

PREMIERE PARTIE : Réflexion d'une OPPH sur une plaque métallique

A) Réflexion sur un plan conducteur parfait :

A.1) éq. Maxwell-Gauss : $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$ ($\rho = 0$ au vide)

éq. Maxwell-flux : $\text{div } \vec{B} = 0$

éq. Maxwell-Faraday : $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

éq. Maxwell-Ampère : $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
 $\vec{j} = 0$ (vide)

$$\text{div } \vec{E} = 0 ; \text{div } \vec{B} = 0 ; \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} ; \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

A.2) $\text{rot rot } \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E}$
 $= \text{rot} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{B}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\square \vec{E} = \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\left(\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1 \right)$$

d'Alembert

C'est l'équation de d'Alembert.

A.3) $\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t + ky) \vec{u}_x$

$$\square \vec{E}_i = \vec{0} \Rightarrow \square E_{ix} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 E_{ix}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{ix}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{ix}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_{ix}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Rightarrow -k^2 E_0 \cos(\omega t + ky) - \frac{1}{c^2} (-\omega^2 E_0 \cos(\omega t + ky)) = 0$$

$$\Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\omega}{k} = c \quad \text{c'est la relation de dispersion}$$

A.4) $\text{rot } \vec{E}_i = -\frac{\partial \vec{B}_i}{\partial t}$

$$\text{rot } \vec{E}_i = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_0 \cos(\omega t + ky) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ +k E_0 \sin(\omega t + ky) \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{B}_i}{\partial t} = -k E_0 \sin(\omega t + ky) \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \vec{B}_i = \frac{k}{\omega} E_0 \cos(\omega t + ky) \vec{u}_z$$

$$\vec{B}_i = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + ky) \vec{u}_z$$

amplitude $B_0 = \frac{E_0}{c}$

éq. on a bien $\vec{B}_i = \frac{\vec{k}_i \wedge \vec{E}_i}{\omega} = \frac{-k \vec{u}_y \wedge E_0 \cos(\omega t + ky)}{\omega}$
 $= \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + ky) \vec{u}_z$

équation de propagation :

$$\text{rot rot } \vec{B} = \text{grad div } \vec{B} - \Delta \vec{B}$$

$$= \text{rot} \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{E}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \square \vec{B}_i = \Delta \vec{B}_i - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}_i}{\partial t^2} = \vec{0}$$

A.5) σ en $C.m^{-2}$
 $\vec{j}_s$ en $A.m^{-1}$

Dans le conducteur parfait : $\vec{j} = \gamma \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$
 $\uparrow \quad \uparrow$
fini
(c'est nul)

$$\Rightarrow \vec{B} = \vec{0} \quad (\text{d'après l'équation de Maxwell-Ampère et l'équation de Maxwell-Faraday})$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \vec{0} \text{ et } \vec{B} = \vec{0} \text{ dans le métal conducteur parfait}$$

relations de passage en $y=0$

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_n \Rightarrow \vec{E}(y=0^+) - \vec{E}(y=0^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_y$$

$$(\vec{E}_i + \vec{E}_r)_{y=0^+} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_y$$

conducteur parfait

On a toujours continuité de la composante tangentielle du champ électrique à la traversée d'une surface chargée.

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n} \Rightarrow \vec{B}(y=0^+) - \vec{B}(y=0^-) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_y$$

cond. parfait

$$\Rightarrow \boxed{(\vec{B}_i + \vec{B}_r)_{y=0^+} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_y}$$

A.6) Les ondes incidentes et réfléchies ont même fréquence car la réflexion n'entraîne pas de changement de fréquence

$$\vec{k}_i = -k \vec{n}_y = -\frac{\omega}{c} \vec{n}_y \text{ car l'onde se propage selon } -\vec{n}_y$$

L'onde réfléchie se propage selon $+\vec{n}_y$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{k}_r = +k \vec{n}_y = +\frac{\omega}{c} \vec{n}_y = -\vec{k}_i}$$

A.7) on cherche $\vec{E}_r$ de la forme :

$$\vec{E}_r = n E_0 \cos(\omega' t - k' y) \vec{n}_x$$

$$k' = \frac{\omega'}{c} > 0 \text{ (propagation de sens des } y \text{ croissants) que } \vec{E}_i \text{ } \uparrow \text{ même polarisation}$$

$$(\vec{E}_i + \vec{E}_r)_{y=0^+} = (E_0 \cos \omega t + n E_0 \cos \omega' t) \vec{n}_x$$

$$= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_y$$

$$\alpha \vec{n}_x \perp \vec{n}_y \Rightarrow \boxed{\sigma = 0}$$

$$\begin{cases} E_0 \cos \omega t + n E_0 \cos \omega' t = 0 \\ \forall t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \omega'} \text{ cf A.6)}$$

$$\text{et } n = -1 \Rightarrow \boxed{\vec{E}_r(y=0^+) = -E_0 \cos \omega t \vec{n}_x}$$

q: Il suffit d'assurer la continuité de la composante tangentielle de $\vec{E}$ en $y=0$.

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_r = -E_0 \cos(\omega t - k y) \vec{n}_x}$$

$$\text{rot } \vec{E}_r = -\frac{\partial \vec{B}_r}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{E}_r = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -E_0 \cos(\omega t - k y) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ k E_0 \sin(\omega t - k y) \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{B}_r}{\partial t} = -k E_0 \sin(\omega t - k y) \vec{n}_y$$

$$\Rightarrow \vec{B}_r = \frac{k}{\omega} E_0 \cos(\omega t - k y) \vec{n}_y$$

$$\boxed{\vec{B}_r = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - k y) \vec{n}_y}$$

$$\text{q: on a bien } \vec{B}_r = \frac{\vec{k}_r \wedge \vec{E}_r}{\omega} = \frac{k \vec{n}_y \wedge (-E_0 \cos(\omega t - k y) \vec{n}_x)}{\omega}$$

$$= \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - k y) \vec{n}_y$$

$$\text{A.8) } \vec{E}_{\text{tot}} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = E_0 \cos(\omega t + k y) \vec{n}_x - E_0 \cos(\omega t - k y) \vec{n}_x$$

$$\alpha \cos(a+b) - \cos(a-b) = -2 \sin a \sin b$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_{\text{tot}} = -2 E_0 \sin k y \sin \omega t \vec{n}_x}$$

$$\vec{B}_{\text{tot}} = \vec{B}_i + \vec{B}_r = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + k y) \vec{n}_y + \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - k y) \vec{n}_y$$

$$\alpha \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}_{\text{tot}} = 2 \frac{E_0}{c} \cos k y \cos \omega t \vec{n}_y}$$

particularité: le champ électromagnétique total est une onde stationnaire: $E_{\text{tot}} = f(y) g(t)$

$$\text{A.9) } \boxed{\vec{E}_{\text{tot}}(y=0) = \vec{0}}$$

$$\boxed{\vec{B}_{\text{tot}}(y=0) = 2 \frac{E_0}{c} \cos \omega t \vec{n}_y}$$

Le plan $y=0$ est un plan nodal pour $\vec{E}_{\text{tot}}$
ventral pour $\vec{B}_{\text{tot}}$
($\vec{B}_{\text{tot}}$ y est maximum)

$\sigma=0$ car condition de passage (cf A.7)

$$\vec{E}_{\text{tot}}(y=0^+) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_y = \vec{0}$$

$$\vec{B}_{\text{tot}}(y=0^+) = 2 \frac{E_0}{c} \cos \omega t \vec{n}_z = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_y$$

relation de passage

$$\vec{n}_y \wedge (\dots)$$

$$\rightarrow \mu_0 \left(\vec{j}_s (\underbrace{\vec{n}_y \wedge \vec{n}_y}_1) - \vec{n}_y (\vec{j}_s / \vec{n}_y) \right) = \mu_0 \vec{j}_s$$

$$= 2 \frac{E_0}{c} \cos \omega t \vec{n}_y \wedge \vec{n}_y = \frac{2 E_0}{c} \cos \omega t \vec{n}_x$$

$$\Rightarrow \vec{j}_s = \frac{2 E_0}{\mu_0 c} \cos \omega t \vec{n}_x$$

$\sigma=0$: la surface du conducteur reste localement neutre. L'onde incidente engendre un courant à la surface du conducteur. Comme les e^- sont mis en mouvement par le champ électrique, il est normal que les courants ainsi créés soient parallèles au champ électrique incident (selon $\vec{n}_x$). Les courants sont à l'origine du champ réfléchi, ce qui explique pourquoi l'onde réfléchie a même fréquence que l'onde incidente.

A.10) densité volumique d'énergie électromagnétique $\mathcal{E} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}$

$$\mathcal{E}_i = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_i^2 + \frac{B_i^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t + ky) + \frac{E_0^2}{2\mu_0 c^2} \cos^2(\omega t + ky)$$

$$\alpha \mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$$

$$\boxed{\mathcal{E}_i = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t + ky)}$$

$$\mathcal{E}_r = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_r^2 + \frac{B_r^2}{2\mu_0}$$

$$\boxed{\mathcal{E}_r = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - ky)}$$

$$\langle \mathcal{E}_i \rangle = \langle \mathcal{E}_r \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2$$

$$A.11) \vec{\Pi}_i = \frac{\vec{E}_i \wedge \vec{B}_i}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t + ky) \underbrace{\vec{n}_x \wedge \vec{n}_z}_{-\vec{n}_y}$$

$$P_i = \vec{\Pi}_i \cdot \underbrace{(-S \vec{n}_y)}_{\text{propagation suivant } -\vec{n}_y}$$

$$P_i = \frac{E_0^2 S}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t + ky)$$

$$\boxed{P_i = \epsilon_0 c E_0^2 S \cos^2(\omega t + ky)}$$

$$\vec{\Pi}_r = \frac{\vec{E}_r \wedge \vec{B}_r}{\mu_0} = -\frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - ky) \underbrace{\vec{n}_x \wedge \vec{n}_z}_{-\vec{n}_y}$$

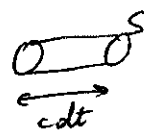
$$P_r = \vec{\Pi}_r \cdot (S \vec{n}_y) \quad (\text{propagation suivant } +\vec{n}_y)$$

$$\boxed{P_r = \epsilon_0 c E_0^2 S \cos^2(\omega t - ky)}$$

$$P_i = \mathcal{E}_i S c$$

$$P_r = \mathcal{E}_r S c$$

C'est logique car $P_i dt$ est l'énergie qui se trouve dans le cylindre de section S et de longueur $c dt$



$$P_i dt = \mathcal{E}_i (S c dt)$$

$$\rightarrow P_i = \mathcal{E}_i S c$$

$$A.12) \langle P_i \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 S$$

$$\langle P_r \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 S$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle P_i \rangle = \langle P_r \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 S}$$

$$\text{car } \langle \cos^2(\omega t - ky) \rangle = \langle \cos^2(\omega t + ky) \rangle = \frac{1}{2}$$

$\langle P_i \rangle = \langle P_r \rangle \rightarrow$ la réflexion s'effectue sans perte d'énergie (OK car épaisseur de paroi nulle $\Rightarrow$ pas de perte par effet Joule)

B) Réflexion de l'onde avec prise en compte de la conductivité du métal :

B.1) $\frac{\gamma}{\delta}$ est sans dimension

$\Rightarrow \delta$ est une longueur en mètre (m)

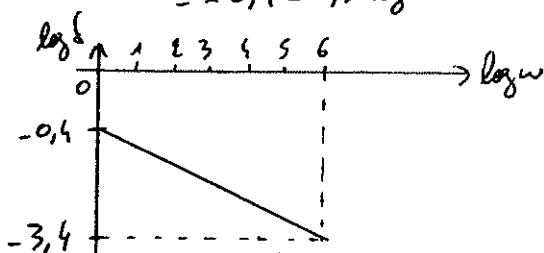
δ est l'épaisseur de peau.

Au-delà d'une profondeur de quelques δ , le champ électromagnétique est quasiment nul dans le conducteur.

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}} = \left(\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega} \right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \log \delta = \frac{1}{2} \log \frac{2}{\mu_0 \gamma} - \frac{1}{2} \log \omega$$

$$= -0,4 - 0,5 \log \omega$$



B.2) Puissance volumique cédée par le champ along à la matière :

$$\frac{dP}{dt} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

loi d'Ohm locale : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$

$$\Rightarrow \frac{dP}{dt} = \gamma E^2 = \gamma \left(\sqrt{2} k \delta E_0 e^{\frac{\gamma}{\delta}} \cos\left(\omega t + \frac{\gamma}{\delta} + \frac{\pi}{4}\right) \right)^2$$

$$= 2 \gamma k^2 \delta^2 E_0^2 e^{\frac{2\gamma}{\delta}} \underbrace{\cos^2\left(\omega t + \frac{\gamma}{\delta} + \frac{\pi}{4}\right)}_{\langle \rangle = \frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{dP}{dt} \right\rangle = \gamma k^2 \delta^2 E_0^2 e^{\frac{2\gamma}{\delta}}$$

$$\langle P_s \rangle = S \int_{-L}^0 \left\langle \frac{dP}{dt} \right\rangle dy$$

$$= S \gamma k^2 \delta^2 E_0^2 \int_{-L}^0 e^{\frac{2\gamma}{\delta}} dy$$

$$\langle P_s \rangle = S \gamma k^2 \delta^2 E_0^2 \frac{1}{2} \left[e^{\frac{2\gamma}{\delta}} \right]_{-L}^0$$

$$= S \gamma k^2 \delta^2 E_0^2 \frac{1}{2} \left(1 - e^{\frac{2\gamma}{\delta}} \right)$$

$0 \ll L \gg \delta$

$$\langle P_s \rangle = \frac{1}{2} S \gamma k^2 \delta^3 E_0^2$$

B.3) $\vec{\Pi}_t = \frac{\vec{E}_t \wedge \vec{B}_t}{\mu_0} = \frac{2\sqrt{2} k \delta E_0^2}{\mu_0 c} e^{\frac{\gamma}{\delta}} \cos\left(\omega t + \frac{\gamma}{\delta} + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\gamma}{\delta}\right)$

$\vec{m}_x \wedge \vec{m}_y$

$$\vec{\Pi}_t(y=0) = \frac{-2\sqrt{2} k \delta E_0^2}{\mu_0 c} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) \cos \omega t \vec{m}_y$$

on $2 \cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$

$$\Rightarrow \vec{\Pi}_t(y=0) = \frac{-\sqrt{2} k \delta E_0^2}{\mu_0 c} \left[\cos\left(2\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + \cos \frac{\pi}{4} \right] \vec{m}_y$$

$\langle \rangle = 0$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\langle \vec{\Pi}_t(y=0) \rangle = \frac{-\sqrt{2} k \delta E_0^2}{\mu_0 c} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \right] \vec{m}_y = \frac{-k \delta E_0^2}{\mu_0 c} \vec{m}_y$$

$$\langle P_t \rangle = \langle \vec{\Pi}_t(y=0) \rangle \cdot (-S \vec{m}_y)$$

$\uparrow$ propagation orient $\vec{m}_y$

$$\Rightarrow \langle P_t \rangle = S \frac{k \delta E_0^2}{\mu_0 c}$$

$$\langle P_t \rangle = \frac{S k \delta E_0^2}{\mu_0 c}$$

$$\langle P_s \rangle = \frac{1}{2} S \gamma k^2 \delta^3 E_0^2$$

$$= \frac{1}{2} S \gamma k k \delta \delta^2 E_0^2$$

$$= \frac{1}{2} S \cancel{\gamma} k \frac{\cancel{c}}{c} \delta \frac{\cancel{c}}{\mu_0 \cancel{\gamma} \omega} E_0^2$$

$$= \frac{S k \delta E_0^2}{\mu_0 c}$$

$$\langle P_t \rangle = \langle P_s \rangle$$

la puissance moyenne $\langle P_t \rangle$ rayonnée par l'onde transmise à travers S en $y=0$ est dissipée par effet Joule dans le conducteur dans le cylindre de section S et de longueur L ($L \gg \delta$).

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}} \quad \left(\begin{array}{l} \omega \text{ finie} \\ \gamma \rightarrow \infty \end{array} \right) \Rightarrow \delta \rightarrow 0$$

$\Rightarrow$ pas d'onde transmise, on retrouve le cas du conducteur parfait étudié dans la partie A)

B-4) on a ici un modèle volumique pour les distributions de charges et de courants $\Rightarrow$ continuité du champ électromagnétique.

$$\Rightarrow (\vec{E}_i + \vec{E}_r)_{y=0^+} = \vec{E}_t(y=0^-)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{E}_r(y=0) &= \vec{E}_t(y=0) - \vec{E}_i(y=0) \\ &= \sqrt{2} k \delta E_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) \vec{u}_x - E_0 \cos \omega t \vec{u}_x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_r = E_0 \left[\sqrt{2} k \delta \cos\left(\omega t - ky + \frac{\pi}{4}\right) - \cos(\omega t - ky) \right] \vec{u}_x$$

$$\vec{B}_r = \frac{\vec{k}_r \wedge \vec{E}_r}{\omega} = \frac{\vec{u}_y \wedge \vec{E}_r}{c}$$

$$\vec{B}_r = \frac{\vec{u}_y \wedge \vec{u}_x}{c} E_0 \left[\sqrt{2} k \delta \cos\left(\omega t - ky + \frac{\pi}{4}\right) - \cos(\omega t - ky) \right]$$

$$\Rightarrow \vec{B}_r = -\frac{E_0}{c} \left[\sqrt{2} k \delta \cos\left(\omega t - ky + \frac{\pi}{4}\right) - \cos(\omega t - ky) \right] \vec{u}_z$$

$$\text{B.5) } \vec{\Pi}_R = \frac{\vec{E}_r \wedge \vec{B}_r}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \left(\begin{array}{l} \sqrt{2} k \delta \cos\left(\omega t - ky + \frac{\pi}{4}\right) \\ - \cos(\omega t - ky) \end{array} \right) \vec{u}_x \wedge \vec{u}_z$$

$$\vec{\Pi}_R = \frac{-E_0^2}{\mu_0 c} \vec{u}_y \left(2k^2 \delta^2 \cos\left(\omega t - ky + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} k \delta \left[\cos\left(\omega t - ky + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\omega t - ky\right) \right] \right)$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{\Pi}_R \rangle &= -\frac{E_0^2}{\mu_0 c} \vec{u}_y \left(\cancel{2k^2 \delta^2} - \sqrt{2} k \delta \left[0 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right] + \frac{1}{2} \right) \\ &= -\frac{E_0^2}{2\mu_0 c} (1 - 2k\delta) \vec{u}_y \end{aligned}$$

$$\langle P_R \rangle = \langle \vec{\Pi}_R \rangle \cdot \left(\begin{array}{l} +S\vec{u}_y \\ \uparrow \\ \text{propagation selon } +\vec{u}_y \end{array} \right)$$

$$\langle P_R \rangle = \frac{S E_0^2}{2\mu_0 c} (1 - 2k\delta)$$

$$\text{B-6) } \langle P_i \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 S = \frac{S E_0^2}{2\mu_0 c} \quad (\text{cf A-10})$$

$$\langle P_t \rangle = \frac{S k \delta E_0^2}{\mu_0 c} \quad (\text{cf B-3})$$

$$\Rightarrow \langle P_R \rangle = \langle P_i \rangle - \langle P_t \rangle$$

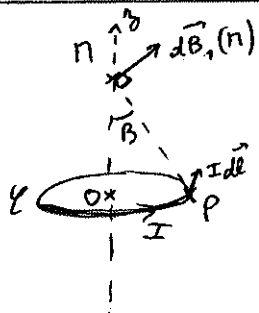
$$\Rightarrow \langle P_i \rangle = \langle P_R \rangle + \langle P_t \rangle$$

Ceci traduit la conservation de l'énergie.

DEUXIEME PARTIE: Etude d'une bobine inductive,

facteur de qualité d'un circuit résonant

A) ETUDE D'UNE BOBINE PLATE:



A.1) D'après la loi de Biot et Savart,

$$d\vec{B}_1(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

A.2) Tout plan contenant l'axe (Oz) est plan d'antisymétrie de la distribution de courant.

$\Rightarrow$ en $P \in (Oz)$, $\vec{B}_1(P)$ est porté par $\vec{u}_z$
(car $\vec{B}$ est un pseudo-vecteur)

$$\vec{B}_1(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \oint d\vec{l} \wedge \vec{r}$$

or $\sin \beta = \frac{R}{r} \Rightarrow r = \frac{R}{\sin \beta}$

$\vec{B}_1(P)$ est porté par $\vec{u}_z \Rightarrow \vec{B}_1(P) = B_{1z} \vec{u}_z$

avec $B_{1z} = \vec{B}_1(P) \cdot \vec{u}_z$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3} \sin^3 \beta \left(\oint d\vec{l} \wedge \vec{r} \right) \cdot \vec{u}_z$$

$$\vec{u}_z = \frac{\vec{r}}{r} \Rightarrow = \frac{\mu_0 I \sin^3 \beta}{4\pi R^3} \oint (d\vec{l} \wedge \vec{r}) \cdot \vec{u}_z$$

$(d\vec{l} \wedge \vec{r}) \cdot \vec{u}_z \stackrel{\text{permutation circulaire}}{=} (\vec{r} \wedge \vec{u}_z) \cdot d\vec{l} = r \sin \beta dl$
 $= R dl$
 $= R^2 d\theta$

$$\Rightarrow \vec{B}_1(P) = \frac{\mu_0 I \sin^3 \beta}{4\pi R^3} \int_0^{2\pi} R^2 d\theta \vec{u}_z$$

$$\vec{B}_1(P) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \beta \vec{u}_z$$

en O, $\beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{B}_1(O) = \frac{\mu_0 I}{2R} \vec{u}_z$

A.3) on a N spires sur une largeur $(R_2 - R_1)$ on a dN sur dr

$$dN = \frac{N dr}{R_2 - R_1}$$

$$d\vec{B}(O) = dN \frac{\mu_0 I}{2r} \vec{u}_z$$

$$\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 N I}{2(R_2 - R_1)} \int \frac{dr}{r} \vec{u}_z$$

A.4) $\vec{B}(O) = \int_{R_1}^{R_2} d\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 N I}{2(R_2 - R_1)} \ln \frac{R_2}{R_1} \vec{u}_z$

$$\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 N I}{2(R_2 - R_1)} \ln \frac{R_2}{R_1} \vec{u}_z$$

A.5) AN: $B(O) = 6 \mu T$

A.6) Le plan (Oxy) est plan de symétrie de la distribution de courant. Donc en $P \in (Oxy)$ $\vec{B}(P) \perp$ à ce plan (car $\vec{B}$ pseudo-vecteur)

$\Rightarrow$ en $P \in (Oxy)$, $\vec{B}(P) = B(P) \vec{u}_z$

flux à travers une spire de rayon r: $\iint B(P) r' dr' d\theta$ ce qui a invariance de la distribution de courant par rotation autour de $(Oz) \Rightarrow B(\theta)$

$\Rightarrow \text{flux} = 2\pi \int_0^r B r' dr'$

flux à travers les dN spires comprises entre r et $r+dr$:

$$d\phi = dN \cdot 2\pi \int_0^r B_{\theta}' dr'$$

$$\text{or } dN = \frac{N}{R_2 - R_1} dr$$

$$\Rightarrow d\phi = \frac{2\pi N}{R_2 - R_1} dr \int_0^r B_{\theta}' dr'$$

flux propre $\phi = \int d\phi$

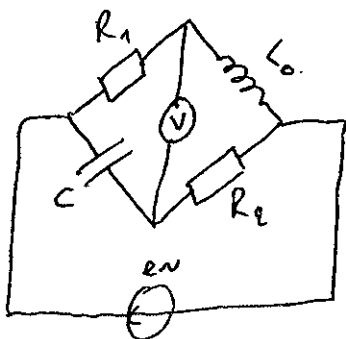
$$\phi = \frac{2\pi N}{R_2 - R_1} \int_{R_1}^{R_2} \int_0^r B_{\theta}' dr' dr$$

$$\phi = L_0 I \Rightarrow L_0 = \frac{2\pi N}{I(R_2 - R_1)} \int_{R_1}^{R_2} \int_0^r B_{\theta}' dr' dr$$

L_0 ne dépend pas de la valeur de I .

En effet, d'après la loi de Biot et Savart, B est proportionnel à I .

A.7) montage permettant de mesurer L_0 : pont de Maxwell



Quand le pont est équilibré ($V=0$),

$$\text{on a } R_1 R_2 = j\omega L_0 \frac{1}{j\omega C}$$

$$\Rightarrow L_0 = R_1 R_2 C$$

$\Rightarrow$ connaissant R_1, R_2 et C ,

on en déduit L_0 .

B) BOBINE REELLE, CIRCUIT RESONANT:

B.1) $i(t) \Rightarrow \vec{B}(t) \Rightarrow$ le conducteur est placé dans

$\vec{B}(t) \Rightarrow$ apparaissent des courants dans le conducteur, qui créent eux-mêmes un champ

magnétique induit $\Rightarrow$ le flux magnétique, donc l'inductance, est changée.

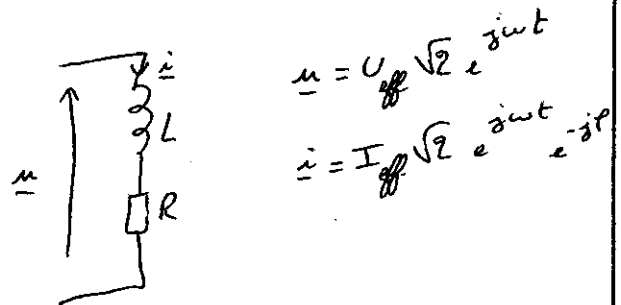
B.2) L'inductance de la bobine augmente quand on y introduit un noyau de fer.

$$L > L_0 \quad (\text{car } \mu_r > 1 \Rightarrow \mu > \mu_0)$$

$$\text{B.3)} \quad P_{\text{eff}} = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi$$

P_{eff} dépend de la position de la bobine par rapport à la pièce. En effet, I_{eff} et φ dépendent de L . (cf B.4)).

B.4)



loi des mailles: $\underline{u} = (R + j\omega L) \underline{i}$

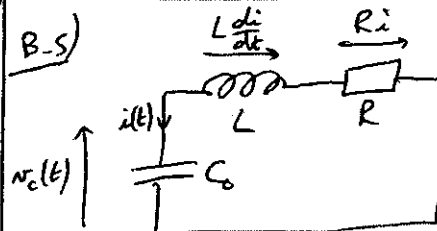
$$\Rightarrow U_{\text{eff}} = (R + j\omega L) I_{\text{eff}} e^{-j\varphi}$$

$$R + j\omega L = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} e^{j\varphi} = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} (\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

$$\Rightarrow R = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} \cos \varphi$$

$$L = \frac{U_{\text{eff}}}{\omega I_{\text{eff}}} \sin \varphi$$

B.5)



loi des mailles: $u_c + L \frac{di}{dt} + Ri = 0$

+ $i = C_0 \frac{dv_c}{dt}$ (convention récepteur)

$$\Rightarrow v_c + L C_0 \frac{d^2 v_c}{dt^2} + R C_0 \frac{dv_c}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 v_c}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_c}{dt} + \frac{1}{L C_0} v_c = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 v_c}{dt^2} + 2m\omega_0 \frac{dv_c}{dt} + \omega_0^2 v_c = 0$$

on dérive la loi des mailles par rapport au temps :

$$\frac{dv_c}{dt} + L \frac{di}{dt^2} + R \frac{di}{dt} = 0$$

$$\frac{i}{C_0} \Rightarrow \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{L C_0} i = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 i}{dt^2} + 2m\omega_0 \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0$$

B.6) équation caractéristique: $r^2 + 2m\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$

$$\Delta = 4m^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2(m^2 - 1) < 0$$

$$r = \frac{-2m\omega_0 \pm j\sqrt{4\omega_0^2(1-m^2)}}{2}$$

$$r = -m\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-m^2}$$

$$\Rightarrow v_c = \left[A \cos[\omega_0\sqrt{1-m^2}t] + B \sin[\omega_0\sqrt{1-m^2}t] \right] \times e^{-m\omega_0 t}$$

à $t=0^-$, $v_c(0^-) = U_0$

et on a continuité de la tension aux bornes d'un condensateur (continuité de l'énergie $\frac{1}{2} C_0 v_c^2$)

$$\Rightarrow U_0 = v_c(0^+) = A \Rightarrow A = U_0$$

$$\text{or } i = C_0 \frac{dv_c}{dt}$$

$$\Rightarrow i(t=0^+) = C_0 \left[B\omega_0\sqrt{1-m^2} + A(-m\omega_0) \right]$$

et $i(t=0^-) = 0$ (Court)

$= i(t=0^+)$ on continuité courant traversant bobine (continuité de $\frac{1}{2} Li^2$)

$$\Rightarrow B\sqrt{1-m^2} = A_m \Rightarrow B = U_0 \frac{m}{\sqrt{1-m^2}}$$

$$\Rightarrow v_c = \left[U_0 \cos[\omega_0\sqrt{1-m^2}t] + \frac{U_0 m}{\sqrt{1-m^2}} \sin[\omega_0\sqrt{1-m^2}t] \right] \times e^{-m\omega_0 t}$$

$$i = C_0 \frac{dv_c}{dt} = C_0 U_0 e^{-m\omega_0 t} \left[-\omega_0\sqrt{1-m^2} \sin[\omega_0\sqrt{1-m^2}t] \right]$$

$$+ \frac{m}{\sqrt{1-m^2}} \omega_0 U_0 \cos[\omega_0\sqrt{1-m^2}t]$$

$$- m\omega_0 \cos[\omega_0\sqrt{1-m^2}t] - \frac{m^2\omega_0}{\sqrt{1-m^2}} \sin[\omega_0\sqrt{1-m^2}t]$$

$$i = -C_0 U_0 e^{-m\omega_0 t} \omega_0 \left(\sqrt{1-m^2} \frac{m}{\sqrt{1-m^2}} \right) \sin[\omega_0\sqrt{1-m^2}t]$$

$$i = -\frac{C_0 U_0 \omega_0}{\sqrt{1-m^2}} e^{-m\omega_0 t} \sin[\omega_0\sqrt{1-m^2}t]$$

B.7)

$$+T_1: \text{pseudo-période } T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-m^2}} \quad (1)$$

$$+ \frac{I_2}{I_1} = e^{-m\omega_0 N T_1} \Rightarrow m\omega_0 = \frac{1}{N T_1} \ln \frac{I_1}{I_2} \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{\omega_0 m \sqrt{\frac{1}{m^2}-1}} = \frac{2\pi N T_1}{\ln \frac{I_1}{I_2} \sqrt{\frac{1}{m^2}-1}}$$

$$\sqrt{\frac{1}{m^2}-1} = \frac{2\pi N}{\ln \frac{I_1}{I_2}} \Rightarrow \frac{1}{m^2} = 1 + \frac{4\pi^2 N^2}{\left(\ln \frac{I_1}{I_2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow m = \left(1 + \frac{4\pi^2 N^2}{\left(\ln \frac{I_1}{I_2}\right)^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (a)$$

$$L = \frac{1}{\omega_0^2 C_0} \quad (c)$$

$$R = 2m\omega_0 L \quad (d)$$

$$(2) \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{m N T_1} \ln \frac{I_1}{I_2} \quad (b) \text{ cf graph: } \frac{I_1}{I_2} = 7$$

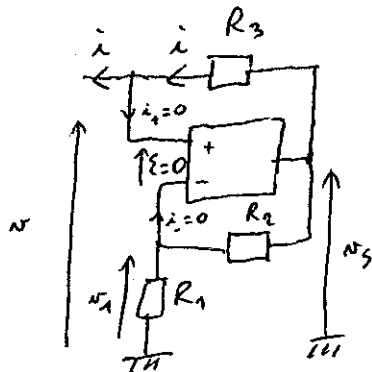
$$(a) \Rightarrow m = 0,1 \quad (b) \Rightarrow \omega_0 = 2 \cdot 10^4 \text{ rad.s}^{-1} \quad (c) \Rightarrow L = 0,2 \text{ H} \quad (d) \Rightarrow R = 6 \cdot 10^{-2} \Omega$$

TROISIEME PARTIE: Etude d'un détecteur de métal

A) ETUDE D'UN OSCILLATEUR:

A-1) AO idéal $\Rightarrow i_+ = i_- = 0$

* boucle de rétroaction entre sortie et entrée inverseuse
 $\Rightarrow$ régime linéaire $\Rightarrow V_+ = V_-$



on a $V = V_1$ ($V_+ = V_-$)

tension aux bornes de R_3 : $V_5 - V = R_3 i$

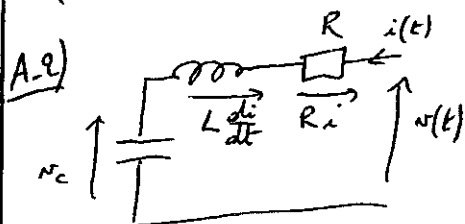
division de tension: $V_1 = V = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_5$
 $(i_- = 0)$

$$\Rightarrow V_5 = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V - V = R_3 i$$

$$\Rightarrow \boxed{V(t) = \frac{R_1 R_3}{R_2} i(t)}$$

(on reconnaît le montage à résistance négative)



* loi des mailles: $V = V_c + L \frac{di}{dt} + R_1 i$

$$* i = C_0 \frac{dV_c}{dt} = \frac{R_1 R_3}{R_2} i$$

conversion récepteur

on dérive la loi des mailles par rapport au temps:

$$\frac{R_1 R_3}{R_2} \frac{di}{dt} = \frac{i}{C_0} + L \frac{d^2 i}{dt^2} + R_1 \frac{di}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 i}{dt^2} + \left(\frac{R}{L} - \frac{R_1 R_3}{R_2 L}\right) \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC_0} i = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\omega_0(m - m') \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0}$$

A-3) * $m' < m \Rightarrow 2\omega_0(m - m') > 0$

alors on a amortissement $\Rightarrow$ système stable

(3 cas possibles: aperiodique convergent, aperiodique critique convergent, pseudo-periodique amorti)

* $m' > m \Rightarrow 2\omega_0(m - m') < 0$

alors on a amplification $\Rightarrow$ système instable

(3 cas possibles: aperiodique divergent, aperiodique critique divergent, pseudo-periodique amplifié)

L'amplitude des oscillations sera dans ce cas limitée par la saturation de l'AO.

$$* m' = m : \frac{d^2 i}{dt^2} + \omega_0^2 i = 0$$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique.

On aura alors des oscillations sinusoïdales dans le circuit. C'est l'oscillateur quasi-sinusoïdal à résistance négative.

La condition $m = m'$ est réalisable en choisissant correctement la valeur de R_3 (c'est pourquoi R_3 est réglable): $R_3 = \frac{R R_1}{R_2}$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \omega_0^2 i = 0 \Rightarrow \text{la pulsation des oscillations}$$

$$\text{est } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_0}} \Rightarrow \boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_0}} = 7,6 \text{ kHz}}$$

$$A-4) f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_0}} \Rightarrow \ln f_0 = -\ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln L - \frac{1}{2} \ln C$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta f_0}{f_0} = -\frac{1}{2} \frac{\Delta L}{L} - \frac{1}{2} \frac{\Delta C}{C} \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta f_0}{f_0} = \frac{1}{2} \frac{\Delta C}{C} = 2,5\%}$$

si pos d'incertitude sur L

B) DETECTEUR DE METAL :

$$\underline{B.1)} \quad V_A = A \underset{\substack{\uparrow \\ \sim V}}{v_{c1}} \underset{\substack{\uparrow \\ \sim V}}{v_{c2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A \text{ en } V^{-1}}$$

$$V = B \underset{\substack{\uparrow \\ \sim V}}{(f - f_o')} \quad \Rightarrow \quad \boxed{B \text{ en } V \cdot \Delta}$$

fréquence en Hz (s^{-1})

$$\underline{B.2)} \quad v_{c1} \approx V_o \cos(\omega_1 t)$$

$$v_{c2} \approx V_o \cos(\omega_2 t + \tau)$$

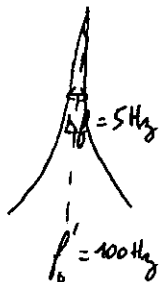
$$V_A \approx A V_o^2 \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t + \tau)$$

$$\approx \frac{A V_o^2}{2} \left[\cos[(\omega_1 + \omega_2)t + \tau] + \cos[(\omega_2 - \omega_1)t + \tau] \right]$$

Après le multiplexeur, on a un signal de fréquence $(f_1 + f_2)$ et un signal de fréquence $(f_2 - f_1) \approx f_o'$.

Le filtre passe-bande sert à éliminer le signal de fréquence $(f_1 + f_2)$ et ne conserve que le signal de fréquence $(f_2 - f_1)$.

$$\text{bande-passante: } \Delta f = \frac{f_o'}{Q'} \approx \frac{100}{20} \approx 5 \text{ Hz}$$



$\Rightarrow$ le signal de fréquence $(f_1 + f_2) \approx 16 \text{ kHz}$ est copié

$\Rightarrow$ le signal à l'entrée du convertisseur fréquence-tension est assimilable à une tension sinusoïdale de fréquence $(f_2 - f_1)$, dès lors que l'écart entre f_1 et f_2 est situé dans la bande passante du filtre.

B.3) Les 2 fréquences f_{10} et f_{20} ont peu de chances d'être identiques car les bobines des 2 circuits n'ont sûrement pas rigoureusement la même inductance (idem pour les capacités) or $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.

On peut ajuster l'écart entre ces 2 fréquences en prenant des capacités réglables.

$$\underline{B.4)} \quad f_{10} \rightarrow f_1 = f_{10} + \Delta f$$

$$f_{20} \rightarrow f_2 = f_{20} + \Delta f$$

$$f_2 - f_1 = (f_{20} + \Delta f) - (f_{10} + \Delta f) = f_{20} - f_{10}$$

$$V_c = B(f - f_o') = B((f_2 - f_1) - (f_{20} - f_{10})) = 0$$

$\Rightarrow$ pas d'influence sur la sortie du montage

$$+ f_o' = f_{20} - f_{10} = 7653 - 7516 = 137 \text{ Hz}$$

$$f = f_2 - f_1 = f_{20} - (f_{10} - \Delta f) = f_o' + \Delta f = 142 \text{ Hz}$$

$$\Rightarrow f - f_o' = \Delta f = 5 \text{ Hz}$$

$$V_c = B(f - f_o') = B \Delta f = \boxed{3 V = V_c}$$

B.5) Si l'objet est loin du détecteur, $V_c = 0$

Si l'objet est + proche de f_1 , $V_c > 0$

f_2 , $V_c < 0$

