

PARTIE A : Form à inductionI) Distributions orthoradiales de courant électrique :I-1) Distribution volumique orthoradiale de courants :

a-1) Le plan contenant $\vec{\pi}$ et $\perp$ à l'axe (Ox_3) est plan de symétrie de la distribution de courant (cylindre infini)
 or $\vec{B}$ est un pseudo-vecteur $\Rightarrow \vec{B}(\pi) \perp$ à ce plan

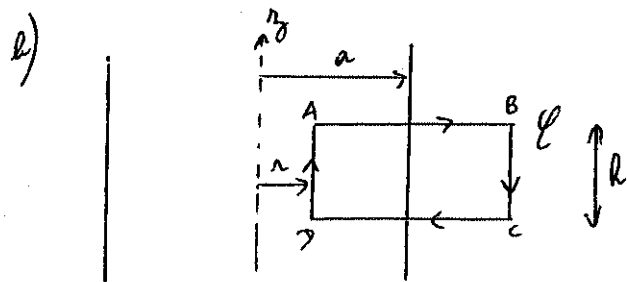
$$\Rightarrow \vec{B}_1 \text{ est porté par } \vec{u}_y$$

a-2) on a invariance de la distribution de courant par :

- translation suivant $\vec{u}_y$ (cylindre infini) $\Rightarrow B_1(r, \theta, y)$

- rotation autour de (Ox_3) $\Rightarrow B_1(r, \phi, z)$

$$\Rightarrow \boxed{B_1(r)}$$



équation de Maxwell-Ampère: $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
 régime permanent

$\Rightarrow$ théor d'Ampère: $\oint_{\ell} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enc}} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$

$$\begin{aligned} \oint_{\ell} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_B^C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_D^A \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \\ &= \int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B B_1(r) \vec{u}_y \cdot d\vec{\ell} \vec{u}_y \\ &= B_1(r) h \\ &= \mu_0 \iint_S \alpha r \vec{u}_\phi (+ dr dh \vec{u}_\phi) \end{aligned}$$

$$B_1(r) h = \mu_0 \alpha h \int_r^a r' dr'$$

$$B_1(r) = \frac{\mu_0 \alpha}{2} (a^2 - r^2)$$

$$\boxed{\vec{B}_1(r) = \frac{\mu_0 \alpha}{2} (a^2 - r^2) \vec{u}_y}$$

I-2) Distribution surfacique orthoradiale :

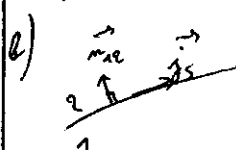
a) équation de Maxwell - flux: $\text{div} \vec{B} = 0$

équation de Maxwell-Ampère: $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$
 modèle surfacique régime permanent

Avec $\vec{B}_0$ uniforme, $\text{div} \vec{B}_0 = \frac{\partial B_0}{\partial x} + \frac{\partial B_0}{\partial y} + \frac{\partial B_0}{\partial z} = 0$

$$\text{et } \vec{\text{rot}} \vec{B}_0 = \vec{0}$$

$\Rightarrow$ un champ uniforme $\vec{B}_0$ satisfait aux équations de Maxwell à l'intérieur du cylindre.



$$\boxed{\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}}$$

continuité de la composante normale: $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \vec{0}$
 discontinuité de la composante tangentielle: $\vec{n}_{12} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{j}_s$

c) 1: $r = a^-$ $\vec{n}_{12} = \vec{u}_n$
 2: $r = a^+$

$$\vec{B}(a^+) - \vec{B}(a^-) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_n$$

$$\Rightarrow \vec{B}_0 = -\mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_n = -\mu_0 \vec{j}_s \vec{u}_\phi \wedge \vec{u}_n$$

$$\boxed{\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{j}_s \vec{u}_y}$$

II) Form à induction :II-1) Champ magnétique à l'intérieur du form "vide" :

a) courant traversant la hauteur H :

$$\vec{j}_s H = N i \Rightarrow \boxed{\vec{j}_s = \frac{N i}{H}}$$

$$b/a) \oint I(r) \cdot \vec{B}_0 = \mu_0 j_s \vec{u}_z = \mu_0 \frac{N}{H} i \vec{u}_z = \vec{B}_0$$

$$b/B) \vec{B}_0 = \mu_0 \frac{N}{H} i = \mu_0 \frac{N}{H} I_m \cos \omega t = K I_m \cos \omega t$$

$$\rightarrow K = \mu_0 \frac{N}{H}$$

II-2) Terme principal du champ électromagnétique du four "dage"

$$a) \text{équation de Maxwell-Endray: } \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\iint_S \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = - \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

lim de Stokes

$\mathcal{C}$: cercle d'axe (Oz) de rayon r

$$d\vec{l} = +dl \vec{u}_\theta = +r d\theta \vec{u}_\theta$$



$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} E_1(r,t) \vec{u}_\theta \cdot r d\theta \vec{u}_\theta = 2\pi r E_1(r,t)$$

$$= - \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = - \frac{d}{dt} \iint_S B_0 \vec{u}_z \cdot dS \vec{u}_z$$

$$= - \pi r^2 \frac{dB_0}{dt} \quad \text{pour } r < a$$

disque qui s'appuie sur $\mathcal{C}$

$$\Rightarrow 2\pi r E_1(r,t) = - \pi r^2 \frac{d}{dt} (K I_m \cos \omega t)$$

$$= + \pi r^2 K I_m \omega \sin \omega t$$

$$\Rightarrow E_1(r,t) = \frac{K I_m \omega}{2} r \sin \omega t$$

b) On a un conducteur linéaire, homogène, isotrope, immobile,
loi d'Ohm locale: $\vec{j} = \gamma \vec{E}$

$$\Rightarrow \vec{j}_1 = \frac{\gamma K I_m \omega}{2} r \sin \omega t \vec{u}_\theta$$

II-3) Puissance transférée:

$$a) P_v = \vec{j}_1 \cdot \vec{E}_1 = \frac{\gamma K^2 I_m^2 \omega^2}{4} r^2 \sin^2 \omega t$$

$$b) P_{\text{instantanée}} = \iiint P_v dI = \iiint P_v r dr d\theta dz$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $2\pi \quad H$

$$P_{\text{instantanée}} = \frac{\gamma K^2 I_m^2 \omega^2}{4} \sin^2 \omega t \cdot 2\pi H \int_0^a r^2 dr$$

$\frac{a^3}{3}$

$$P_{\text{instantanée}} = \frac{\gamma K^2 I_m^2 \omega^2 \pi a^3 H}{8} \sin^2 \omega t$$

$$c) P = \langle P_{\text{instantanée}} \rangle \text{ or } \langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P = \frac{\gamma K^2 I_m^2 \omega^2 a^3 V}{16} \quad \text{avec } V = \pi a^3 H$$

d) on note E_{fusion} l'énergie requise pour la fusion

$$E_{\text{fusion}} + E_{\text{pertes par rayonnement}} = P t_f$$

$$E_{\text{fusion}} (1 + \gamma) = P t_f$$

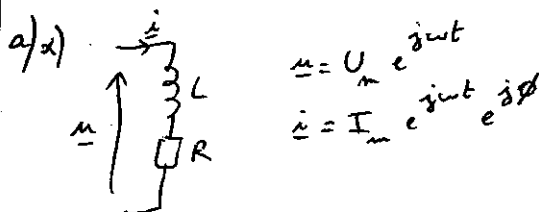
$$\text{or } E_{\text{fusion}} = \Delta_{\text{fus}} H \times \pi$$

$$\Rightarrow t_f = \frac{\pi \Delta_{\text{fus}} H (1 + \gamma)}{P}$$

$$t_f = \frac{1617 \Delta_{\text{fus}} H (1 + \gamma)}{\gamma K^2 I_m^2 \omega^2 a^3 V} = 3 \cdot 10^5 = 6 \text{ min}$$

III) Alimentation électrique du four à induction:

III-1) Transfert de puissance à un dipôle inductif:



$$\text{loi des mailles: } u = (jL\omega + R) i$$

$$\Rightarrow U_m = (R + jL\omega) I_m e^{j\phi}$$

$$\Rightarrow I_m e^{j\phi} = \frac{U_m}{R + jL\omega}$$

$$\Rightarrow I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}}$$

$$\text{et } I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{U_m}{\sqrt{2} \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}}$$

$$B) P = \frac{U_m}{\sqrt{2}} I \cos \phi$$

$$\Rightarrow I_m e^{j\phi} = \frac{U_m}{R + jL\omega} = \frac{U_m}{R^2 + L^2\omega^2} (R - jL\omega)$$

$$= I_m \frac{R - jL\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$$

$$\Rightarrow \cos \phi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$$

$$P = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \frac{U_m}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$$

$$P = \frac{RU_m^2}{2(R^2 + L^2\omega^2)}$$

$$x) P_{\max} \text{ pour } \omega = 0 \text{ et alors } P_{\max} = \frac{U_m^2}{2R}$$

$$b) TP = \frac{P}{P_{\max}} = \frac{RU_m^2}{2(R^2 + L^2\omega^2)} \frac{2R}{U_m^2} = \frac{R^2}{R^2 + L^2\omega^2}$$

$$TP = \frac{R^2}{R^2 + L^2\omega^2} = \frac{1}{1 + \frac{L^2\omega^2}{R^2}}$$

$$b) TP = 5,88\%$$

III-2) Amélioration du transfert de puissance:

$$a) \begin{array}{c} \text{---} i \text{---} \\ | \\ \text{---} L \text{---} \\ | \\ \text{---} R \text{---} \\ | \\ \text{---} C \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \quad u = \left(R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} \right) i$$

$$\Rightarrow I_m e^{j\phi} = \frac{U_m}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$$

$$\Rightarrow \text{on remplace } L\omega \text{ par } \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)$$

$$\Rightarrow P = \frac{RU_m^2}{2 \left(R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2 \right)} \quad P_{\max} = \frac{U_m^2}{2R}$$

$$TP = \frac{1}{1 + \frac{1}{R^2} \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}$$

$$b) TP = 1 \text{ pour } L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$$

$$\Rightarrow C_0 = \frac{1}{L\omega^2}$$

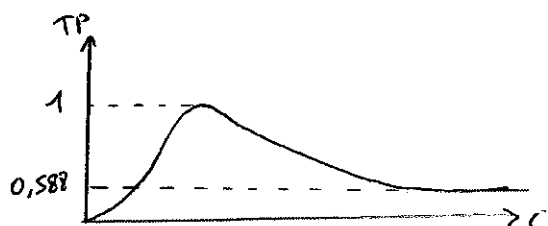
$$b) TP(C_0) = 1 \quad \text{et} \quad C_0 = 9,95 \cdot 10^{-8} \text{ F} = 99,5 \text{ nF}$$

TP est fortement augmentée (15,88%)
C'est très intéressant d'ajouter une capacité et de l'ajuster à la valeur C_0 .

$$c) C \rightarrow 0, TP \rightarrow 0$$

$$C \rightarrow \infty, TP \rightarrow \frac{1}{1 + \frac{L^2\omega^2}{R^2}} = 0,588$$

$$C = C_0, TP = 1$$



$$d) C = C_0 \Rightarrow I_m e^{j\phi} = \frac{U_m}{R + j \underbrace{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)}_0}$$

$$I_m e^{j\phi} = \frac{U_m}{R} \Rightarrow \boxed{I_m = \frac{U_m}{R}} \text{ et } \boxed{\phi = 0}$$

III-3) Introduction d'une charge non fusive dans la bobine:

$$a) \text{ loi des mailles: } u = \left(\frac{1}{jC\omega} + jL\omega + R + r \right) i$$

$$\Rightarrow I_m e^{j\phi} = \frac{U_m}{(R+r) + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)}$$

$$\Rightarrow I_m = \frac{U_m}{\sqrt{(R+r)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}}$$

Sur la voie 2, on visualise u .

— i , — $r i$.

$$\text{Les 2 courbes sont en phase} \Rightarrow \phi = 0 \Rightarrow L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$$

$$\Rightarrow L_v = \frac{1}{C\omega^2} = \frac{1}{4\pi^2 C f^2} = 48,2 \text{ mH} = L_v$$

$$r I_m = \frac{r U_m}{R+r} = \frac{1,934}{2} \Rightarrow \boxed{R_v = 22 \Omega}$$

b) 1 période $\hat{=}$ 5 canaux $\hat{=}$ déphasage 2π
 $0,9 \text{ canaux} \hat{=}$ ϕ

$$\Rightarrow \phi = \frac{0,9 \times 2\pi}{5} = 1,13 \text{ rad} = \phi$$

c) Sur l'oscillogramme 3, u et i sont en phase

$$\Rightarrow \phi = 0 \Rightarrow L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$$

$$\Rightarrow L_c = \frac{1}{C\omega^2} = \frac{1}{4\pi^2 C f^2} = 36,2 \text{ mH} = L_c$$

$$\text{on a alors } rI_m = \frac{rU_m}{R_c + r} = \frac{1,078}{2}$$

$$\Rightarrow R_c = 53 \Omega$$

q: avec l'oscillogramme 2:

$$\cos \phi = \frac{R+r}{\sqrt{(R+r)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}} = \cos 1,13$$

$$rI_m = \frac{rU_m}{\sqrt{(R+r)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}} = \frac{0,470}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{rU_m \cos 1,13}{R+r} = \frac{0,470}{2}$$

$$\Rightarrow R_c = 52 \Omega \approx 53 \Omega \text{ (erreur de mesure sur } \phi)$$

$$\frac{rU_m}{\sqrt{(R_c+r)^2 + (L_c\omega - \frac{1}{C\omega})^2}} = \frac{0,470}{2}$$

$$\Rightarrow L_c = 35 \text{ mH} \quad (\text{autre solution mathématique } 43 \text{ mH})$$

III-4) Pilotage du four à induction:

puissance optimale si $LC\omega^2 = 1$ ($L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$)

C fixé
 L $\nearrow$ en cours de chauffe $\rightarrow \omega \nearrow$ en cours de chauffe

$\Rightarrow$ il faut augmenter la fréquence en cours de chauffe si on veut que le four travaille constamment à puissance optimale.

PARTIE B : Effets thermiques dans les câbles d'alimentation

I) Etude électrique :

$$* dI = \vec{j} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \boxed{I = j_0 e b}$$

$$* P_e = UI = ELI = \frac{j_0}{\gamma} LI = \frac{I}{\gamma e b} LI = RI^2$$

$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ loi d'Ohm locale $\vec{j} = \gamma \vec{E}$

$$P_e = RI^2 = \frac{L}{\gamma e b} j_0^2 e^2 b^2 \quad \boxed{P_e = \frac{j_0^2 L e b}{\gamma}}$$

$$* \text{volume de la plaque : } V = L e b$$

$$P_v = \frac{P_e}{V} \Rightarrow \boxed{P_v = \frac{j_0^2}{\gamma} = \vec{j} \cdot \vec{E}}$$

résultat connu (puissance volumique)

II) Etude thermique du ruban thermiquement isolé sur une face :

1) la puissance totale qui apparaît dans la plaque doit être évacuée en $x=0$

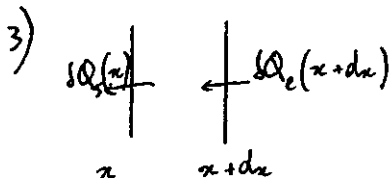
$$\Rightarrow P_e = \frac{j_0^2 L e b}{\gamma} = h (T_a - T_e) L b$$

loi de Newton

$$\Rightarrow \boxed{T_a = T_e + \frac{j_0^2 e}{\gamma h}}$$

2) loi de Fourier : $\vec{j}_q = -\lambda \vec{\nabla} T = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{u}_z \right)$

$$\boxed{\vec{j}_q = -\lambda \frac{dT}{dx} \vec{u}_x}$$



1° principe à la tranche comprise entre x et $x+dx$:

$$dU = \delta Q_e(x+dx) - \delta Q_s(x) + P_v(Lb dx) dt + \delta W$$

$\frac{dm}{dt} \frac{dx}{dt}$
 régime permanent
 $-P_v \frac{dx}{dt}$
 régime permanent

$$\delta Q_e(x+dx) = -j_q(x+dx) L b dx \text{ avec } j_q = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

$$\delta Q_s(x) = -j_q(x) L b dx$$

$$\Rightarrow -j_q(x+dx) L b dx + j_q(x) L b dx + P_v L b dx dt = 0$$

$$- \frac{dj_q}{dx} dx + P_v dx = 0$$

$$- \frac{d}{dx} \left(-\lambda \frac{dT}{dx} \right) + P_v = 0 \Rightarrow \lambda \frac{d^2 T}{dx^2} + P_v = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{j_0^2}{\gamma} = 0}$$

4) La puissance transférée par conduction thermique en $x=e$ est nulle car la face $x=e$ est isolée thermiquement.

5) conditions aux limites :

$$\begin{aligned} T(x=0) &= T_a \\ j_q(x=0) &= -\lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = h(T_a - T_e) \\ j_q(x=e) &= -\lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x=e} = 0 \end{aligned}$$

$$6) \frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{j_0^2}{2\lambda \gamma} \Rightarrow \frac{dT}{dx} = -\frac{j_0^2}{2\lambda \gamma} x + K_1$$

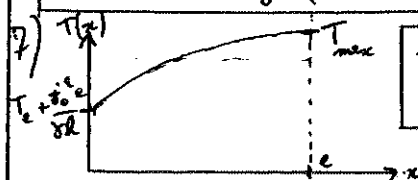
$$\Rightarrow T(x) = -\frac{j_0^2}{2\lambda \gamma} x^2 + K_1 x + K_2$$

ou conditions aux limites $\Rightarrow$

$$\begin{cases} K_2 = T_a \\ -\lambda K_1 = h(T_a - T_e) \\ -\lambda \left(-\frac{j_0^2 e}{\lambda \gamma} + K_1 \right) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow T(x) = -\frac{j_0^2}{2\lambda \gamma} x^2 + \frac{j_0^2 e}{\lambda \gamma} x + T_a$$

$$\boxed{T(x) = T_e + \frac{j_0^2}{\gamma} \left(-\frac{x^2}{2\lambda} + \frac{e}{\lambda} x + \frac{e}{2\lambda} \right)}$$



$$\boxed{T_{\max} = T(e) = T_e + \frac{j_0^2 e}{\gamma} \left(\frac{e}{2\lambda} + \frac{1}{2} \right)}$$

PARTIE C : Règle de "SCHEIMPFLUG"I) Image réelle d'un objet réel rectiligne dans un plan frontalI-1) relation de conjugaison: $-\frac{1}{OC} + \frac{1}{OC'} = \frac{1}{OF'}$

$$\Rightarrow \frac{1}{dc} + \frac{1}{di} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{di} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{dc}$$

$$\Rightarrow \boxed{di = \frac{f' dc}{dc - f'}}$$

I-2) grandissement $\gamma = \frac{\overline{C'B'}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}$

relation de conjugaison

$$\Rightarrow \overline{C'B'} = \frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}} \overline{CB} = \frac{di}{-dc} \overline{CB}$$

 $\uparrow$
-H

$$\Rightarrow \boxed{\overline{C'B'} = H \frac{di}{dc}} > 0 \text{ (l'image est renversée par rapport à } \overline{CB} < 0 \text{)}$$

$$\text{I-3) } di = \frac{f' dc}{dc - f'} = 4 \text{ cm} = di$$

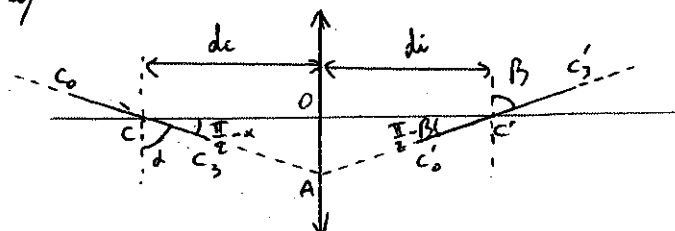
$$\text{I-4) } di = \frac{f' dc}{dc - f'} \Rightarrow x' = \frac{f'(-x)}{(-x) - f'} \quad \begin{matrix} dc > 0 \\ x < 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{x' = \frac{f' x}{f' + x}}$$

$$\gamma = \frac{y'}{y} = \frac{x'}{x} \Rightarrow y' = \frac{y}{x} x' = \frac{f' y}{f' + x} = y'$$

II) Image d'un objet rectiligne incliné: règle de Scheimpflug:II-1) la règle de Scheimpflug:

a)

Le rayon passant par C, C_3 doit sortir en passant par C'_0, C'_3 $\left(\begin{matrix} C_0 \rightarrow C'_0 \\ C \rightarrow C' \\ C_3 \rightarrow C'_3 \end{matrix} \right)$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{OA}{dc} \Rightarrow OA = \frac{dc}{\tan \alpha}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \frac{1}{\tan \beta} = \frac{OA}{di} \Rightarrow OA = \frac{di}{\tan \beta}$$

$$\Rightarrow \frac{dc}{\tan \alpha} = \frac{di}{\tan \beta} \quad (\alpha, \beta > 0)$$

en prenant des angles α et β algébriques ($\alpha > 0, \beta < 0$)

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dc}{\tan \alpha} = -\frac{di}{\tan \beta}}$$

b)

$$di = 4 \text{ cm}$$

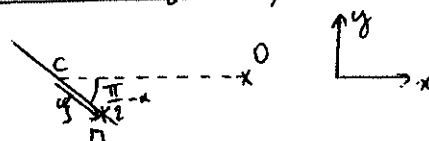
$$dc = 10 \text{ cm}$$

$$\alpha = -57^\circ$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = 33^\circ}$$

II-2) Position de l'image d'un point:

a)



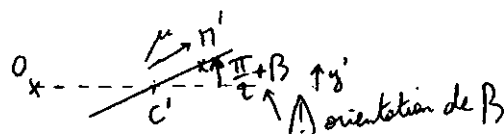
$$\vec{ON} = \vec{OC} + \vec{CN} = \begin{pmatrix} -dc \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) \\ -\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -dc + y \sin \alpha \\ -y \cos \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$$

$$\text{cf I-4) } y' = \frac{f' y}{f' + x} = \frac{-f' y \cos \alpha}{f' - dc + y \sin \alpha}$$

point	M	M'
abscisse	$x = -dc + y \sin \alpha$	
ordonnée	$y = -y \cos \alpha$	$y' = \frac{-f' y \cos \alpha}{f' - dc + y \sin \alpha}$

b)



$$y' = y \sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) = y \cos \beta$$

$$\boxed{y' = y \cos \beta}$$

$$c) \mu = \frac{y'}{\cos \beta} = \frac{-f' \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} g}{f' - dc + g \sin \alpha}$$

$$\mu = \frac{f' \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} g}{dc - f' - g \sin \alpha} = \frac{\frac{f'}{dc - f'} \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} g}{1 - \frac{\sin \alpha}{dc - f'} g}$$

$$\mu = \frac{K g}{1 - D g} \quad \text{avec } D = \frac{\sin \alpha}{dc - f'}$$

$$\text{et } K = \frac{f'}{dc - f'} \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$$

II-3) Déformation de l'image d'un objet :

on relève $\mu_3 = 5,4 \text{ cm}$ et $\mu_0 = -4,3 \text{ cm}$

$$\mu_3 = \frac{K g_3}{1 - D g_3} \quad \mu_0 = \frac{K g_0}{1 - D g_0}$$

$$\Rightarrow \frac{\mu_3}{\mu_0} = \frac{K g_3}{1 - D g_3} \frac{1 - D g_0}{K g_0}$$

$$\Rightarrow \mu_3 g_0 (1 - D g_3) = \mu_0 g_3 (1 - D g_0)$$

$$\begin{aligned} \mu_3 g_0 - \mu_0 g_3 &= \mu_3 g_0 g_3 D - \mu_0 g_3 g_0 D \\ &= g_0 g_3 (\mu_3 - \mu_0) D \end{aligned}$$

$$\Rightarrow D = \frac{\mu_3 g_0 - \mu_0 g_3}{g_0 g_3 (\mu_3 - \mu_0)} = 7,6 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1} = D$$

$$\alpha D = \frac{\sin \alpha}{dc - f'} \Rightarrow \alpha = 27^\circ$$

PARTIE D : Capteur de position par triangulationI) Détecteur PSD :

$$1) R_1 = K' \pi A_1 = K' \left(x + \frac{L}{2} \right) = R_1$$

$$R_2 = K' \pi A_2 = K' \left(\frac{L}{2} - x \right) = R_2$$

2) part diviseur de courant :

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I_0$$

$$I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I_0$$

$$I_1 = \frac{K' \left(\frac{L}{2} - x \right)}{K' \left(x + \frac{L}{2} \right) + K' \left(\frac{L}{2} - x \right)} I_0 = \frac{\frac{L}{2} - x}{L} I_0$$

$$I_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{L} \right) I_0$$

$$I_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{L} \right) I_0$$

$$3) I_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{L} \right) I_0 = I_2 \frac{\frac{1}{2} - \frac{x}{L}}{\frac{1}{2} + \frac{x}{L}}$$

$$I_1 = I_2 \frac{L - 2x}{L + 2x} \Rightarrow (L + 2x) I_1 = (L - 2x) I_2$$

$$\Rightarrow L I_1 - L I_2 = -2x I_2 - 2x I_1$$

$$\Rightarrow L (I_2 - I_1) = 2x (I_1 + I_2)$$

$$x = \frac{L}{2} \frac{I_2 - I_1}{I_2 + I_1}$$

II) Montages de base du conditionneur :

• AO idéal $\Rightarrow i_+ = i_- = 0$

• Boucles de rétroaction entre sorties AO et entrées inverseuses

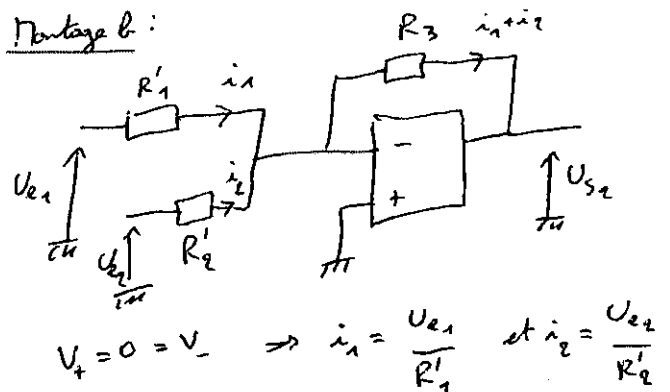
$\Rightarrow$ régime linéaire $\Rightarrow V_+ = V_-$

Montage a : $V_- = V_+ = 0$

l'intensité traversant R_f est I_e (car $i_- = 0$)

$$\Rightarrow 0 - U_{S1} = R_f I_e \Rightarrow U_{S1} = -R_f I_e$$

Montage b :

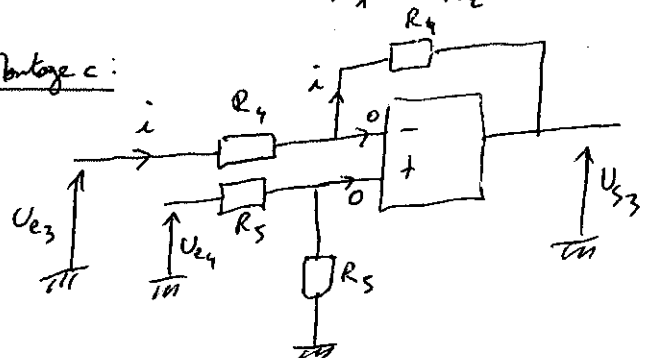


$$V_+ = 0 = V_- \Rightarrow i_1 = \frac{U_{e1}}{R_1'} \text{ et } i_2 = \frac{U_{e2}}{R_2'}$$

$$0 - U_{S2} = R_3 (i_1 + i_2)$$

$$\Rightarrow U_{S2} = -R_3 \left(\frac{U_{e1}}{R_1'} + \frac{U_{e2}}{R_2'} \right)$$

Montage c :



$$\text{diviseur de tension : } V_+ = \frac{R_5}{R_5 + R_4} U_{e3} = \frac{U_{e4}}{2}$$

$$\Rightarrow V_- = \frac{U_{e4}}{2}$$

$$\Rightarrow i = \frac{U_{e3} - V_-}{R_4} = \frac{U_{e3} - \frac{U_{e4}}{2}}{R_4}$$

$$\text{et } V_- - U_{S3} = R_4 i$$

$$\Rightarrow \frac{U_{e4}}{2} - U_{S3} = U_{e3} - \frac{U_{e4}}{2}$$

$$\Rightarrow U_{S3} = U_{e4} - U_{e3}$$

montage a	montage b	montage c
$U_{S1} = -R_f I_e$	$U_{S2} = -R_3 \left(\frac{U_{e1}}{R_1'} + \frac{U_{e2}}{R_2'} \right)$	$U_{S3} = U_{e4} - U_{e3}$

III) Le conditionneur :

1) D'après le montage a : $V_A = -R_f I_1$
 $V_B = -R_f I_2$

D'après le montage b : $V_{S1} = -R \left(\frac{V_A}{R} + \frac{V_B}{R} \right)$
 $= -(V_A + V_B)$

D'après le montage c : $V_{S2} = V_B - V_A$

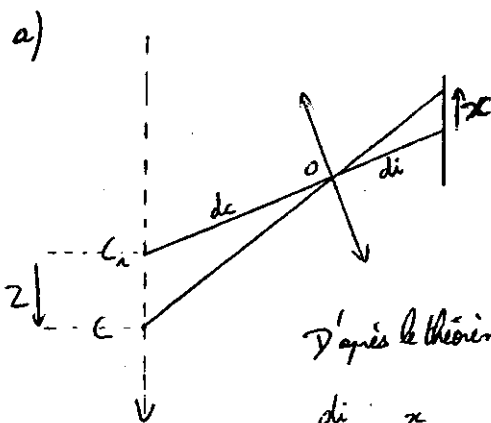
$$\Rightarrow \begin{cases} V_{S1} = R_f (I_1 + I_2) \\ V_{S2} = R_f (I_1 - I_2) \end{cases}$$

2) $U_S = -10 \frac{V_{S2}}{V_{S1}} \Rightarrow U_S = 10 \frac{I_2 - I_1}{I_2 + I_1}$

3) cf II-3) : $x = \frac{L}{2} \frac{I_2 - I_1}{I_2 + I_1} \Rightarrow x = \frac{U_S}{20} L$

IV) Le capteur par triangulation :

IV-1) Géométrie simple :



D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{di}{dc} = \frac{x}{Z} \Rightarrow Z = \frac{dc}{di} x$$

b) $-\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2} \Rightarrow -\frac{dc}{di} \frac{L}{2} < Z < \frac{dc}{di} \frac{L}{2}$
 $Z_i \quad \quad \quad Z_s$

$$Z_i = -\frac{dc}{di} \frac{L}{2} = -93 \text{ mm}$$

$$Z_s = \frac{dc}{di} \frac{L}{2} = 93 \text{ mm}$$

c) cf II-3) : $U_S = \frac{20}{L} x = A x$ avec $A = 10^3 \text{ V m}^{-1}$

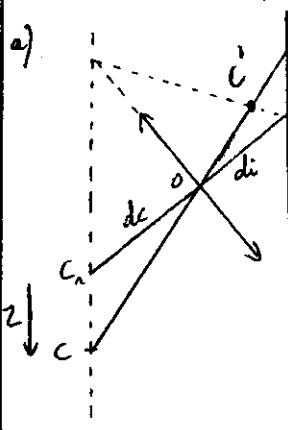
$$Z = \frac{dc}{di} x = \frac{dc}{di} \frac{U_S}{A}$$

En supposant qu'il n'y a pas d'incertitude sur dc , di et A

$$\Rightarrow \delta Z = \frac{dc}{A di} \delta U_S = 2 \mu\text{m}$$

δZ est indépendant de Z , donc de la position de la cible.

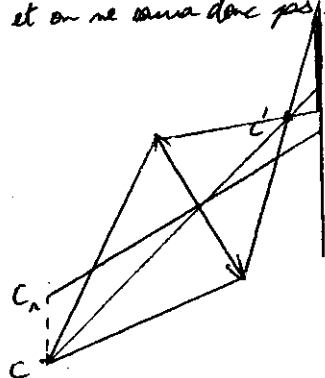
IV-2) Critique de la géométrie simple :



* Le rayon passant par C et O n'est pas dévié
 * Le rayon passant par C et C'' ressort en passant par le centre du PSD ($x=0$)
 d'où le point C'

b) On constate que C' (image de C par la lentille) n'est pas sur le détecteur PSD.

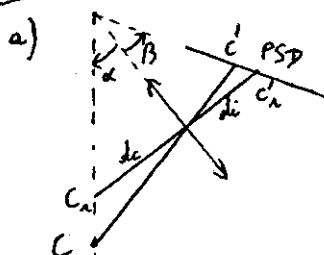
On récupérera donc une "tache" lumineuse sur le détecteur, et on ne saura donc pas exactement où se trouve C :



$\Rightarrow$ Les résultats du IV-1-c) sont illusoire :

δZ dépend de la position de la cible ($+Z$ est grand, $+ \delta Z$ sera grand).

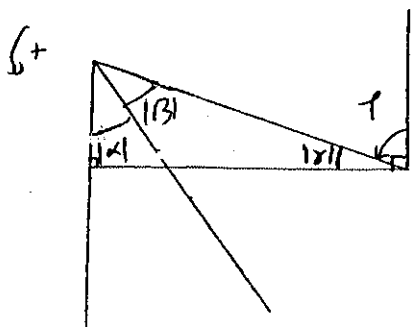
IV-3) Optimisation de la géométrie :



$$\frac{dc}{\tan \alpha} = -\frac{di}{\tan \beta}$$

$$\Rightarrow \tan \beta = -\frac{di}{dc} \tan \alpha$$

$$\Rightarrow \beta = 34^\circ$$



$$|\alpha| + |\beta| + |\gamma| + \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow |\gamma| = \frac{\pi}{2} - |\alpha| - |\beta|$$

$$\alpha \quad \gamma = \frac{\pi}{2} - |\gamma| = |\alpha| + |\beta| = \beta - \alpha$$

$$(\beta > 0, \alpha < 0)$$

$$\boxed{\gamma = \beta - \alpha = 91^\circ}$$

$$b) \quad x = \frac{BZ}{1+CZ} \Rightarrow x + xCZ = BZ$$

$$\Rightarrow x = Z(B - Cx) \Rightarrow Z = \frac{x}{B - Cx}$$

Étude de la fonction $Z(x) = \frac{x}{B - Cx}$

$$Z'(x) = \frac{(B - Cx) - x(-C)}{(B - Cx)^2} = \frac{B}{(B - Cx)^2} > 0$$

$Z \nearrow$ avec x

$$\Rightarrow Z_i = Z\left(x = -\frac{L}{2}\right) = \frac{-\frac{L}{2}}{B + C\frac{L}{2}}$$

$$Z_s = Z\left(x = +\frac{L}{2}\right) = \frac{\frac{L}{2}}{B - C\frac{L}{2}}$$

$$\boxed{Z_i = \frac{-\frac{L}{2}}{B + C\frac{L}{2}} = -25 \text{ mm}}$$

$$Z_s = \frac{\frac{L}{2}}{B - C\frac{L}{2}} = 63 \text{ mm}$$

$$c) \quad Z = \frac{x}{B - Cx} \quad \text{et} \quad x = \frac{U_s}{A} \Rightarrow Z = \frac{U_s}{AB - CU_s}$$

$$\ln Z = \ln U_s - \ln(AB - CU_s)$$

$$\frac{dZ}{Z} = \frac{dU_s}{U_s} - \frac{d(AB - CU_s)}{AB - CU_s} = \frac{dU_s}{U_s} + C \frac{dU_s}{AB - CU_s}$$

$$\Rightarrow dZ = Z \left(\frac{1}{U_s} + \frac{C}{AB - CU_s} \right) dU_s$$

$$\alpha \quad \frac{1}{AB - CU_s} = \frac{Z}{U_s} \Rightarrow dZ = \frac{Z}{U_s} (1 + CZ) dU_s$$

$$\alpha \quad \frac{Z}{U_s} = \frac{1 + CZ}{AB} \quad \text{car} \quad x = \frac{U_s}{A} = \frac{BZ}{1 + CZ}$$

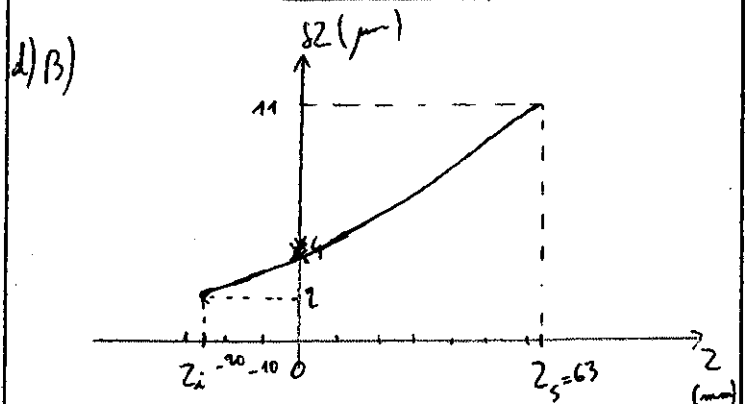
$$\Rightarrow dZ = \frac{(1 + CZ)^2}{AB} dU_s$$

$$\boxed{\delta Z = \frac{(1 + CZ)^2}{AB} \delta U_s}$$

$$d) \alpha) \quad Z = 0 : \quad \delta Z = 4 \mu\text{m}$$

$$* \quad Z = Z_i : \quad \delta Z = 2 \mu\text{m}$$

$$* \quad Z = Z_s : \quad \delta Z = 11 \mu\text{m}$$



III) 4) Discussion :

Si la cible réfléchissait la lumière, alors le point cible ne se comporterait pas comme un objet lumineux ponctuel. La lumière se répartirait que dans une direction (loi de Descartes).