frac{dY}{dT} = \pm \frac{1}{2}$; on garde $\frac{dY}{dT} = +\frac{1}{2}$ c'est le début de l'expérience et le liquide entre: $Y \nearrow$

On obtient $Y = \frac{T}{2} + 0$ (car à $T=0$, $Y=0$; à $t=0$, $x=0$); on a bien $Y \ll \frac{dY}{dT}$ (pour $T \ll 1$).

Cas $Y \gg 1$. On réglige $4\dot{Y}^2$, ce qui suppose $|\frac{dY}{dT}| \ll 1$ (sinon il faudrait régliger le "1")

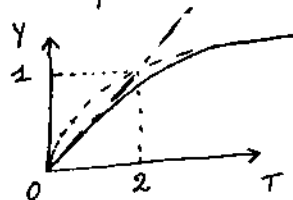
$$4Y \frac{dY}{dT} = 1 \Leftrightarrow \frac{d}{dT} (Y^2) = \frac{1}{2} \quad Y^2 = \frac{T}{2} + a \quad Y = \sqrt{\frac{T}{2} + a}$$

On ne peut pas imposer la condition initiale à $T=0$!

Cette solution correspond à $\frac{dY}{dT} = \frac{1}{4\sqrt{\frac{T}{2} + a}} \ll 1$ pour $Y \gg 1$ (c'est à dire $T \gg 1$)

Rem: L'équation différentielle est intégrable; on cherche $\frac{dY}{dT}$ solution d'une équation du 2^e degré (dont on regarde que la solution positive; $Y(T) \nearrow$), puis on intègre et on trouve $Y^2 + Y \sqrt{1+Y^2} + \ln(Y + \sqrt{1+Y^2}) = T + 0$

Cela permet de prendre $a=0$ (sinon, pas d'argument...)



On trace la droite et la parabole; ce qui donne un "trace asymptotique" puis la courbe confondue avec la droite pour $Y \ll 1$ et avec la parabole pour $Y \gg 1$.

Il y a raccordement pour $\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{T}{2}}$ donc $T=2$ et $Y=1$

Le temps caractéristique est donc $t_c = T \cdot \theta = 2\theta$ (# $8 \mu\text{s}$)

II. 4. 2 a) Pour l'air enfermée: $nRT = P_0 w h L = P_{\text{air}} w h (L-x)$ donc $L-x = \frac{P_0}{P_{\text{air}}} L$ 6/7

et $Q = - \frac{d}{dt} (w h (L-x)) = + w h \frac{dx}{dt} = w h \frac{d}{dt} \left(\frac{P_0 L}{P_{\text{air}}} \right) = + \frac{w h P_0 L}{P_{\text{air}}^2} \frac{dP_{\text{air}}}{dt}$

↑ le débit du liquide diminue le volume d'air.

$$C(P_{\text{air}}) = \frac{w h P_0 L}{P_{\text{air}}^2}$$

b) A l'équilibre $P_{\text{air}} = P_{\text{eau}} + \frac{2\gamma}{R}$ et $P_{\text{eau}} = P_0$ (car $Q=0$ donc $\Delta P=0$)

$$P_{\text{eq}} = P_0 + \frac{2\gamma}{R} = \frac{P_0 L}{L-x_{\text{eq}}} \quad \text{donc} \quad 1 - \frac{x_{\text{eq}}}{L} = \frac{P_0}{P_0 + \frac{2\gamma}{R}} \quad \text{et} \quad \frac{x_{\text{eq}}}{L} = 1 - \frac{P_0}{P_0 + \frac{2\gamma}{R}} = \frac{\frac{2\gamma}{R}}{P_0 + \frac{2\gamma}{R}} = \frac{x_{\text{eq}}}{L}$$

$$\frac{x_{\text{eq}}}{L} = \frac{2 \times 7 \cdot 10^{-2}}{10^5 + \frac{2 \times 7 \cdot 10^{-2}}{10^{-5}}} = \frac{0,14}{1,14} = 0,123$$

c) L'analogie de $Q = C \frac{d(P_{\text{air}} - P_0)}{dt}$ est $i = C \frac{du}{dt}$ et l'équivalent est un condensateur

II 5. 1. On se trouve en présence de deux condensateurs plans, d'épaisseur h , de surfaces $w \times (x_{\text{eq}} + \xi)$ et $w \times (L - x_{\text{eq}} - \xi)$ remplis, l'un d'eau, l'autre d'air. Les deux condensateurs sont montés en parallèle (soumis à la même ddp U); leurs capacités s'ajoutent: $C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_e w (x_{\text{eq}} + \xi)}{h} + \frac{\epsilon_0 \epsilon_a w (L - x_{\text{eq}} - \xi)}{h}$

$$C = \frac{\epsilon_0 w}{h} [\epsilon_e (x_{\text{eq}} + \xi) + \epsilon_a (L - x_{\text{eq}} - \xi)]$$

II 5. 2. L'énergie emmagasinée par le condensateur est $W = \frac{1}{2} C U^2 = \dots$

II 5. 3. $\vec{F}_{\text{el}} = \text{grad } W(\xi) = \frac{1}{2} U^2 \frac{\partial C}{\partial \xi} \vec{e}_x = \frac{1}{2} U^2 \frac{\epsilon_0 w}{h} (\epsilon_e - \epsilon_a) \vec{e}_x$; d'où $P_{\text{el}} = \frac{F_{\text{el}}}{w h}$

$\vec{F}_{\text{el}}$ "pousse" le liquide contre le gaz: pour l'air la pression augmentée de $+\frac{F_{\text{el}}}{w h}$

II. 5. 4. A l'équilibre:

$$P_{\text{air}} = \frac{P_0 L}{L - (x_{\text{eq}} + \xi_{\text{eq}})} = \frac{P_0 L}{L - x_{\text{eq}}} + P_{\text{el}} = P_0 + \frac{2\gamma}{R} = P_0 + \Delta P_{\text{cap}} + P_{\text{el}}$$

$$1 - \frac{x_{\text{eq}} + \xi_{\text{eq}}}{L} = \frac{P_0}{P_0 + \Delta P_{\text{cap}} + P_{\text{el}}}; \quad \frac{x_{\text{eq}} + \xi_{\text{eq}}}{L} = \frac{\Delta P_{\text{cap}} + P_{\text{el}}}{P_0 + \Delta P_{\text{cap}} + P_{\text{el}}}$$

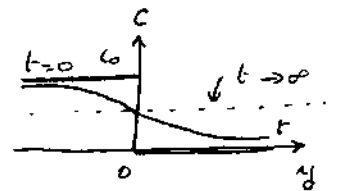
Si $\frac{x_{\text{eq}}}{L} \ll 1$ cela signifie que $\Delta P_{\text{cap}} = \frac{2\gamma}{R} \ll P_0$; si $\frac{\xi_{\text{el}}}{L} \ll 1$, on a aussi: $P_{\text{el}} \ll P_0$

On garde les valeurs approchées $\frac{x_{\text{eq}}}{L} = \frac{\Delta P_{\text{cap}}}{P_0} = \frac{2\gamma}{R P_0}$ et $\frac{\xi_{\text{eq}}}{L} = \frac{P_{\text{el}}}{P_0}$

II 5. 5 $\xi_{\text{eq}} = \frac{L}{P_0} \times \frac{1}{2} \frac{U^2 \epsilon_0}{h^2} (\epsilon_e - \epsilon_a) = \frac{10^{-3}}{10^5} \times \frac{100 \times 8,85 \cdot 10^{-12} \times 79}{2 \times 10^{-10}} = 3,50 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 3,50 \mu\text{m}$

ξ_{eq} tout à fait mesurable (à l'échelle du canal); c'est donc une méthode efficace(?). On applique $U = 10 \text{ V}$ entre deux plaques distantes de $h = 10 \mu\text{m}$, donc on crée un champ $E = \frac{U}{h} = 10^6 \text{ V m}^{-1}$. En augmentant U , on risque un "claquage", une étincelle de décharge entre les plaques ($E_{\text{max}} = 3 \cdot 10^6 \text{ V m}^{-1}$ dans l'air sec! donc $U_{\text{max}} = 30 \text{ V}$ ou soit être 10V avec de l'air humide!)

$$\text{III 1.1 } \left. \begin{aligned} \text{div } \vec{f}_d + \frac{\partial c}{\partial t} &= 0 \\ \vec{f}_d &= -D \text{grad} c \end{aligned} \right\} \quad \frac{\partial c}{\partial t} = D \Delta c = \boxed{D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} = \frac{\partial c}{\partial t}}$$



La concentration évolue vers une valeur uniforme $\frac{c_0}{2}$

$$\text{III 1.2 } [D] \times \frac{[c]}{L^2} = \frac{[c]}{T} \quad \text{donc } T_w = \frac{\delta_y^2}{D} = \frac{(50)^2 \times 10^{-12}}{10^{-11}} = 250 \text{ s } (= 4 \text{ min } 10 \text{ s})$$

$$\text{III 2.1. } \vec{f}_c = c \cdot v_0 \cdot \vec{e}_x$$

III 2.2. $\vec{f}_d = -D \text{grad} c$; la conservation s'écrit $\text{div}(\vec{f}_c + \vec{f}_d) + \frac{\partial c}{\partial t} = 0$
et, en régime permanent, $\frac{\partial c}{\partial t} = 0$ donc $\text{div}(\vec{f}_c + \vec{f}_d) = 0$

$$\text{div}(c(x, y) v_0 \vec{e}_x) + \text{div}(-D \text{grad} c) = 0$$

$$v_0 \frac{\partial c}{\partial x} - D \Delta c = 0 \quad \text{donc } v_0 \frac{\partial c}{\partial x} = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right)$$

III 2.3 Le temps caractéristique diffusif est T_w (de III.1.2) ; le temps caractéristique convectif est $\frac{R}{v_0}$

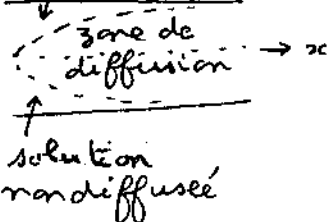
$$Pe = \frac{R^2}{D} \times \frac{v_0}{R} = \frac{R v_0}{D} = \frac{10^{-5} \cdot 10^{-4}}{10^{-11}} = 100 \gg 1 \quad \frac{T_{\text{diff}}}{T_{\text{conv}}} \gg 1$$

Dans le sens de la convection (donc selon Ox), la diffusion est très lente et peut être négligée : on néglige $D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$.

$$\text{III 2.4. On obtient donc l'équation } D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} = v_0 \frac{\partial c}{\partial x} \quad \text{donc } \frac{D}{\delta_y^2} = \frac{v_0}{x}$$

$$\delta_y = \sqrt{\frac{Dx}{v_0}}$$

III 2.5. miclorac (eau)



On regarde... et on observe trois régions :
deux régions extrêmes où la diffusion n'a pas eu "la distance" de se faire,
et la région de diffusion, la ligne de

séparation étant d'équation approchée $y = \sqrt{\frac{Dx}{v_0}}$.

Cette méthode a l'avantage d'un régime permanent (on peut prendre son temps...), et d'une adaptation facile de δ_y à la mesure en jouant sur v_0 .