Centrale–Supélec, MP, 2009 (Physique)

*Proposition de solution*

# I. Déviation de la lumière par les étoiles

## I–A. Étude du système Σ formé de $A$ et de $E$

**I–A.1)** Le référentiel $(K^*)$ est le référentiel en translation relativement à $(K)$ à la vitesse $\vec{v}_{G/K}$, où $G$ est le barycentre de Σ. Le système Σ étant isolé, l'accélération de $G$ est nulle dans le référentiel galiléen $(K)$ donc le référentiel $(K^*)$ est galiléen.

**I–A.2)** $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA}$ soit aussi $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OG} + \frac{M}{M+m}\overrightarrow{EA}$ donc par deux dérivations successives, $\boxed{\vec{v}_A = \vec{v}_G + \frac{M}{M+m}\vec{v}}$ et $\boxed{\vec{\gamma}_A = \vec{\gamma}_G + \frac{M}{M+m}\vec{\gamma}}$.

**I–A.3)** Le théorème de König affirme que $\vec{\sigma}_O = m_T \vec{r}_G \wedge \vec{v}_G + \vec{\sigma}^*$ où le moment cinétique barycentrique est indépendant du point de calcul ; on peut donc le calculer en $E$ sous la forme $\vec{\sigma}^* = m\vec{r} \wedge \vec{v}_A^*$ avec $\vec{v}_A^* = \vec{v}_A - \vec{v}_G$ donc $\vec{v}_A^* = \frac{M}{M+m}\vec{v}$ d'après la question précédente ; il vient $\vec{\sigma}^* = \frac{Mm}{M+m}\vec{r} \wedge \vec{v}$ donc enfin $\boxed{\vec{\sigma}_O = m_T \vec{r}_G \wedge \vec{v}_G + \mu \vec{r} \wedge \vec{v}}$.

De la même façon, $E_c = \frac{1}{2} m_T \vec{v}_G^2 + E_c^*$ où $E_c^* = \frac{1}{2}(m\vec{v}_A^{*2} + M\vec{v}_E^{*2})$ donc en utilisant les mêmes expressions que ci-dessus, $\vec{v}_A^* = \frac{M}{M+m}\vec{v}$ et $\vec{v}_E^* = \frac{m}{M+m}\vec{v}$ et après simplification, $\boxed{E_c = \frac{1}{2} m_T \vec{v}_G^2 + \frac{1}{2}\mu \vec{v}^2}$.

**I–A.4)** Dans $(K^*)$, l'équation du mouvement de $A$ s'écrit $m\frac{\mathrm{d}\vec{v}_A^*}{\mathrm{d}t} = -\mathscr{G}\frac{mM}{r^3}\vec{r}$ puisque, pour $r > R$, le champ de gravitation de l'étoile est le même que celui d'une masse ponctuelle $M$ en $E$ ; après développement, on peut écrire $\boxed{\mu \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t} = -\mathscr{G}\frac{mM}{r^3}\vec{r}}$ ou bien $\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t} = -\mathscr{G}\frac{m+M}{r^3}\vec{r}}$.

**I–A.5)** On peut écrire $\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}^*}{\mathrm{d}t} = \mu\vec{r} \wedge \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t}$ donc $\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}^*}{\mathrm{d}t} = \vec{0}}$ : le moment cinétique barycentrique de Σ se conserve (force centrale). Par contre, en présence d'une force conservative, seule l'énergie mécanique totale $E_c^* + E_p$ se conserve ; l'énergie cinétique $\boxed{E_c^* \text{ ne se conserve pas}}$.

## I–B. Trajectoires hyperboliques de la particule $A$

**I–B.1)** $\overrightarrow{GA} = \frac{M}{M+m}\overrightarrow{EA} \simeq \overrightarrow{EA}$ si $M \gg m$ donc $\boxed{\overrightarrow{GA} \simeq \vec{r}}$ ; par dérivation, on a au même ordre d'approximation $\boxed{\vec{v}_A^* \simeq \vec{v}}$. On a aussi $\mu \simeq m$ donc $\boxed{\vec{\sigma}^* \simeq \vec{\sigma}_A^*}$ et $\boxed{E_c^* \simeq \frac{1}{2} m \vec{v}_A^{*2}}$.

**I–B.2)** L'équation du mouvement de $A$ est aussi celle de la particule fictive de position $\vec{r}$ ; avec $M \gg m$ on a donc $\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{v}_A^*}{\mathrm{d}t} = -\mathscr{G}\frac{M}{r_A^3}\vec{r}_A}$ comme si $A$ était soumis à la force de gravitation exercée par l'étoile $E$, fixe. Cette force est centrale, $\vec{\sigma}_A^*$ est une constante donc $\vec{r}_A$ reste constamment perpendiculaire à la direction fixe de $\vec{\sigma}_A^*$ et le mouvement est $\boxed{\text{plan}}$.

**I–B.3)** En coordonnées polaires, $\vec{r}_A = r\vec{e}_r$ et $\vec{v}_A^* = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ donc $\boxed{C = r^2\dot{\theta}}$. On peut alors écrire $\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -\mathscr{G}\frac{M}{r^2}\vec{e}_r$ donc $\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}\theta} = -\mathscr{G}\frac{M}{r^2\dot{\theta}}\vec{e}_r$ qu'on écrit $\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathscr{G}M}{C}\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}\theta}}$. On en déduit que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{C}{\mathscr{G}M}\vec{v} - \vec{e}_\theta\right) = \vec{0}$ donc $\boxed{\alpha = \frac{C}{\mathscr{G}M}}$. Le vecteur $\vec{e}$ est un vecteur du plan défini par $\vec{v}$ et $\vec{e}_\theta$, donc du plan du mouvement. Dans ce plan, le choix des axes $(Ox)$ et $(Oy)$ étant arbitraire, on peut imposer $\vec{e} = e\vec{e}_y$ sans perte de généralité.

**I–B.4)** On en déduit $\vec{v} \cdot \vec{e}_\theta = r\dot{\theta} = \frac{1}{\alpha}(e\cos\theta + 1)$ qui prend la forme demandée si on remarque que $r\dot{\theta} = \frac{C}{r}$ ; il vient donc $\boxed{p = C\alpha}$ donc $\boxed{p = \frac{C^2}{\mathscr{G}M}}$. On reconnaît l'équation d'une conique, qui est une hyperbole si $\boxed{e > 1}$.

## I–C. Étude de la trajectoire

**I–C.1)** $\vec{\sigma}_A = m(b\vec{e}_y - \ell\vec{e}_x) \wedge v_0\vec{e}_x = mC\vec{e}_z$ donc $\boxed{C = -bv_0 < 0}$ ; le signe de $C$ est aussi celui de $\dot{\theta}$, cf. figure de l'énoncé.

**I–C.2)** La conservation de l'énergie mécanique $E_m = E_c - \frac{\mathscr{G}Mm}{r}$ impose $E_{c0} = E_{c1}$ puisque $r_0 \to \infty$ et $e_1 \to \infty$ ; on a donc $\boxed{v_1 = v_0}$.

**I–C.3)** $\vec{e}(t \to -\infty) = \alpha\vec{v}_0 - (-\vec{e}_y)$ donc $\boxed{\vec{e}(t \to -\infty) = \alpha v_0\vec{e}_x + \vec{e}_y}$. De même pour $t \to +\infty$, $\vec{v} \to v_0(\cos\Phi\vec{e}_x - \sin\Phi\vec{e}_y)$ et $\vec{e}_\theta \to \cos\Phi\vec{e}_y + \sin\Phi\vec{e}_x$ donc $\boxed{\vec{e}(t \to +\infty) = \vec{e}_x[\alpha v_0\cos\Phi - \sin\Phi] - \vec{e}_y[\cos\Phi + \alpha v_0\sin\Phi]}$. On déduit de la conservation de $\vec{e}$ les deux relations $\alpha v_0(1-\cos\Phi) = -\sin\Phi$ et $1+\cos\Phi = -\alpha v_0\sin\Phi$ qui sont équivalentes à $\tan\frac{\Phi}{2} = -\frac{1}{\alpha v_0}$ donc $\boxed{\tan\dfrac{\Phi}{2} = -\dfrac{\mathscr{G}M}{Cv_0}}$.

**I–C.4)** La conservation de l'énergie impose $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mathscr{G}Mm}{d}$ où $v$ est la vitesse à l'instant du passage à la distance minimale $d$. Comme $r = r_{\min}$, $\dot{r} = 0$ et la vitesse est alors orthoradiale donc la conservation du moment cinétique impose aussi $C = -bv_0 = -dv$. On élimine $v$ pour écrire $\boxed{\dfrac{1}{d^2} - 2\dfrac{\mathscr{G}M}{v_0^2b^2}\dfrac{1}{d} - \dfrac{1}{b^2} = 0}$ ; le discriminant réduit de cette équation est $\Delta' = \frac{\mathscr{G}^2M^2}{v_0^4b^4} + \frac{1}{b^2} > 0$ mais le produit des racines étant $-\frac{1}{b^2}$, elles sont de signe contraire et on retient la seule racine positive $\frac{1}{d} = \frac{\mathscr{G}M}{v_0^2b^2} + \sqrt{\frac{\mathscr{G}^2M^2}{v_0^4b^4} + \frac{1}{b^2}}$ ou, avec $C^2 = b^2v_0^2$, $\boxed{d = \dfrac{C^2}{\mathscr{G}M + \sqrt{\mathscr{G}^2M^2 + C^2v_0^2}}}$.

**I–C.5)** La relation ci-dessus s'écrit aussi $\frac{1}{d} = \frac{\mathscr{G}M}{b^2v_0^2} + \sqrt{\frac{\mathscr{G}^2M^2}{b^4v_0^4} + \frac{1}{b^2}}$ ; $\frac{1}{d}$ est une fonction croissante de $\frac{1}{b}$, donc $d$ une fonction croissante de $b$. On peut recopier l'expression de la question précédente sous la forme $\tan\frac{\Phi}{2} = \frac{\mathscr{G}M}{bv_0^2}$ ; $\Phi$ est donc une fonction décroissante de $b$. On relie ces deux affirmations pour conclure $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}d} < 0}$. Si la particule $A$ s'approche très près de $E$, $d$ diminue donc $\Phi$ augmente : la déviation est aussi plus importante.

**I–C.6)** Si $d = R$, on en déduit $R = \frac{C^2}{\mathscr{G}M + \sqrt{\mathscr{G}^2M^2 + C^2v_0^2}} = \frac{\sqrt{\mathscr{G}^2M^2 + C^2v_0^2} - \mathscr{G}M}{v_0^2}$ donc $(Rv_0^2 + \mathscr{G}M)^2 = \mathscr{G}^2M^2 + C^2v_0^2$ ; comme $\tan\frac{\Phi}{2} = -\frac{\mathscr{G}M}{Cv_0}$, on exprime alors $Cv_0 = -\sqrt{C^2v_0^2}$ sous la forme $Cv_0 = -\sqrt{(Rv_0^2 + \mathscr{G}M)^2 - \mathscr{G}^2M^2}$ qu'on écrit encore $Cv_0 = -\sqrt{R^2v_0^4 + 2\mathscr{G}MRv_0^2}$ soit $-Cv_0 = v_0^2\sqrt{R(R+\rho)}$ en posant $\boxed{\rho = 2\dfrac{\mathscr{G}M}{v_0^2}}$.

**I–C.7)** $\boxed{\rho = 2\dfrac{\mathscr{G}M}{c^2} = 2{,}95\,\mathrm{km}}$.

## I–D. Déviation de la lumière par le Soleil

**I–D.1)** Puisque $R \gg \rho$, $\tan\frac{\Phi_0}{2} = \frac{\mathscr{G}M}{v_0^2R}$ donc $\boxed{\Phi_0 = 0{,}44''}$.

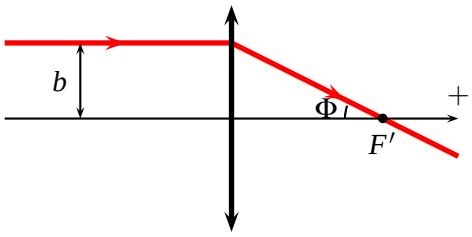
**I–D.2)** L'éclipse de Soleil permet de distinguer la lumière beaucoup plus faible provenant de l'étoile $E$ au moment où la déviation a lieu, donc au moment où l'étoile est au bord du disque solaire. La valeur de $\Phi_e \neq \Phi_0$ résulte de $\boxed{\text{phénomènes relativistes}}$ ; la mesure de 1919 constitua la première confirmation expérimentale de la relativité générale.

## I–E. Effets de lentille gravitationnelle

**I–E.1)** On peut écrire $\Phi = \kappa\frac{\mathscr{G}Mm}{b}\frac{1}{mc^2}$, la grandeur $mc^2$ ayant la dimension d'une énergie (cinétique), et $\frac{\mathscr{G}Mm}{b}$ celle d'une énergie (potentielle) ; $\kappa$ est donc (comme $\Phi$) $\boxed{\text{sans dimension}}$.

**I–E.2)** Dans une lentille ordinaire, la dérivation $\Phi$ d'un faisceau parallèle vérifie (cf. schéma page suivante) $\Phi = \frac{b}{f'}$, où $f'$ est la distance focale de la lentille ; la déviation gravitationnelle de la lumière se comporte donc comme une lentille convergente de focale $\boxed{f' = \dfrac{c^2b^2}{\kappa\mathscr{G}M}}$.

**I–E.3)** $\boxed{f' = \dfrac{c^2R^2}{2\mathscr{G}M} = 0{,}017\,\mathrm{AL}}$




**I–E.4)** Il y a focalisation du faisceau de lumière émis par l'étoile lointaine ; si le faisceau converge en direction de l'observateur, l'étoile observée semblera plus lumineuse qu'elle n'est en réalité.

# II. Thermodynamique des étoiles et galaxies

## II–A. Stabilité des systèmes simples

**II–A.1)** La relation $\frac{1}{2}\mathscr{J}\dot{q}^2 + E_p(q) = E$ amène, par dérivation, à l'équation dynamique $\mathscr{J}\ddot{q} = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}q}$. Une position d'équilibre doit vérifier $\ddot{q} = 0$ en permanence d'où la première condition $\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}q}\right|_{q=q_0} = 0}$. La stabilité de cet équilibre est assurée si un faible écart à l'équilibre se traduit par un effet de rappel vers l'équilibre ; il faut que $-\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}q} > 0$ pour $q > q_0$ et $-\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}q} < 0$ pour $q < q_0$, donc la position $q = q_0$ doit être un minimum de l'énergie potentielle. Si la dérivée seconde est non nulle, elle doit vérifier $\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}q^2}\right|_{q=q_0} > 0}$ ; si elle est nulle, toutes les dérivées impaires doivent être nulles jusqu'à la première dérivée paire non nulle, strictement positive.

**II–A.2)** L'équation dynamique s'écrit dans ce cas $\mathscr{J}\ddot{q} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\mathscr{J}}{\mathrm{d}q}\dot{q}^2 = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}q}$ ; la condition d'équilibre ($\dot{q} = 0$ et $\ddot{q} = 0$) impose toujours la même condition $\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}q}\right|_{q=q_0} = 0}$. L'étude des petits écarts à l'équilibre n'est pas modifiée si on peut se contenter d'un développement au premier ordre de l'équation dynamique : $\mathscr{J}\ddot{q} = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\mathscr{J}}{\mathrm{d}q}\dot{q}^2 - \left.\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}q}\right| q_0(q-q_0)$ reste, au premier ordre en $q-q_0$ et $\dot{q}$, donnée par $\mathscr{J}\ddot{q} \simeq -\left.\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}q}\right| q_0(q-q_0)$ et la seconde condition $\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}q^2}\right|_{q=q_0} > 0}$ est alors inchangée.

## II–B. Instabilité des systèmes autogravitants

**II–B.1)** On ne doit pas compter deux fois l'interaction entre deux particules, donc c'est la première expression qui s'applique, sous une des deux formes équivalentes $\boxed{E_p = -\mathscr{G}\sum_{j>i}\frac{m_i m_j}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|}}$ ou $\boxed{E_p = -\frac{1}{2}\mathscr{G}\sum_{i\neq j}\frac{m_i m_j}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|}}$. La seconde expression proposée n'a de toutes façons pas de sens car les termes $i = j$ de la somme sont infinis.

**II–B.2)** On peut écrire $\mathscr{V} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}\vec{F}_{j\to i}\cdot\vec{r}_i$ sous la forme $\mathscr{V} = \sum_{i\neq j}\vec{F}_{j\to i}\cdot\vec{r}_i$ ; compte tenu du principe des actions réciproques, $\vec{F}_{j\to i} = -\vec{F}_{i\to j}$ donc $\mathscr{V} = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\vec{F}_{j\to i}\cdot(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ ; l'expression de la force permet alors d'écrire $\mathscr{V} = -\frac{1}{2}\mathscr{G}\sum_{i\neq j}\frac{m_i m_j}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|}$ donc $\boxed{\mathscr{V} = E_p}$.

**II–B.3)** On en déduit que $U = E_c + E_p$ a pour moyenne $\langle U\rangle = \langle E_c\rangle + \langle\mathscr{V}\rangle$ soit aussi, $U$ étant constante pour un système isolé, $\boxed{U = -\langle E_c\rangle}$.

**II–B.4)** On peut écrire $\langle E_c\rangle = N\langle e_c\rangle$ en sommant les énergies cinétiques des $N$ particules du système, avec $\langle e_c\rangle = \frac{3}{2}k_BT$ donc $\boxed{\langle E_c\rangle = \frac{3}{2}Nk_BT}$. On a donc $\boxed{C_v = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T} = -\frac{3k_BN}{2} < 0}$ d'où l'instabilité thermodynamique. L'instabilité est due à la possibilité pour le système de s'effondrer, sous l'action de la gravitation, sur son centre de masse.

**II–B.5)** Il faut tenir compte d'autres forces, en particulier des interactions entre particules (forces de pression) et avec le rayonnement (forces de pression de radiation) qui empêchent l'effondrement gravitationnel.

# III. Effet Doppler et loi de Hubble

## III–A. Effet Doppler

**III–A.1)** $\boxed{t' = t}$ et $\boxed{\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t}$.

**III–A.2)** $\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} = \omega' t' - \vec{k}'\cdot\vec{r}'$ s'écrit aussi $\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} = \left(\omega' + \vec{V}\cdot\vec{k}'\right)t - \vec{k}'\cdot\vec{r}$, qui doit être vrai pour tous $t$ et $\vec{r}$, donc $\boxed{\vec{k}' = \vec{k}}$ et $\boxed{\omega = \omega' + \vec{k}\cdot\vec{V}}$.

**III–A.3)** On peut aussi écrire $k' = k$ et $\omega = \omega' + kV\cos\theta$ où $\theta$ est l'angle $(\vec{e}_x, \vec{V})$. On en déduit que les deux vitesses de phase ont même direction $\vec{u}$ (la direction commune de $\vec{k}'$ et $\vec{k}$) avec de plus $v_\phi = \frac{\omega}{k}$ et $v'_\phi = \frac{\omega'}{k'}$ donc $\boxed{v_\phi = v'_\phi + V\cos\theta}$. De même, $v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$ s'écrit $\boxed{v_g = v'_g + V\cos\theta}$. Il s'agit d'une $\boxed{\text{loi d'addition}}$ classique avec la composante $\boxed{\text{longitudinale}}$ (parallèle à $\vec{u}$) de la vitesse d'entraînement.

**III–A.4)** Dans le cas d'une onde électromagnétique, solution des équations de Maxwell, on devrait avoir dans le vide $\boxed{v_\phi = v'_\phi = c \text{ et } v_g = v'_g = c}$, indépendamment de $V$. Les lois classiques de l'effet Doppler, déduites de la mécanique classique, ne sont pas compatibles avec les équations de Maxwell, qui sont de nature relativiste.

**III–A.5)** La relation $\omega = ck = \frac{2\pi c}{\lambda}$ doit être vérifiée quel que soit le référentiel et avec la même valeur de $c$ donc $\boxed{\lambda' = \frac{\lambda}{\gamma(1-\beta\vec{e}_x\vec{u})}}$. Si $V \ll c$, $\beta \ll 1$ donc $\gamma \simeq 1$ (à l'ordre 2 près) et on obtient $\boxed{\lambda' \simeq \frac{\lambda}{1-\frac{V}{c}\vec{e}_x\vec{u}}}$ qu'on peut d'ailleurs écrire, au même ordre d'approximation, $\boxed{\lambda' \simeq \lambda\left(1+\frac{V}{c}\vec{e}_x\vec{u}\right)}$. La loi de l'effet Doppler classique indiquait un changement de pulsation mais pas de changement de longueur d'onde ; elle n'est pas compatible avec l'expression classique et sera abandonnée dans ce qui suit.

## III–B. Loi de Hubble

**III–B.1)** On cherche un maximum de la fonction $f(\lambda) = \frac{1}{\lambda^5}\frac{1}{\exp\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)-1}$, où $\lambda_0 = \frac{hc}{k_B T}$. On peut aussi chercher un minimum de $g(\lambda) = \frac{1}{f(\lambda)} = \lambda^5\left[\exp\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)-1\right]$, ce qui revient à écrire $0 = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\lambda} = 5\lambda^4\left[\exp\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)-1\right] - \lambda_0\lambda^3\exp\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)$. En dehors du cas trivial $\lambda = 0$, on doit donc résoudre l'équation $(5\lambda - \lambda_0)\exp\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right) = \lambda$, dont une solution approchée est donnée par $\lambda_m \simeq \frac{\lambda_0}{5}$ ou $\boxed{\lambda_m = \frac{hc}{5k_B T}}$ ; c'est la loi de Wien $\lambda_m T = K_W$ avec $K_W \simeq \frac{hc}{5k_B} = 2{,}9\cdot10^{-3}\,\mathrm{K\cdot m}$. On vérifie bien que $\exp\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_m}\right) = \exp(5) \simeq 150 \gg 1$.

**III–B.2)** On trouve $\boxed{\lambda_m = 480\,\mathrm{nm}}$ ; il s'agit de lumière visible, dans le domaine $\boxed{\text{bleu-vert}}$.

**III–B.3)** La mesure de la valeur au maximum est peu précise, justement parce qu'il s'agit d'un maximum : une légère erreur sur la valeur de $\lambda_m$ aura peu d'influence sur la valeur de $\frac{\mathrm{d}P_u}{\mathrm{d}\lambda}$ et sera donc difficile à mettre en évidence. Si la vitesse de l'étoile est faible, l'écart de longueur d'onde $\lambda'_m - \lambda_m$ sera faible et ne sera pas facilement mis en évidence par cette méthode.

**III–B.4)** L'absorption de lumière par les atomes d'une couche froide entourant une étoile se traduit par un pic d'absorption pour une longueur d'onde précise (minimum étroit de puissance émise) à une valeur constante et connue par des mesures en laboratoire. Un décalage, même faible, de la longueur d'onde de cette raie d'absorption sera donc facile à mettre en évidence.

**III–B.5)** $\vec{V}_{O'}(A) = \vec{V}_O(A) - \vec{V}_O(O') = H(t)\left[\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OO'}\right]$ donc $\vec{V}_{O'}(A) = H(t)\overrightarrow{O'A}$ : la loi de Hubble ne dépend pas du choix de l'origine ; c'est une propriété de l'Univers entier, sans qu'il soit possible de trouver un « centre » à partir duquel se ferait l'expansion.

**III–B.6)** $\frac{\lambda'-\lambda}{\lambda} = \frac{V}{c}$ (d'après les lois de l'Effet Doppler) donc $\boxed{\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{H(t)R(t)}{c}}$.

# IV. Échelle de temps de l'Univers

## IV–A. Refroidissement de l'Univers

**IV–A.1)** $\lambda$ augmente et le produit $\lambda T$ reste constant (c'est la loi de Wien), cette constante ne dépendant que de constantes Universelles. On en déduit que $\boxed{T \text{ diminue}}$ au cours de l'expansion de l'Univers.

**IV–A.2)** D'après la loi de Wien, $\lambda = 1,1\,\text{mm}$ fournit $\boxed{T = 2,7\,\text{K}}$. Un rayonnement de longueur d'onde $\lambda = 1,1\,\text{mm}$, donc de fréquence $f = c/\lambda = 273\,\text{GHz}$, est un rayonnement radio hyperfréquences (ou rayonnement millimétrique).

## IV–B. Ère à dominante matérielle

**IV–B.1)** Toutes les étoiles et galaxies s'éloignant radialement du centre $O$ de la sphère à une vitesse $H(r)r$ inférieure à la vitesse $H(t)R(t)$ du bord de la sphère, le nombre d'étoiles contenues dans la sphère de rayon $R(t)$ reste constant ; la masse $M_R$ de ces étoiles $\boxed{\text{reste constante}}$.

La répartition de masse ayant la symétrie sphérique, elle crée le champ de gravitation $\vec{G} = G\vec{e}_R$ (en coordonnées sphériques) avec (d'après le théorème de Gauss) $4\pi R^2(t)G = -4\pi\mathscr{G}M_R$ donc $\boxed{\vec{G} = -\dfrac{\mathscr{G}M_R}{R^2(t)}\vec{e}_R}$ ; l'énergie potentielle associée est $\boxed{E_p = -\dfrac{\mathscr{G}M_R m}{R(t)}}$. Comme $M_R = \frac{4\pi R^3(t)}{3}\rho(t)$, on peut aussi écrire $\boxed{E_p = -\dfrac{\triangle\pi G m\rho(t)R^2(t)}{3}}$.

**IV–B.2)** $E = E_p + E_c$ où $E_c = \frac{1}{2}mH^2(t)R^2(t)$ donc $\boxed{E = \dfrac{1}{2}mH^2(t)R^2(t) - \dfrac{\triangle\pi G m\rho(t)R^2(t)}{3}}$.

**IV–B.3)** L'Univers est ouvert si $E > 0$ donc si $\boxed{\rho(t) < \rho_c \text{ avec } \rho_c = \dfrac{3H^2(t)}{8\pi\mathscr{G}}}$.

**IV–B.4)** Dans le système international, $H(t) = 1,6\cdot10^{-18}\,\text{s}^{-1}$ donc $\boxed{\rho_c = 4,5\cdot10^{-27}\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}}$.

**IV–B.5)** $M_R = \frac{4}{3}\pi R^3(t)\rho(t)$ restant constant, $\rho(t)$ varie comme $R^{-3}(t)$ soit $\boxed{n = -3}$.

## IV–C. Ère à dominante radiative

**IV–C.1)** La loi de Planck peut être recopiée, compte tenu de $\lambda = \frac{c}{\nu}$, sous la forme $\text{d}P_u = \frac{2\pi h\nu^5}{c^3}\frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_BT}\right)-1}\text{d}\lambda$ avec la relation entre intervalles (positifs) $\text{d}\lambda = \frac{c}{\nu^2}\text{d}\nu$ donc $\text{d}P_u = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2}\frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_BT}\right)-1}\text{d}\nu$ qu'on écrira $\boxed{\text{d}P_u = \dfrac{2\pi k_B^3T^3}{h^2c^2}f(x)\text{d}\nu}$.

**IV–C.2)** On peut encore écrire $\text{d}P_u = \frac{2\pi k_B^4T^4}{h^3c^2}f(x)\text{d}x$ donc $P_u = \int_{x=0}^{\infty}\text{d}P_u$ vaut $\boxed{P_u = \dfrac{2\pi^5k_B^4T^4}{15h^3c^2}}$.

**IV–C.3)** On en déduit encore que $u = \frac{8\pi^5k_B^4T^4}{15h^3c^3}$ varie $\boxed{\text{proportionnellement à } T^4}$, donc à $1/R^4$ puisque $\lambda$ varie proportionnellement à $1/T$.

## IV–D. L'âge de l'Univers

**IV–D.1)** La vitesse de la sphère de rayon $R(t)$ est $\dot{R} = H(t)R(t)$ soit, compte tenu de $H(t) = \sqrt{\frac{8\pi\mathscr{G}}{3}\rho(t)}$ et de $\rho(t) = K_pR^p(t)$, on obtient l'équation différentielle $\boxed{\dfrac{\text{d}R}{\text{d}t} = \sqrt{\dfrac{8\pi\mathscr{G}K_p}{3}}R^{1+p/2}}$.

**IV–D.2)** L'intégration de cette équation, écrite $\text{d}t = \sqrt{\frac{3}{8\pi\mathscr{G}K_p}}R^{-1-p/2}$, fournit $t_2 - t_1 = -\frac{2}{p}\sqrt{\frac{3}{8\pi\mathscr{G}}}\left(\frac{1}{\sqrt{K_pR_2^p}} - \frac{1}{\sqrt{K_pR_1^p}}\right)$, qu'on peut recopier, puisque $p < 0$, sous la forme de l'énoncé, $\boxed{t_2 - t_1 = \dfrac{2}{|p|}\sqrt{\dfrac{3}{8\pi\mathscr{G}}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{\rho(t_2)}} - \dfrac{1}{\sqrt{\rho(t_1)}}\right)}$.

**IV–D.3)** On peut écrire dans ce cas $\boxed{\Delta t = \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{3}{2\pi\alpha\mathscr{G}}}\left(\dfrac{1}{T_f^2} - \dfrac{1}{T_i^2}\right)}$ donc numériquement on peut négliger le terme

en $T_i$ et il vient $\boxed{\Delta t = 1,9 \cdot 10^6\,\text{s}}$ (soit 22 jours) pour atteindre $10^7\,\text{K}$, puis $\boxed{\Delta t = 2,1 \cdot 10^{13}\,\text{s}}$ (soit 600 000 ans) pour atteindre $3\,000\,\text{K}$.

**IV–D.4)** Toujours en négligeant la valeur initiale dans l'intégrale, on obtient $\boxed{\Delta t \simeq \frac{2}{3,5}\sqrt{\frac{3}{8\pi\mathscr{G}\rho_c}} = 3,6 \cdot 10^{17}\,\text{s}}$ soit 11,4 milliards d'années.

PR