

# Concours Centrale-Supelec 2009 option PC Physique 2

Francis BROUCHIER

26 mai 2009

Les figures de l'énoncé étant suffisamment claires ne seront pas reproduites dans le corrigé. Le lecteur est prié de garder l'énoncé sous les yeux. S'il croit déceler une erreur dans le corrigé il est prié de la signaler à l'auteur. (francis.bouchier@prepas.org)

## Partie I-Ruissellement d'eau sur une stalactite

### I.A- Étude d'un écoulement modèle

I.A.1) L'écoulement est stationnaire et incompressible : il ne dépend pas du temps et la masse volumique  $\mu$  du fluide est constante. L'équation de conservation de la masse permet d'écrire :  $\text{div}(\mu\vec{u}) + \partial\mu/\partial t = 0$ . Avec la remarque précédente il reste :  $\text{div}\vec{u} = 0$ . Si on complète le repère donné dans l'énoncé par un axe de vecteur unitaire  $\vec{e}_y$  la divergence s'écrit :

$$\text{div}\vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

Les composantes  $u_y$  et  $u_z$  sont nulles il reste donc  $\partial u_x/\partial x = 0$  d'où  $u_x$  indépendant de  $x$ .

Par définition :

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} \frac{u^2}{2} + \overrightarrow{\text{rot}}\vec{u} \wedge \vec{u}$$

On calcule aisément  $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{u} = \vec{e}_y \partial u/\partial z$  et  $\overrightarrow{\text{grad}}(u^2/2) = u \frac{\partial u}{\partial z} \vec{e}_z$ . Puis  $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{u} \wedge \vec{u} = -u \frac{\partial u}{\partial z} \vec{e}_z$ . Comme  $\vec{u}$  est indépendant du temps on obtient  $D\vec{u}/Dt = \vec{0}$

Pour la calcul du Laplacien vecteur on a :

$$\vec{\Delta}\vec{u} = \Delta u_x \cdot \vec{e}_x \quad \Delta u_x = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \boxed{\vec{\Delta}\vec{u} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \vec{e}_x}$$

I.A.2) En projection sur  $\vec{e}_z$  beaucoup de termes sont nuls, il vient :  $-\partial p/\partial z - \mu g \cos \theta = 0$ . En fait le problème ne dépend pas de  $x$  et la dérivée partielle est une simple dérivée, en intégrant on obtient  $p = -\mu g z \cos \theta + \text{Cste}$ . Pour  $z = h$   $p = p_0$  d'où :  $\boxed{p = p_0 + \mu g(h - z) \cos \theta}$ .

I.A.3) En projection sur  $\vec{e}_x$  l'équation de Navier-Stokes donne  $0 = \eta d^2 u/dz^2 + \mu g \sin \theta$  d'où on tire :

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = -\frac{\mu g \sin \theta}{\eta} = -\frac{g \sin \theta}{\nu} \quad \frac{du}{dz} = -g \frac{\sin \theta}{\nu} z + A \quad \boxed{u = -g \frac{\sin \theta}{\nu} \frac{z^2}{2} + Az + B}$$

I.A.4) En  $z = 0$  le plan est immobile. Du fait de la viscosité la vitesse du fluide est égale à celle du plan, donc  $u(0) = 0$  (analogie avec la couche limite). En négligeant la viscosité de l'air on peut admettre que l'air reste immobile et que  $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{u} = \vec{0}$ . Par continuité à la surface du liquide, cette expression reste vraie et, en projection sur  $\vec{e}_y$  il vient :

$$\boxed{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=h} = 0}$$

I.A.5) Des conditions aux limites précédentes  $z = 0$   $u = 0$  et  $z = h$   $du/dz = 0$   $A = g \sin \theta h/\nu$  il vient :

$$\boxed{u = -g \frac{\sin \theta}{\nu} \frac{z^2}{2} + g \frac{\sin \theta}{\nu} h z}$$

I.A.6) Lorsqu'on parle d'un liquide la "profondeur" se mesure à partir de la surface vers le fond du liquide. Ici ce terme est inadéquat il aurait fallu dire "largeur" et cela a pu troubler les candidats. Le débit volumique élémentaire pour une épaisseur  $dz$  et une largeur  $b$  est  $dq = ubdz$  soit :

$$q = b \int_0^h u dz = \frac{g \sin \theta}{\nu} \int_0^h \left[ -\frac{z^2}{2} dz + h z dz \right] = \frac{g \sin \theta}{\nu} \left[ -\frac{h^3}{6} + \frac{h^3}{2} \right] \quad \boxed{q = \frac{g \sin \theta h^3 b}{3\nu}}$$

## I.B- Application aux stalactites

I.B.1) Pour pouvoir remplacer  $b$  par  $2\pi R(Z)$  il faut que le rayon soit assez grand pour pouvoir assimiler la stalactite à son plan tangent en ce point. Cela n'est plus possible à la pointe où le rayon est nul. L'expression de  $q(Z)$  n'est plus valable au voisinage de la pointe de la stalactite.

I.B.2) En régime permanent l'eau qui coule du haut de la stalactite se retrouve intégralement à la pointe. Pour mesurer le débit il suffit de mettre un récipient sous la pointe et de mesurer la quantité d'eau qui s'écoule pendant un temps donné.

I.B.3) Comme  $q$  est constant  $q = q_0$  d'où :

$$q_0 = \frac{2\pi g h^3 R \sin \theta}{3\nu} \quad h^3 = \frac{3\nu q_0}{2\pi g R \sin \theta} \quad h = \left[ \frac{3\nu q_0}{2\pi g} \right]^{1/3} (R \sin \theta)^{-1/3} \quad \boxed{l_c = \left[ \frac{3\nu q_0}{2\pi g} \right]^{1/4}}$$

I.B.4) Application numérique. Il faut d'abord transformer les grandeurs données en unités légales :

$$q_0 = 50 \text{ mL.h}^{-1} = \frac{50 \cdot 10^{-6}}{3600} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} = 1,39 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \quad R_0 = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Avec les valeurs numériques de l'énoncé on obtient :

$$\boxed{l_c = 1,61 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,161 \text{ mm}} \quad \boxed{h_0 = 2,38 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 23,8 \text{ } \mu\text{m}} \quad \boxed{u_m = 1,86 \text{ mm.s}^{-1}}$$

I.B.5) Par définition le nombre de Reynolds vaut  $R = u \cdot h_0 / \nu$  où  $u$  est la vitesse,  $h_0$  une distance caractéristique et  $\nu$  la viscosité cinématique. En prenant comme vitesse la valeur de  $u_m$  et pour la distance caractéristique la valeur de  $h_0$  on trouve  $\boxed{R = 0,044}$ . Le nombre de Reynolds permet de caractériser le passage du régime laminaire au régime turbulent pour des valeurs comprises entre 2000 et 3000. Ici on est très nettement en dessous donc le régime est parfaitement laminaire.

I.B.6)

$$h/R < 10^{-1} \quad R > 10h \quad \text{avec} \quad h \sim h_0 \quad \boxed{R > 0,24 \text{ mm}}$$

On retrouve bien le fait que le modèle n'est pas valable à la pointe de la stalactite où le rayon est nul.

## Partie II-Formation d'une stalactite dans une grotte

### II.A- Diffusion de $CO_2$ dans le film liquide et précipitation de $CaCO_3$

II.A.1) On calcule l'ordre de grandeur du temps  $\tau_L$  le plus petit en prenant  $L_0 = 10 \text{ cm}$  et  $u_m = 10 \text{ mm/s}$ . On trouve  $\boxed{\tau_L = L_0/u_m = 10 \text{ s}}$

L'espèce chimique diffuse sur une épaisseur  $h_0$  avec un coefficient de diffusion  $D = 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$ . L'ordre de grandeur du temps de transit est :

$$\tau_d \sim \frac{h_0^2}{D} = \frac{(10^{-3} \text{ cm})^2}{10^{-5} \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}} \quad \boxed{\tau_d = 10^{-1} \text{ s}}$$

D'où  $\boxed{\tau_d \ll \tau_L}$ .

II.A.2) Le taux d'allongement est de  $1 \text{ cm}$  par siècle. Pour un allongement  $\Delta L = h_0$  le temps  $\tau_h$  est :

$$\tau_h = \frac{h_0 \text{ cm}}{1 \text{ siècle}} = 10^{-3} \cdot 36500 \cdot 86400 \quad \boxed{\tau_h = 3,15 \cdot 10^6 \text{ s}}$$

On constate que  $\tau_d$  est nettement plus faible que  $\tau_h$  et que l'hypothèse de la stationnarité est valable.

II.A.3) La masse d'un disque de  $CaCO_3$  de 10 cm de rayon et de 1 cm d'épaisseur vaut  $2,7 \cdot \pi \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-2}$  soit  $8,48 \cdot 10^{-4} \text{ kg}$ . En fait la valeur de  $\rho_{CaCO_3}$  est nettement sous évaluée dans l'énoncé : un mètre cube de calcaire ne peut avoir une masse de 2,7 kg, sans quoi les égyptiens n'auraient eu aucun mal à construire les pyramides. Il doit s'agir de  $2,7 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ . Nous continuerons le problème avec la valeur donnée.

Pour avoir la masse de calcium il suffit de faire une règle de trois  $\text{masse de } Ca = 3,4 \cdot 10^{-4} \text{ kg}$ .

Avec  $R_0 = 10 \text{ cm}$ ,  $u_m = 10 \text{ mm/s}$  et  $h_0 = 10 \text{ }\mu\text{m}$ , le débit de l'eau est de  $2\pi \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-2} = 6,28 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ . Comme un siècle vaut  $3,15 \cdot 10^9 \text{ s}$  la quantité d'eau qui a circulé est de l'ordre de  $198 \text{ m}^3$ . La concentration des ions calcium est de  $150 \text{ mg.L}^{-1} = 0,15 \text{ kg.m}^{-3}$ . La masse totale des ions calcium qui ont circulé en un siècle avec la solution est donc de  $0,15 \cdot 198 \sim 300 \text{ kg}$ . La masse de calcium déposée étant de  $3,4 \cdot 10^{-4} \text{ kg}$  avec les valeurs numériques de l'énoncé, la quasi totalité des ions calcium se retrouve dans l'eau qui s'égoutte. Les stalagmites ont donc une hauteur du même ordre de grandeur que les stalactites (un peu moins car la goutte qui arrive éclate en microgouttes et une faible partie s'écarte de la pointe).

**Remarque** Si on corrige la valeur de l'énoncé, on aurait comme masse des ions calcium 0,34 kg ce qui ne modifie pas le résultat précédent.

II.A.4) Si on désigne par  $c(z, t)$  la concentration de  $CO_2$  dans la tranche d'épaisseur  $dz$  et de surface  $dS$  (soit de volume  $dS \cdot dz$ ), l'équation de la diffusion s'écrit :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -D \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \quad \delta c = \frac{\delta^2 N_c}{dS \cdot dz} \quad \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{n_0 - n}{\tau_c} \quad \frac{n_0 - n}{\tau_c} = -D \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} \quad \delta^2 = \tau_c D$$

On retrouve bien l'équation demandée avec  $\delta \sim 0,32 \text{ cm}$ .

II.A.5) La solution générale de cette équation est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation avec second membre (on peut prendre  $n = \text{cte} = n_0$ ). L'équation sans second membre est classique et on obtient :

$$n = A \exp(z/\delta) + B \exp(-z/\delta) + n_0$$

II.A.6) En  $z = 0$  le volume est nul, il n'y a donc pas production de  $CO_2$ , soit  $\partial n / \partial z = 0$ . En exprimant cette condition il vient :

$$\frac{\partial n}{\partial z} = \frac{A}{\delta} \exp(z/\delta) - \frac{A}{\delta} \exp(-z/\delta) \quad z = 0 \quad A - B = 0 \quad B = A \quad n = n_0 + A(\exp(z/\delta) + \exp(-z/\delta))$$

II.A.7)

$$n(z = h_-) = \chi n(z = h_+) = \chi n_\infty \quad n(z = h_-) = n_0 + A(\exp(h/\delta) + \exp(-h/\delta)) = \chi n_\infty$$

$$A = \frac{\chi n_\infty - n_0}{\exp(h/\delta) + \exp(-h/\delta)} = 2 \frac{\chi n_\infty - n_0}{\cosh(h/\delta)}$$

$$n(z) = n_0 + \frac{\chi n_\infty - n_0}{\cosh(h/\delta)} \cosh(z/\delta)$$

La notation  $\cosh(z)$  représente le cosinus hyperbolique de  $z$  soit  $[\exp(z) + \exp(-z)]/2$ .

II.A.8) La condition de l'énoncé est bien vérifiée puisque  $h \sim 10 \text{ }\mu\text{m}$  et  $\delta \sim 0,32 \text{ cm}$ . Le nombre de molécules de  $CaCO_3$  déposées sur la stalactite est égal au nombre de molécules de  $CO_2$  produites dans la tranche de surface  $dS$  et d'épaisseur  $h$ , en intégrant il vient :

$$\int_0^h \frac{\partial^2 N_c}{dS \cdot dt} dz = \int_0^h \frac{\chi n_\infty - n_0}{\tau_c \cosh(h/\delta)} \cosh(z/\delta) dz = \frac{\chi n_\infty - n_0}{\tau_c \cosh(h/\delta)} [\delta \sinh(z/\delta)]_0^h = \delta \frac{\chi n_\infty - n_0}{\tau_c} \tanh(h/\delta)$$

En développant la tangente hyperbolique au premier ordre en  $h/\delta$  :  $\tanh(h/\delta) \sim h/\delta$  il reste :

$$\frac{\delta^2 N}{dS \cdot dt} = \frac{\chi n_\infty - n_0}{\tau_c} h \quad \sigma = \frac{\chi n_\infty - n_0}{\tau_c}$$

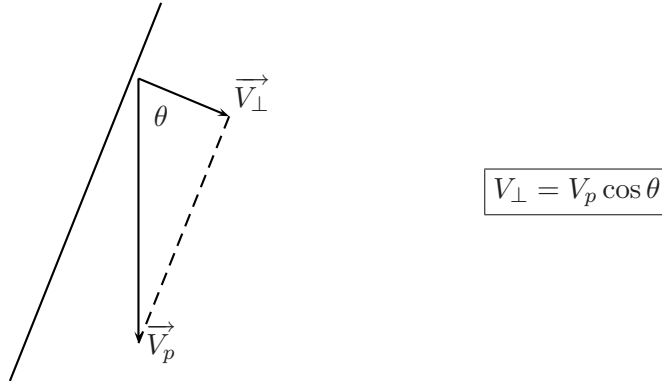
II.A.9) Pour un  $pH = 9$  la valeur de  $\sigma$  est positive et le  $CO_2$  s'échappe vers l'extérieur. Mais si le  $pH$  devient supérieur (en gros) à 9,3  $\sigma$  devient négatif et le  $CO_2$  de l'air de la grotte entre dans l'eau et va dissoudre le calcaire précédemment formé. Cela est dû au fait que la réaction est réversible.

## II.B- Croissance et forme de la stalactite

II.B.1) Soit  $\delta^2 N$  le nombre de molécules déposées pendant le temps  $dt$  sur la surface  $dS$ . Le volume de ces molécules est  $v_m \cdot \delta^2 N / \mathcal{N}_a$ . L'épaisseur élémentaire déposée vaut  $\delta^2 N / dS$  et la vitesse de dépôt :

$$v_{\perp} = \frac{\delta^2 N}{dS \cdot dt} \frac{v_m}{\mathcal{N}_a} = \frac{\sigma h v_m}{\mathcal{N}_a} = \frac{\sigma v_m}{\mathcal{N}_a} l_c^{4/3} (R \sin \theta)^{-1/3} \quad \boxed{\gamma = \frac{\sigma v_m l_c^{4/3}}{\mathcal{N}_a}}$$

II.B.2) L'angle entre la vitesse perpendiculaire à la stalactite et la vitesse de déplacement vers le bas vaut  $\theta$ .



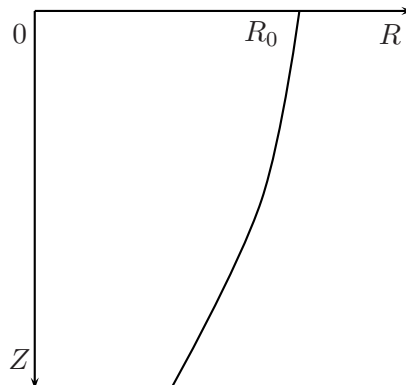
II.B.3) L'énoncé suppose  $V_p$  constant. En exprimant les relations entre les grandeurs il vient :

$$V_{\perp} = \gamma R^{-1/3} = V_p \cos \theta = -V_p \cdot \frac{dR}{dZ} \quad \boxed{\frac{dR}{dZ} = -\frac{\gamma}{V_p} \cdot R^{-1/3}}$$

En séparant les variables on obtient :

$$R^{1/3} \cdot dR = -\frac{\gamma}{V_p} \cdot dZ \quad \left[ \frac{3}{4} R^{4/3} \right]_{R_0}^R = -\left[ \frac{\gamma Z}{V_p} \right]_0^Z \quad \boxed{Z(R) = \frac{3\gamma}{4V_p} (R_0^{4/3} - R^{4/3})}$$

Le résultat trouvé ci-dessus n'est valable que dans l'hypothèse  $\theta \approx \pi/2$ , donc seulement au début de la stalactite. On n'a pas le droit d'aller jusqu'à la pointe :



## *Partie III-Formation d'un germe de stalactite sur une main courante en bois*

### III.A-Bilans de masse

III.A.1)

a) La surface, en projection horizontale, qui reçoit la pluie a pour valeur  $dS = aL \cos \alpha d\alpha$ . On en tire  $dD_m = \Psi_m dS = La\Psi_m \cos \alpha d\alpha$ . On a enfin :

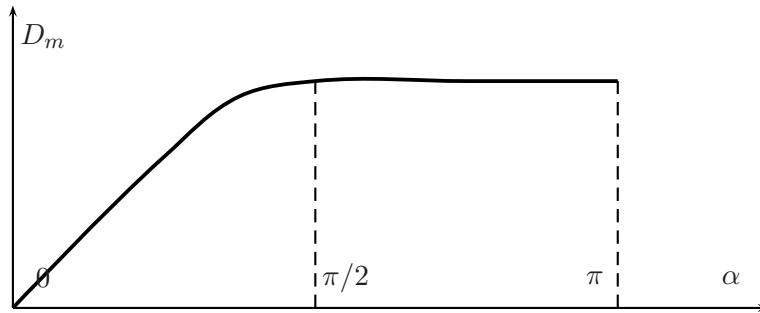
$$\boxed{\frac{dD_m}{d\alpha} = La\Psi_m \cos \alpha}$$

b) En  $\alpha = 0$  l'eau arrive perpendiculairement à la surface de la main courante, sa vitesse tangentielle est nulle donc  $\boxed{D_m = 0}$ .

c)  $dD_m = La\Psi_m \cos \alpha d\alpha$ . En intégrant on obtient :

$$D_m - 0 = La\Psi_m \int_0^\alpha \cos \alpha d\alpha = La\Psi_m [\sin \alpha]_0^\alpha \quad \boxed{D_m = La\Psi_m \sin \alpha}$$

Le graphe de  $D_m$  ci-dessous comprend aussi la réponse à la question suivante :



III.A.2) Le dessous de la main courante ne reçoit plus d'eau. L'énoncé précise que l'eau s'écoule le long de la main courante et ne la quitte pas. Donc pour  $\pi/2 < \alpha < \pi$  on a  $D_m = D_m(\pi/2) = La\Psi_m$ . Le graphe est sur la même figure qu'à la question précédente.

III.A.3) Sur la moitié de la main courante, la surface perpendiculaire à la pluie est  $L.a$ . Le débit total de la pluie est donc  $La\Psi_m$  qui s'écoule jusqu'à  $\alpha = \pi$

### III.A-Bilans d'énergie

III.B.1) Si on néglige tout transfert thermique de l'eau vers l'extérieur, elle conserve sa température initiale, soit celle de la pluie :  $\boxed{T(\alpha) = T_g}$ . La main courante en bois peut être considérée comme un isolant thermique, donc pas d'échanges de chaleur avec l'eau qui ruisselle.

III.B.2)  $0 < \alpha < \pi/2$

a) A l'instant  $t$  la masse  $dm$  d'eau entrant sur la main courante dans le système indiqué est  $dm = D_m \cdot dt$ . La masse d'eau provenant de la pluie est  $dm' = La\Psi_m \cos \alpha d\alpha dt$ . L'enthalpie totale du système fermé est constituée de l'enthalpie  $H$  constante du système ouvert et des apports extérieurs de l'eau qui arrive sur la main courante soit par ruissellement, soit par captation de la pluie, de sorte que :

$$\boxed{H^*(t) = H + cD_m(\alpha)T(\alpha)dt + cLa\Psi_m \cos \alpha T_g d\alpha dt}$$

b) A l'instant  $t + dt$  le système  $S^*$  est constitué de  $S$  et de l'eau qui est sortie de la main courante dont la masse vaut  $D_m(\alpha + d\alpha)dt$ . L'enthalpie totale du système vaut donc :

$$\boxed{H^*(t + dt) = H + cD_m(\alpha + d\alpha)T(\alpha + d\alpha)dt}$$

c) La variation d'enthalpie entre  $t$  et  $t + dt$  est égale à la quantité de chaleur échangée par le système avec le milieu extérieur  $dH^* = \delta^2 Q$ .

$$\begin{aligned} H^*(t + dt) - H^*(t) &= c[D_m(\alpha) + \frac{dD_m}{d\alpha}d\alpha][T(\alpha) + \frac{dT}{d\alpha}d\alpha]dt - cLa\Psi_m \cos \alpha T_g d\alpha dt \\ c \frac{d}{d\alpha}(TD_m)d\alpha dt - cLa\Psi_m T_g \frac{d(\sin \alpha)}{d\alpha}d\alpha dt &= h^{cc}(T_a - T)Lad\alpha dt \quad \text{avec} \quad D_m = La\Psi_m \sin \alpha \\ cLa\Psi_m \frac{d}{d\alpha}((T - T_g) \sin \alpha) &= h^{cc}(T_a - T)Lad\alpha dt \end{aligned}$$

On simplifie et on pose  $\boxed{\beta = h^{cc}/c\Psi_m}$  et on obtient l'équation demandée.

d) Nous admettrons sommairement que en  $\alpha = 0$   $dT/d\alpha = 0$ . En dérivant l'équation précédente on obtient :

$$\frac{dT}{d\alpha} \sin \alpha + (T - T_g) \cos \alpha = \beta(T_a - T)$$

En  $\alpha = 0$   $\sin \alpha = 0$ , la condition  $dT/d\alpha = 0$  est inutile  $0 * 0$ . En revanche  $\cos \alpha = 1$  ce qui donne tous calculs faits :

$$\boxed{T(\alpha = 0) = \frac{\beta T_a + T_g}{1 + \beta}}$$

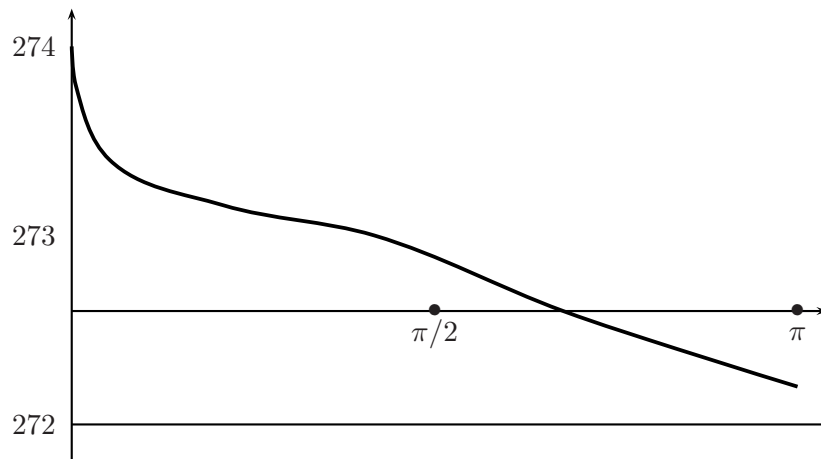
La figure 8 donne diverses courbes  $T(\alpha)$  fonction de  $\alpha$  avec diverses valeurs du paramètre  $\beta$ . On constate que pour  $\alpha = 0$  toutes ces courbes passent par la température  $T_g = 274 \text{ K}$  qui est celle de la pluie qui tombe. Pour obtenir ce résultat avec la formule précédente il faudrait  $\beta = 0$  ce qui ne correspond pas au réseau de courbes, qui ne donne d'ailleurs pas les valeurs de  $\beta$ . Il y a manifestement une ambiguïté entre le modèle choisi et le réseau de courbes. En plus en  $\alpha = 0$  la pente de la tangente à la courbe est plus proche de l'infini que de 0 comme indiqué dans l'énoncé.

III.B.3)

a) L'équation donnée par l'énoncé peut s'écrire :

$$\frac{d(T - T_a)}{d\alpha} + \beta(T - T_a) = 0 \quad \text{soit} \quad T - T_a = A \exp(-\beta\alpha)$$

$$T(\pi/2) = T_a + A \exp(-\beta\pi/2) \quad A = \frac{T(\pi/2) - T_a}{\exp(-\beta\pi/2)} \quad \boxed{T = T_a + (T(\pi/2) - T_a) \exp(-\beta(\alpha - \pi/2))}$$



b) Pour obtenir de la glace, il faut  $T(\alpha) = 273 \text{ K}$ . Suivant la valeur de  $\beta$  pour  $0 < \alpha < \pi/2$  on ne peut pas atteindre cette valeur. La décroissance de  $T(\alpha)$  se continue pour  $\pi/2 < \alpha < \pi$ . La zone la plus propice à la formation de glace est donc le dessous de la main courante.

c) Si on a une main courante en métal (bon conducteur de la chaleur), avant la pluie elle est à la température de l'air extérieur inférieure à la température de solidification de l'eau. L'eau sur la main courante se refroidira plus vite. L'apparition de glace est donc favorisée, mais le modèle choisi n'est plus valable car il y a des échanges de chaleur entre l'eau et la main courante.

## Partie IV- Croissance d'une stalactite de glace

### IV.A-Modèle conducto-convectif

IV.A.1) La température étant constante, la variation d'enthalpie du système est due uniquement à la solidification de l'eau qui fournit de la chaleur au milieu extérieur. Le volume de glace formé vaut  $\pi[R^2(t+dt) - R^2(t)]dZ$  d'où  $\boxed{dH = -2\pi\mu l_F R.dR.dZ}$

IV.A.2) La surface latérale du système vaut  $2\pi R dZ$ , d'où  $\boxed{\delta Q = h^{cc}(T_a - T_f)2\pi R dZ dt}$ . Comme  $T_a < T_f$

cette quantité est négative.

IV.A.3) On écrit l'égalité entre  $dH$  et  $\delta Q$  :

$$-2\pi\mu l_F R.dRdZ = h^{cc}(T_a - T_f)2\pi R dZ dt \quad \boxed{\frac{dR}{dt} = \frac{h^{cc}(T_f - T_a)}{\mu l_F}}$$

IV.A.4) Sur la photo de droite, où l'on a une belle stalactite, la longueur  $L$  est de l'ordre de 40 mm et le rayon de base est de l'ordre de 1 mm. Le rapport  $L/R$  est donc de l'ordre de 40. Si  $dL/dt$  et  $dR/dt$  avaient la même valeur, les vitesses de croissance seraient les mêmes et le rayon serait égal à la longueur, ce qui n'est pas le cas. La croissance axiale est plus rapide que la croissance latérale, ce qui confirme le résultat de la Partie III où  $v_{\perp} < v_p$ .

## IV.B-Effet de pointe

IV.B.1) L'équation de la chaleur pour la température peut s'écrire :

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\mu c} \Delta T}$$

en supposant qu'il n'y a pas de sources de chaleur dans le milieu conducteur autre que la condition aux limites. En régime permanent la température est indépendante du temps et l'équation devient en coordonnées sphériques :

$$\Delta T = \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$$

car le problème a la symétrie sphérique. En fait les dérivées partielles deviennent des dérivées de la seule variable  $r$ . Il vient alors :

$$\boxed{\frac{2}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{d^2 T}{dr^2} = 0}$$

Le potentiel créé par une charge ponctuelle  $q$  à la distance  $r$  en symétrie sphérique vaut  $V = q/4\pi\epsilon_0 r + Cste$ . C'est une simple fonction en  $1/r$  dont la dérivée première est  $-1/r^2$  et la dérivée seconde  $2/r^3$ . On constate que cette fonction satisfait à l'équation différentielle de la chaleur. Donc  $T(r) = \alpha + \beta/r$  est solution de l'équation différentielle du problème.

IV.B.2)

$$r \rightarrow \infty \quad T(\infty) = T_a = \alpha \quad r = a \quad T_f = T_a + \beta/a \quad \beta = a[T_f - T_a]$$

$$\boxed{T(r) = T_a + a(T_f - T_a)/r}$$

IV.B.3) La densité de courant thermique vaut  $\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad} T}$ . Le flux du courant thermique est le flux  $\Phi$  demandé.  $\Phi = 4\pi a^2 j_{th} = 4\pi a^2 . a(T_a - T_f) \lambda / a^2 = 4\pi \lambda a(T_a - T_f)$ . on en tire la valeur de  $\boxed{G = 4\pi \lambda a}$ .

IV.B.4) La quantité de chaleur reçue algébriquement ( en fait cédée à l'air) sert à fabriquer de la glace. Le volume de glace formée en supposant que le rayon de la sphère varie de  $da$  est  $4\pi a^2 . da$ . La quantité de chaleur échangée est  $-\mu l_F . 4\pi a^2 . da = 2\pi \lambda a(T_a - T_f) dt$  On peut considérer que l'allongement de la stalactite pendant  $dt$  est  $dL = 2.da$  soit :

$$\boxed{\frac{dL}{dt} = \frac{\lambda}{a} \frac{T_f - T_a}{\mu l_F}}$$

Le rapport de cette vitesse d'allongement à celle calculée en IV.A vaut :  $\lambda/a.h^{cc}$ . En prenant la valeur du rayon de la goutte donnée plus loin de 5 mm on trouve un rapport de 0,2, ce qui ne résoud pas le problème. Même avec un rayon de 1 mm on trouve la même vitesse d'allongement.

IV.B.5) Le champ électrique est l'opposé du gradient de la fonction potentiel. L'analogie thermique du

champ électrique est le gradient de température.

IV.B.6) Pendant le temps  $dt$  l'anneau s'allonge de  $dL$ . Son volume est  $2\pi a e dL$ . La quantité de chaleur fournie à l'air vaut  $\mu l_F 2\pi a e dL = 2\pi \lambda a (T_f - T_a) dt$ . Ce qui donne  $\boxed{dL/dt = \lambda(T_f - T_a)/e\mu l_F}$ . Le facteur d'amplification par rapport au calcul du I.V.A vaut maintenant  $\boxed{\lambda/eh^{cc}}$ . Avec les valeurs numériques de l'énoncé on trouve un rapport de 12,5, ce qui n'est encore pas assez pour expliquer le résultat de la photo.

## *Partie V- Ondulations sur la surface des stalactites*

### **V.A-Interprétation de l'instabilité**

V.A.1) Nous sommes en régime permanent, le flux thermique est constant. La seule variable est la distance à l'axe du cylindre  $r$ . Exprimons le flux du vecteur densité de courant thermique  $\vec{j}_{th}$  à travers la surface du cylindre de rayon  $r$  et de hauteur  $L$  et écrivons que  $j_{th} = -\lambda dT/dr$  :

$$\Phi = 2\pi r L j_{th} \quad j_{th} = \frac{\Phi}{2\pi r L} = -\lambda \frac{dT}{dr} \quad \frac{dT}{dr} = -\frac{\Phi}{2\pi \lambda L} \frac{1}{r} \quad T(r) = -\frac{\Phi}{2\pi \lambda L} \ln(r) + Cste$$

En écrivant la dernière relation pour les valeurs  $T_1(r_1)$  et  $T_2(r_2)$  il vient :

$$T_1 - T_2 = \frac{\Phi}{2\pi \lambda L} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \quad \text{soit} \quad \boxed{G = \frac{2\pi \lambda L}{\ln \frac{r_2}{r_1}}}$$

V.A.2) Calculons  $r_1$  et  $r_2$  pour  $R_-$  en tenant compte que  $h$  est beaucoup plus petit que  $R_-$  :

$$r_1 = R_- \quad r_2 = R_- + h = R_- + l_c^{4/3} \cdot R_-^{1/3} \quad \frac{r_2}{r_1} = 1 + l_c^{4/3} \cdot R_-^{-4/3} \quad \ln \frac{r_2}{r_1} \approx l_c^{4/3} \cdot R_-^{-4/3}$$

Pour  $R_-$  et  $R_+$  on a comme longueur une demie longueur d'onde spatiale soit  $\Lambda/2$ , on obtient donc :

$$\boxed{G_- = \frac{\pi \Lambda \lambda}{l_c^{4/3} \cdot R_-^{-4/3}}} \quad \boxed{G_+ = \frac{\pi \Lambda \lambda}{l_c^{4/3} \cdot R_+^{-4/3}}}$$

V.A.3)

$$\frac{dR_+/dt}{dR_-/dt} = \frac{G_+ R_-}{G_- R_+} = \frac{R_- \cdot R_-^{-4/3}}{R_+^{-4/3} \cdot R_+} = \left[\frac{R_+}{R_-}\right]^{1/3} \quad \boxed{\frac{dR_+/dt}{dR_-/dt} > 1}$$

La vitesse de formation de l'ondulation haute est supérieure à celle de l'ondulation basse, l'irrégularité de la surface peut s'accroître.

V.A.4) Pour  $R_-$  la surface  $S = \pi R_- \Lambda/2$ . L'énergie potentielle de cette surface est  $\pi A R_- \Lambda/2$ . Il en est de même pour  $R_+$ . Pour augmenter  $R_+$  il faut fournir une énergie supérieure à celle pour augmenter  $R_-$ . Cela modère l'effet d'origine thermique qui doit fournir plus de chaleur pour augmenter  $R_+$  que pour  $R_-$ .  $E_p$  étant proportionnel à  $\Lambda$  cette modération est plus efficace pour les grandes valeurs de  $\Lambda$ .

### **V.B-Période spatiale des ondulations**

V.B.1)  $\partial T/\partial t$  est la dérivée partielle de la température par rapport au temps, en régime permanent cette dérivée est nulle.  $\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}} T$  est lié à la variation de température liée au déplacement de l'eau.

V.B.2) En prenant de petites variations le Laplacien de  $T$  peut s'écrire  $(T_a - T_f)/h_0^2$ . Comme la vitesse est portée par  $OZ$  la composante du gradient est celle portée par  $OZ$  soit  $(T_a - T_f)/\Lambda$ . En reportant ces valeurs dans la relation donnée il vient :  $\boxed{\Lambda = u_m \cdot h_0^2 / D_{th}}$

V.B.3) Application numérique :  $\boxed{\Lambda = 6,6 \text{ mm}}$