

Ouverture à la physique des instabilités

Solution proposée par JR Seigne MP, Clemenceau Nantes

1. Étude d'une instabilité paramétrique

1.I. Origine physique de l'instabilité

1.I.A. Approche qualitative

1. L'énergie emmagasinée par le condensateur est donnée par $U_{el} = \frac{q^2}{2C}$ où C est la capacité du condensateur plan utilisé. On sait, par ailleurs, que $C = \frac{\epsilon_0 S}{e(t)}$ d'où l'expression $U_{el} = \frac{q^2(t)}{2\epsilon_0 S} e(t)$. Avec l'hypothèse d'une variation de l'épaisseur $e(t)$ instantanée et donc de valeur constante de $q(t)$ au cours de l'opération, on trouve aisément que $\Delta U_{el} = \frac{q^2(t)}{\epsilon_0 S} \Delta e$. En utilisant $C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{e_0}$, on arrive à : $\Delta U_{el} = \frac{q^2(t)}{C_0} \epsilon$.

2. Si $q(t) = 0$, il n'y a pas de variation d'énergie. L'opération de modification de l'épaisseur du condensateur est neutre du point de vue énergétique aussi bien pour le système que pour l'opérateur extérieur. Par exemple, lorsqu'on éloigne une armature de l'autre, il faut lutter contre la force électrostatique attractive qui existe entre elles.

3. Le système a reçu de l'énergie lorsqu'entre les points A et B , on a augmenté l'épaisseur du condensateur. Synchroniser la diminution de l'épaisseur (CD) avec le moment où $q(t) = 0$ permet d'éviter de perdre l'énergie gagnée précédemment. À Chaque passage de e_{min} à e_{max} , on gagne l'énergie $\Delta U_{el} = \frac{q_{max}^2}{C_0} \epsilon$ et à chaque passage de e_{max} à e_{min} , on a $\Delta U_{el} = 0$. Le système gagne de l'énergie constamment.

4. La représentation de la courbe d'énergie est effectuée sur la figure 1. Ce diagramme peut être discuté car l'hypothèse $q(t)$ invariable lors de l'évolution de l'épaisseur est discutable. L'apport d'énergie se traduit par un apport de charges. L'énergie maximale du système croît de façon régulière, ce qui peut être à l'origine d'une instabilité.

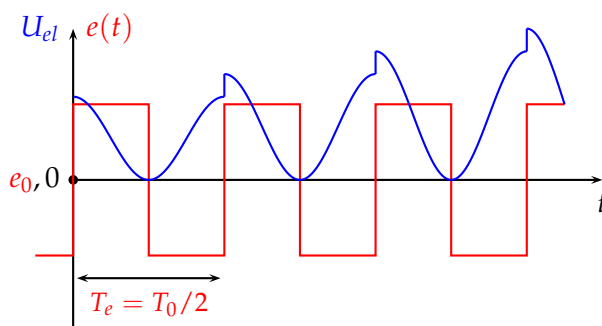


FIG. 1 – Évolution de l'énergie lorsque $T_e = T_0/2$

5. Lorsque $T_e = T_0$, le passage de e_{min} à e_{max} s'effectue lorsque $q(t) = q_{max}$. Il y a un gain d'énergie de $\Delta U_{el} = \frac{q_{max}^2}{C_0} \epsilon$. Par contre à mi-période, lorsque s'effectue le passage de e_{max} à e_{min} la charge est $q(t) = -q_{max}$ et la variation d'énergie sera donc : $\Delta U_{el} = -\frac{q_{max}^2}{C_0} \epsilon$. On perd ce que l'on a gagné lorsque de la précédente évolution de l'épaisseur du condensateur. La représentation de l'évolution de $U_{el}(t)$ est donnée sur la figure 2.

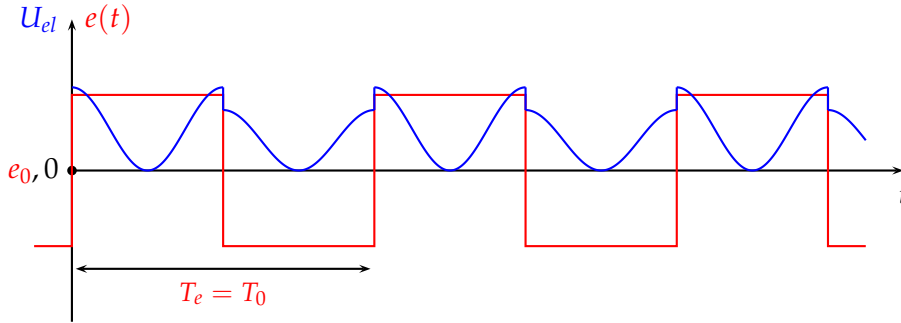


FIG. 2 – Évolution de l'énergie lorsque $T_e = T_0$

Lorsque la période de l'excitation est $T_e = 3T_0/2$, on constate que le passage de e_{min} à e_{max} s'effectue toujours avec le gain d'énergie puisque ce passage s'effectue soit lorsque $q = q_{max}$ soit lorsque $q = -q_{max}$. Par contre, le passage de e_{max} à e_{min} s'effectue lorsque $t = 3T_0/4$ (par exemple), moment où la charge est nulle. Il n'y a donc pas de perte d'énergie à ce moment-là. On peut faire les mêmes réserves qu'à la question précédente car l'énergie augmentant au fur et à mesure, on ne passe pas tout à fait à 0 pour la charge lors de la diminution de l'épaisseur. La représentation de l'évolution de l'énergie du condensateur est effectuée sur la figure 3.

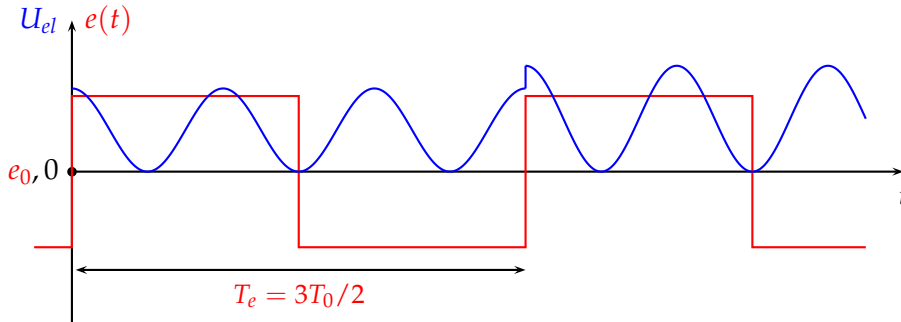


FIG. 3 – Évolution de l'énergie lorsque $T_e = 3T_0/2$

1.I.B. Mise en œuvre expérimentale

6. La tension aux bornes du condensateur est $u(t) = \frac{q}{C}$. L'intensité $i = \frac{dq}{dt}$ est celle représentée en convention récepteur par rapport à $u(t)$. Dans ces conditions, la loi des mailles donne $u_s = \frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} + ri$. Le circuit multiplieur génère la tension $u_s(t)$ selon $u_s = kU_e \cos(\omega_e t + \pi) \frac{q(t)}{C}$. Avec $\cos(\omega_e t + \pi) = -\cos \omega_e t$, on arrive à l'équation différentielle $L\ddot{q} + r\dot{q} + \frac{q}{C} = -q \frac{kU_e}{C} \cos \omega_e t$. Cette équation s'écrit bien sous la forme proposée par l'énoncé où on identifie logiquement $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $\lambda = \frac{r}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$ et $f = \frac{kU_e}{2}$.

1.II. Instabilité paramétrique du grand encensoir de Saint Jacques de Compostelle

1.II.A. Équation de Mathieu

7. Si on applique la relation de la dynamique dans le référentiel $\mathcal{R}'$, il faut tenir compte des forces d'inertie car ce référentiel n'est pas galiléen. La force d'inertie de CORIOLIS est nulle car $\mathcal{R}'$ est en translation par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ galiléen. Il suffit de prendre en compte la force d'inertie d'entraînement

qui correspond à $-m\mathbf{a}_{ent}(M)$. En raisonnant avec la notion de point coïncident, on voit rapidement que $\mathbf{a}_{ent} = \mathbf{a}_{O'/\mathcal{R}'}$. La relation de la dynamique est donc : $m\mathbf{a}(M) = m\mathbf{g} + \mathbf{T} - m\mathbf{a}_{O'/\mathcal{R}'}$. On a donc : $m\mathbf{a}(M) = mg_0\mathbf{e}_z + \mathbf{T} + mh_0\omega_e^2 \cos \omega_e t \mathbf{e}_z$. On constate donc que tout se passe effectivement comme si on avait affaire à un champ de pesanteur variable au cours du temps : $\boxed{g(t) = g_0 + h_0\omega_e^2 \cos \omega_e t}$.

8. On projette la relation de la dynamique sur le vecteur $\mathbf{e}_\theta$ où l'accélération de M en mouvement circulaire est $a_\theta = \ell\ddot{\theta}$, la chaîne tenant l'encensoir est supposée toujours tendue. On a donc : $m\ell\ddot{\theta} = -mg(t) \sin \theta$ ce qui peut s'écrire : $\ddot{\theta} + \frac{g_0}{\ell} \left[1 + \frac{h\omega_e^2}{g_0} \cos \omega_e t \right] \sin \theta = 0$. On a donc : $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g_0}{\ell}}}$ et $\boxed{f = \frac{h\omega_e^2}{2g_0}}$.

9. Si l'on fait l'approximation des petits mouvements, alors $\theta \simeq \sin \theta$. On obtient l'équation de MATHIEU : $\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 [1 + 2f \cos \omega_e t] \theta = 0}$.

1.II.B. Diagramme de stabilité des solutions

10. On réécrit l'équation différentielle selon : $\ddot{\theta} + \omega_0^2 [1 + 2f \cos 2\omega t] \theta = 0$. Avec la forme de solution $\theta = \theta_0 \exp \mu \omega_0 t \cos(\omega t + \phi)$, on obtient après calcul :

- $\ddot{\theta} = \theta_0 \exp \mu \omega_0 t [(\mu^2 \omega_0^2 - \omega^2) \cos(\omega t + \phi) - 2\mu \omega \omega_0 \sin(\omega t + \phi)]$
- $\theta \cos 2\omega t = \frac{\theta_0}{2} \exp \mu \omega_0 t [\cos(3\omega t + \phi) + \cos(\omega t - \phi)]$

On néglige le terme de pulsation 3ω et on introduit les formules précédentes dans l'équation différentielle. On obtient alors : $[(\mu^2 + 1)\omega_0^2 - \omega^2] \cos(\omega t + \phi) - 2\mu \omega \omega_0 \sin(\omega t + \phi) + \omega_0^2 f \cos(\omega t - \phi) = 0$. Développons les cosinus et sinus, on arrive à :

$$[(\mu^2 + 1 + f)\omega_0^2 - \omega^2] \cos \phi - 2\mu \omega \omega_0 \sin \phi \cos \omega t + \dots \\ \dots + [(-\mu^2 - 1 + f)\omega_0^2 + \omega^2] \sin \phi - 2\mu \omega \omega_0 \cos \phi \sin \omega t = 0$$

Cette équation est nulle $\forall t$ si les coefficients sont nuls. En introduisant la pulsation réduite Ω , on doit avoir les deux relations : $(\mu^2 + 1 + f - \Omega^2) \cos \phi = 2\mu \Omega \sin \phi$ et $(-\mu^2 - 1 + f + \Omega^2) \sin \phi = 2\mu \Omega \cos \phi$. En effectuant le produit membre à membre, on aboutit à la relation : $(\mu^2 + 1 + f - \Omega^2)(\mu^2 + 1 - (f + \Omega^2)) = -4\mu^2 \Omega^2$. Après mise en forme, on obtient la relation demandée : $\boxed{\mu^4 + 2\mu^2(\Omega^2 + 1) + (\Omega^2 - 1)^2 - f^2 = 0}$.

11. L'équation précédente est une équation bicarrée. En raisonnant pour μ^2 dans un premier temps, on voit que le produit des deux racines (a, b) est $ab = (\Omega^2 - 1)^2 - f^2$ et la somme $a + b = -2(\Omega^2 + 1) < 0$. Si le produit des racines est positif, alors les deux racines sont de même signes. Ce signe est forcément négatif puisque la somme l'est. Si $\mu^2 < 0$, alors μ est un imaginaire pur et l'amplitude de θ va rester bornée puisque le facteur $\exp \mu \omega_0 t$ aura pour module 1. Il ne peut y avoir de divergence de l'amplitude et donc de déstabilisation que si $ab < 0$ puisqu'on aura alors forcément une racine positive et une racine négative. La racine positive de va donner deux possibilités réelles pour μ dont l'une sera positive. C'est elle qui sera responsable de la déstabilisation. Il faut donc que : $(\Omega^2 - 1)^2 - f^2 < 0$. On trouve bien la condition $f^2 > f_c^2$ avec $\boxed{f_c^2 = (1 - \Omega^2)^2}$.

12. f et Ω sont des coefficients réels positifs. La condition de déstabilisation est donc : $\boxed{f > |\Omega^2 - 1|}$ ce qui correspond aux deux cas suivants : si $\Omega < 1$ alors $f > 1 - \Omega^2$ et si $\Omega > 1$ alors $f > \Omega^2 - 1$. On peut voir sur la figure 4, le diagramme de stabilité de l'encensoir.

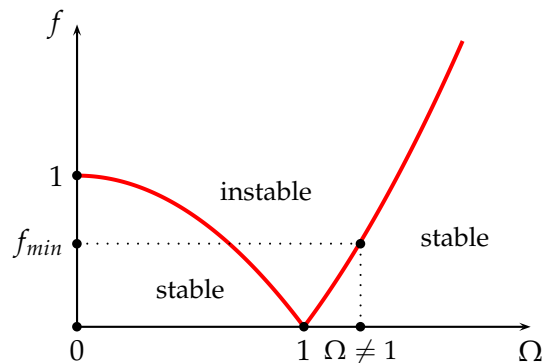


FIG. 4 – Diagramme de stabilité de l'encensoir

13. La résonance se produit pour $\omega = \omega_0$ ou encore $\omega_e = 2\omega_0$, en clair $\Omega = 1$. Nous avons vu que $f = \frac{kU_e}{2}$ ou bien $f = \frac{\omega_e^2 h}{2g_0}$. f est donc proportionnel à l'amplitude de l'excitation à savoir U_e ou h . À la résonance ($\Omega = 1$), on constate que dès que $U_e \neq 0$ ou que $h \neq 0$, on se retrouve dans la zone instable. Par contre, pour $\Omega \neq 1$, en dehors de la résonance, il faut atteindre un f_{min} pour passer en zone instable. Voir le graphique de la figure 4.

14. On est au voisinage de $\Omega = 1$. On a $\Delta\Omega = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \Omega_2 - \Omega_1$ tel que $f = \Omega_2^2 - 1$ et $f = 1 - \Omega_1^2$. On en déduit que $2f = \Omega_2^2 - \Omega_1^2 = (\Omega_1 + \Omega_2)(\Omega_2 - \Omega_1)$. On peut aisément effectuer l'approximation $\Omega_1 + \Omega_2 \simeq 2$. Cela nous permet de conclure que : $f = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$.

15. On a, ici, $\ddot{\theta} = -\omega^2\theta_0 \cos \omega t - 9\omega^2\theta_1 \cos 3\omega t$ mais aussi $2f\omega_0^2 \cos 2\omega t (\theta_0 \cos \omega t + \theta_1 \cos 3\omega t) = f\omega_0^2\theta_0 [\cos 3\omega t + \cos \omega t] + f\omega_0^2\theta_1 [\cos \omega t + \cos 5\omega t]$. On néglige le terme de pulsation 5ω et on utilise ces expressions dans l'équation de MATHIEU. On obtient : $[(\omega_0^2 - \omega^2)\theta_0 + f\omega_0^2(\theta_0 + \theta_1)] \cos \omega t + [(\omega_0^2 - 9\omega^2)\theta_1 + f\omega_0^2\theta_0] \cos 5\omega t = 0$. L'équation étant vérifiée $\forall t$, les coefficients sont nuls. On obtient alors : $f\theta_0 = \theta_1(9\Omega^2 - 1)$. Comme $f \ll 1$ et $\Omega \simeq 1$, on peut alors écrire que : $\theta_1 \simeq \frac{f}{8}\theta_0$. On constate sur cette expression que θ_1 est bien du même ordre que f et aussi par le fait que $\theta_1 \ll \theta_0$ ce qui justifie les calculs effectués avant.

1.II.C. Introduction d'un terme de dissipation

16. Comme le frottement fluide est présenté par l'intermédiaire d'un couple, on reprend la mise en équation du problème en appliquant le théorème du moment cinétique scalaire en O' dans le référentiel $\mathcal{R}'$. La masse de la chaîne de longueur ℓ étant négligeable, le moment cinétique scalaire (sur l'axe $\mathbf{e}_y$) de la masse m est $m\ell^2\dot{\theta}$. Le bras de levier pour le poids étant $\ell \sin \theta \simeq \ell\theta$, le théorème du moment cinétique s'écrit alors : $m\ell^2\ddot{\theta} = -mg_0(1 + 2f \cos 2\omega t)\ell\theta - m\ell^2 2\lambda\omega_0\dot{\theta}$. La nouvelle équation de MATHIEU est donc : $\ddot{\theta} + 2\lambda\omega_0\dot{\theta} + \omega_0^2(1 + 2f \cos 2\omega t)\theta = 0$.

17. Le calcul à réaliser est du même type que celui de la question 10.. Après celui-ci, on obtient une expression de la forme $\alpha_1 \cos \omega t + \beta_1 \sin \omega t = 0$ vraie $\forall t$. Cela ne peut être réalisé que pour $\alpha_1 = 0$ et $\beta_1 = 0$. On obtient alors les deux égalités suivantes : $(\mu^2 + 1 + 2\lambda\mu + f - \Omega^2) \cos \phi = 2(\mu + \lambda)\Omega \sin \phi$ et $(-\mu^2 - 1 - 2\lambda\mu + f + \Omega^2) \sin \phi = 2(\mu + \lambda)\Omega \cos \phi$. Toujours en effectuant le produit membre à membre, on arrive à la relation $f^2 - (\mu^2 + 1 + 2\lambda\mu - \Omega^2)^2 = 4\mu^2\Omega^2 + 4\lambda^2\Omega^2 + 8\mu\lambda\Omega^2$. En développant cette expression sous la forme d'un polynôme de μ , on arrive à : $\mu^4 + 4\lambda\mu^3 + \mu^2[2 + 4\lambda^2 + 2\Omega^2] + \mu[2\lambda + 4\lambda\Omega^2] + 1 + \Omega^4 + (4\lambda^2 - 2)\Omega^2 - f^2 = 0$. On constate que le polynôme précédent possède des coefficients positifs comme 4λ , comme $2 + 4\lambda^2 + 2\Omega^2$ et comme $2\lambda + 4\lambda\Omega^2$. Seul le terme constant est susceptible d'avoir un signe positif ou négatif en fonction de la valeur de f . On en déduit que μ ne peut être un réel positif que si le terme constant $1 + \Omega^4 + (4\lambda^2 - 2)\Omega^2 - f^2$ est négatif. On arrive alors immédiatement à la condition $f^2 > f_c^2$ avec $f_c^2 = (1 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2$ et $f_c > 0$.

18. La dissipation d'énergie diminue forcément la capacité du système à être déstabilisé. On peut donc prévoir que, pour f donné, l'intervalle de pulsation autour de la résonance sera plus grand que dans le modèle sans dissipation. On peut faire l'analogie avec la bande passante d'un filtre passe-bande qui augmente lorsque le facteur de qualité diminue.

19. Pour effectuer le nouveau tracé du diagramme de stabilité, on commence par calculer la dérivée de f_c^2 . On a $\frac{df_c^2}{d\Omega} = 2f_c \frac{df_c}{d\Omega}$. Cette dérivée est donc du signe de $\frac{df_c}{d\Omega} = 4\Omega(\Omega^2 + 2\lambda^2 - 1)$. La fonction est extrémale en 0 et aussi dans le cas où $1 - 2\lambda^2 > 0$ à la valeur $\Omega_{min} = \sqrt{1 - 2\lambda^2}$ car on montre aisément qu'il s'agit d'un minimum. Il faut donc distinguer deux cas : $\lambda < \frac{1}{\sqrt{2}}$ pour lequel la fonction $f_c = \sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}$ est décroissante puis croissante du cas où le facteur d'amortissement est plus grand, $\lambda > \frac{1}{\sqrt{2}}$, pour lequel la fonction est strictement croissante. Dans le premier cas, on a $f_c(\Omega_{min}) = 2\lambda\sqrt{1 - \lambda^2}$. Si l'on effectue $\lambda = 0$ (pas de dissipation), on retrouve bien le cas précédent car alors $f_c(\Omega_{min}) = 0$ et $\Omega_{min} = 1$. Le diagramme de stabilité est fourni sur la figure 5. La zone d'instabilité est toujours située au-dessus de la courbe donnant $f_c(\Omega)$. On constate facilement l'élargissement de la bande de pulsation autour de la résonance (quand elle existe) prévu à la question précédente.

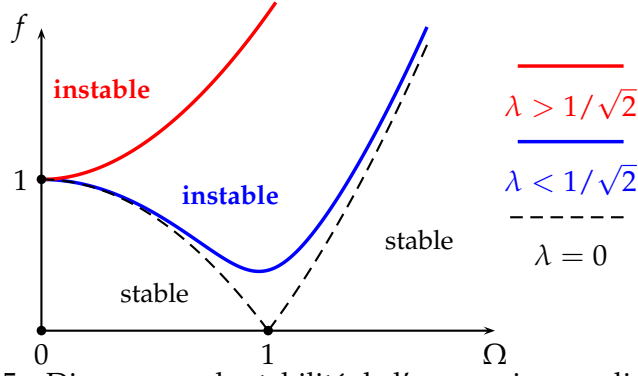


FIG. 5 – Diagramme de stabilité de l'encensoir avec dissipation

2. Étude d'une lampe fer-hydrogène

2.I. Cas où la résistance est indépendante de T

2.I.A. Établissement de l'équation d'évolution

20. On a : $\gamma \simeq 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ et $\lambda \simeq 10^2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

21. La loi de FOURIER est $\mathbf{j}_{cond} = -\lambda \mathbf{grad} T$ alors que la loi d'OHM est $\mathbf{j}_{el} = \gamma \mathbf{E}$. Elle prend une forme analogue à la précédente dans le cas des régimes statiques ou dans l'approximation des régimes quasi-statiques puisqu'alors $\mathbf{E} = -\mathbf{grad} V$.

22. La puissance dissipée par effet JOULE est de la forme RI^2 où R est la résistance électrique du système étudié. Dans notre cas, la section du conducteur est A et sa longueur dx . On a donc $dP_J = \frac{1}{\gamma} \frac{dx}{A} I^2$ et donc une énergie dissipée (travail électrique), pendant la durée dt , de : $\delta^2 W = \frac{1}{\gamma} \frac{dx}{A} I^2 dt$.

23. Le bilan énergétique indique que la variation au cours du temps de l'énergie de la portion de filament comprise entre x et $x + dx$ correspond à la puissance qui entre dans le système par conduction en x à laquelle il faut ajouter la puissance créée (in situ, par effet JOULE) et retirer les puissances qui sortent par conduction en $x + dx$ et par convection. Le bilan écrit en puissance donne : $A dx \mu c \frac{\partial T}{\partial t} = j_{cond}(x, t) A - j_{cond}(x + dx, t) A - h 2\pi a dx (T(x, t) - T_e) + \frac{1}{\gamma} \frac{dx}{A} I^2$. En utilisant la loi de FOURIER, on arrive à l'équation différentielle : $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\mu c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{2\pi h a}{\mu c A} (T - T_e) + \frac{I^2}{\gamma A^2 \mu c}$. On identifie la diffusivité thermique $D = \frac{\lambda}{\mu c}$ et les coefficients prévus par l'énoncé : $\alpha = \frac{2\pi h a}{\mu c A}$ et $\beta = \frac{1}{A^2 \mu c}$. Dans le cas du cylindre à section circulaire, $A = \pi a^2$.

2.I.B. Étude du régime stationnaire

24. En régime indépendant du temps, on a $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$. L'équation différentielle précédente, s'écrit alors $D \frac{d^2 T}{dx^2} = \alpha (T - T_e) - \beta \rho I^2$. On peut réécrire cette équation en introduisant la distance caractéristique du transfert thermique $\delta = \sqrt{\frac{2h}{\lambda a}}$ ou encore telle que $\delta^2 = \frac{\alpha}{D}$. Cela donne : $\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{T}{\delta^2} = -(\frac{T_e}{\delta^2} + \frac{\beta \rho I^2}{D})$. La solution générale d'une telle équation est de la forme $T(x) = A \exp -\frac{x}{\delta} + B \exp \frac{x}{\delta} + T_e + \frac{\beta \rho I^2}{\alpha}$. Le filament est supposé de longueur infinie (ce qui en pratique signifie de très grande longueur devant δ), on doit prendre $B = 0$ pour éviter que la solution diverge. Avec la condition en $x = 0$ où $T = T_e$, on a en utilisant les expressions de α et β la solution suivante : $T(x) = T_e + \frac{\rho I^2}{2\pi^2 h a^3} (1 - \exp -\frac{x}{\delta})$.

25. Le profil de $T(x) - T_e = \frac{\rho I^2}{2\pi^2 h a^3} (1 - \exp -\frac{x}{\delta})$ est tracé à la figure 6. La température limite obtenue est

$$T_\ell = T_e + \frac{\rho I^2}{2\pi^2 h a^3}.$$

26. Par définition du flux thermique de conduction, on a $\phi_{cond} = \iint \mathbf{j}_{cond} \cdot d\mathbf{S}$. À partir de la loi de

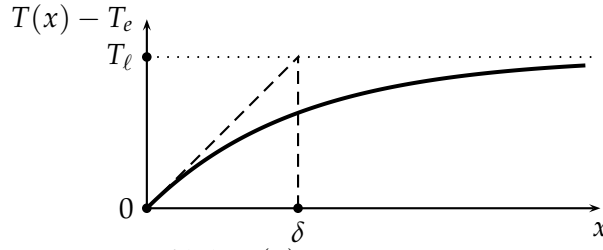


FIG. 6 – Profil de $T(x) - T_e$ en régime stationnaire

FOURIER, on a donc $\phi_{cond} = \pi a^2 \left(-\lambda \frac{dT}{dx} \right)$. Après calcul, on obtient $\phi_{cond} = \frac{\rho I^2}{\pi} \sqrt{\frac{\lambda}{8h^3 a}} \exp -\frac{x}{\delta}$. On constate dans cette formule que le flux de conduction n'est pas constant et qu'il diminue avec x . Ceci est logique avec le profil de température tracé à la question précédente. plus on approche de la température limite T_ℓ , moins il y a d'écart de température sur x . À ce moment-là l'écart entre la température du filament ($\simeq T_\ell$) et la température extérieure T_e est suffisamment grand pour que toute (ou presque) l'énergie dégagée par effet JOULE soit évacuée par la convection latérale.

27. En régime indépendant du temps, l'état du système étudié n'évolue pas. L'entropie étant une fonction d'état, elle ne varie donc pas. On a alors : $dS = 0$ et par conséquent : $\delta^2 S_{ech} = -\delta^2 S_c$.

28. L'énergie thermique transférée en x au système de volume $A dx$, l'est à la température de cette même abscisse $T(x)$. Comme $\delta^2 S_{ech} = \frac{\delta^2 Q}{T_{ext}}$ et que l'extérieur débute à la frontière d'abscisse x , on a donc : $\delta^2 S_{ech}^e = \frac{j_{cond}(x)A}{T(x)} dt$.

29. Pour les transferts thermiques sortant, il faut compter la conduction en $x + dx$ et donc une frontière à la température $x + dx$ et la convection par la surface latérale avec un extérieur à la température T_e . On obtient l'expression : $\delta^2 S_{ech}^s = -\frac{j_{cond}(x+dx)A}{T(x+dx)} dt - \frac{2\pi a dx h (T(x) - T_e)}{T_e} dt$.

30. L'entropie totale échangée est la somme des deux entropies précédentes d'entrée et de sortie et par conséquent l'entropie créée l'opposée de cette somme. En utilisant la loi de FOURIER, on trouve que $\delta S_{ech} = \lambda A dt \left[-\frac{\frac{dT}{dx}|_x}{T(x)} + \frac{\frac{dT}{dx}|_{x+dx}}{T(x+dx)} \right] - \frac{2\pi a h (T(x) - T_e)}{T_e} dx dt$. On en déduit l'expression du taux de création d'entropie par unité de longueur et par unité de temps $\sigma(x) = \lambda A \left[-\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{T} \frac{dT}{dx} \right) \right] + \frac{2\pi a h (T - T_e)}{T_e}$. En calculant la dérivée apparaissant dans le calcul précédent, on obtient l'expression suivante : $\sigma(x) = \lambda A \left[\left(\frac{dT}{dx} \right)^2 \frac{1}{T^2} - \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dx^2} \right] + \frac{2\pi a h (T - T_e)}{T_e}$. Il faut maintenant utiliser l'équation différentielle donnant $T(x)$ pour obtenir l'expression proposée par l'énoncé :

$\sigma(x) = \frac{\rho I^2}{AT} + \frac{\lambda A}{T^2} \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 + \frac{2\pi a h (T - T_e)^2}{T_e T}$. On constate que cette grandeur est toujours positive, ce qui est cohérent avec le caractère irréversible de la transformation qui voit de l'énergie électrique être transformée en énergie interne au profit de l'air ambiant qui entoure le filament.

31. Le première source d'irréversibilité à laquelle on pense ici, est bien sûr l'effet JOULE. Ensuite les inhomogénéités de température dans le filament et l'écart de température avec l'extérieur sont aussi des causes de création d'entropie. La température peut être la même partout dans le cas limite où la conductivité thermique tend vers l'infini.

32. L'état stationnaire du filament serait aussi un état d'équilibre si la température y était la même partout dans le cas où il serait parfaitement calorifugé. S'il ne l'était pas, il faudrait de plus que cette température soit aussi égale à la température extérieure.

33. On aura : $\sigma(x) = \frac{\lambda A}{T^2} \left(\frac{dT}{dx} \right)^2$. D'après le second principe, ce taux de création d'entropie est positif. La conductivité thermique λ qui apparaît dans la loi de FOURIER $\mathbf{j}_{cond} = -\lambda \mathbf{grad} T$ ne peut qu'être positive : $\lambda > 0$. Ceci est heureusement cohérent avec l'observation commune de conduction des corps à température élevée vers ceux à température basse.

34. Si deux corps en contact sont à des températures différentes (T_1 et T_2), on peut voir le taux de création

d'entropie à travers le terme lié à la convection qui prendra alors la forme $\sigma = 2\pi ah \frac{(T_1 - T_2)^2}{T_1 T_2}$. On aurait bien toujours : $\sigma > 0$ dès que $T_1 \neq T_2$.

35. On peut estimer $N \simeq 10^{28} \text{ m}^{-3}$. En effet, la masse volumique d'un métal est de l'ordre de $5 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. La masse molaire peut être estimée vers $50 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ ou $5 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$. Comme une mole est de l'ordre de 10^{23} , on aura donc $N \simeq 10^{23} \times \frac{5 \times 10^3}{5 \times 10^{-2}}$. On a $\tau = \frac{m_e \gamma}{N e^2} \simeq \frac{10^{-30} \times 10^7}{10^{28} \times 10^{-38}}$. On trouve $\tau \simeq 10^{-13} \text{ s}$.

36. Si $\omega \tau \gg 1$ alors la conductivité devient imaginaire et s'écrit $\gamma \simeq \frac{-i\gamma_0}{\omega \tau}$ et comme $\mathbf{j}_{el} = \gamma \mathbf{E}$, $\mathbf{j}$ et $\mathbf{E}$ seront déphasés de $-\pi/2$. Si l'on prend $\mathbf{E} = E_0 \cos \omega t \mathbf{e}_x$ alors on aura $\mathbf{j}_{el} = \frac{\gamma_0}{\omega \tau} E_0 \sin \omega t \mathbf{e}_x$. La puissance volumique dissipée est donnée par $p_{vol} = \mathbf{j}_{el} \cdot \mathbf{E} = \frac{\gamma_0 E_0^2}{2\omega \tau} \sin 2\omega t$. On voit aussitôt que sa moyenne temporelle est nulle : $\langle p_{vol} \rangle = 0$. Il n'y a effectivement plus d'effets dissipatifs à haute fréquence.

37. D'après le second principe de la Thermodynamique, on a $dS = \frac{\delta Q}{T_e} + \delta S_c$. Ce terme peut se réécrire : $dS = \frac{\delta Q}{T} + \left(\delta Q \left(\frac{1}{T_e} - \frac{1}{T} \right) + \delta S_c \right)$. Le terme dû aux irréversibilités internes est : $\delta S_c^{int} = \delta Q \left(\frac{1}{T_e} - \frac{1}{T} \right) + \delta S_c$.

38. Une condition nécessaire pour qu'une transformation soit réversible est que la température de la frontière extérieure soit égale à la température du système : $T_e = T$. Le physicien et chimiste belge d'origine russe ILYA PRIGOGINE (1917-2003) a étudié dans sa thèse les causes d'irréversibilités, c'est vraisemblablement à lui que l'on doit le résultat précédent.

2.II. Cas où ρ dépend de T - Recherche des solutions stationnaires stables

2.II.A. Approche qualitative

39. Si la température est homogène, cela signifie qu'il n'y a pas de conduction thermique. Il n'y a que de la convection. La puissance créée par effet JOULE est dissipée par convection : $\frac{\rho(T) I^2 dx}{A} = 2\pi ah dx (T - T_e)$. On en déduit que $\rho(T) = \frac{2\pi^2 a^3 h}{I^2} (T - T_e)$ et par conséquent : $y(T) = \frac{2\pi^2 a^3 h}{I^2} (T - T_e)$. Ceci est bien l'équation d'une droite de pente $\frac{2\pi^2 a^3 h}{I^2}$ qui sera d'autant plus faible que l'intensité sera grande et d'ordonnée à l'origine $-\frac{2\pi^2 a^3 h}{I^2} T_e$.

40. Les points de fonctionnement correspondent aux intersections de $y(T)$ et de $\rho(T)$ sur le graphique de la figure 7. On a vu que plus l'intensité I était élevée, plus la pente était faible. Comme on peut le constater, si $I > I_a$, il n'y a qu'un seul point de fonctionnement tout comme si $I < I_b$. Pour $I = I_a$ ou $I = I_b$, il y a deux points de fonctionnement et enfin pour $I_b < I < I_a$, on a trois points de fonctionnement.

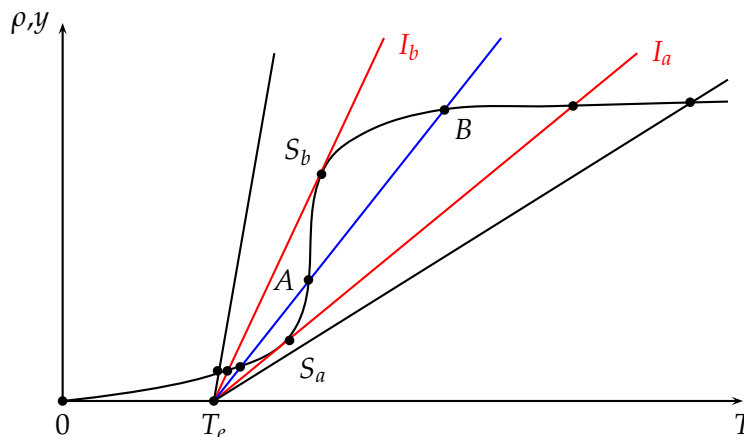


FIG. 7 – Points de fonctionnement

2.II.B. Stabilité des solutions stationnaires

41. On reprend l'équation différentielle $\frac{dT}{dt} = \frac{dc}{dt} = -\alpha(T - T_e) + \beta\rho(T)I^2$. On effectue un développement de TAYLOR : $\rho(T) = \rho(T^*) + \left. \frac{d\rho}{dT} \right|_{T^*} \epsilon$. Comme T^* est la solution stationnaire, elle vérifie $\beta\rho(T^*)I^2 = \alpha(T^* -$

T_e). En utilisant cette relation dans l'équation différentielle de départ, on arrive à $\frac{d\epsilon}{dt} = \beta I^2 \left[\frac{d\rho}{dT} \Big|_{T^*} - \frac{\alpha}{\beta I^2} \right] \epsilon$.

On trouve donc $\kappa = \beta I^2$. On identifie bien les pentes proposées selon : $\tilde{p}(T^*) = \frac{d\rho}{dT} \Big|_{T^*}$ et l'autre pente $p = \frac{\alpha}{\beta I^2}$ qui peut encore s'écrire $p = \frac{2\pi^2 h a^3}{I^2}$.

42. Au vu de la forme de l'équation différentielle de ϵ , on constate qu'il y aura divergence et donc instabilité pour $\tilde{p}(T^*) > p$ et au contraire stabilité si $\tilde{p}(T^*) < p$. Sur le graphique, il faut comparer localement au niveau du point de fonctionnement, la pente de la courbe $\rho(T)$ à celle de la droite $y(T)$. Comme on peut le voir sur le graphique de la figure 7, le point A correspond à un point de fonctionnement instable car la courbe $\rho(T)$ croît beaucoup plus vite que la droite $y(T)$ ($\tilde{p}(T^*) > p$). Au point B, c'est le contraire on voit clairement que $\tilde{p}(T^*) < p$ ce qui permet de dire que B est un point de fonctionnement stable. La zone des points de fonctionnement instables correspond sur le graphique aux points situés sur la courbe $\rho(T)$ compris entre S_a et S_b .

43. Sur le graphique de la figure 8, on voit qu'il y a trois points de fonctionnement entre les points S_a et S_b . L'allure de la courbe est représentée de façon approximative. La zone instable correspond à la zone de rebroussement entre I_a et I_b .

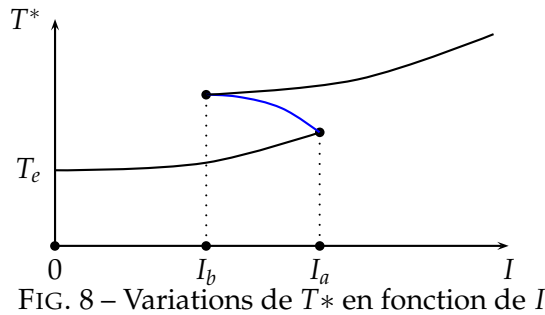


FIG. 8 – Variations de T^* en fonction de I

44. Du fait de leur instabilité, les points de la zone de rebroussement en bleu sur le graphique de la figure 8 ne seront pas observés. Lors de la montée en intensité, on va sauter d'une branche stable à l'autre lorsqu'on va arriver à l'intensité I_a . On verra une trace verticale du spot sur l'écran. Lors de la diminution d'intensité, on verra aussi un segment vertical mais cette fois lorsqu'on atteindra I_b . L'allure de la courbe obtenue est l'allure classique d'un phénomène d'hystérésis. Voir le graphique de la figure 9. Pour observer les propriétés particulières du phénomène, il faut $X > X_a$ et donc pour les intensités, il faut dépasser l'intensité I_a .

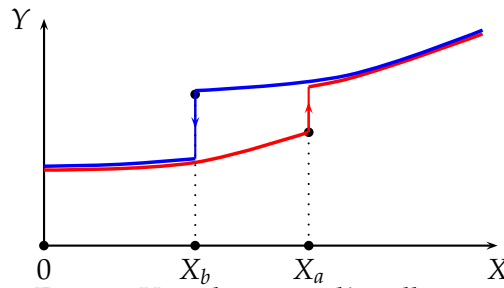


FIG. 9 – Visualisation à l'oscilloscope

2.II.C. Étude à tension imposée

45. On suppose toujours la température uniforme et par conséquent la résistivité ne dépend pas de x . On note ℓ_f la longueur totale du filament. En régime permanent, l'intensité I est la même partout dans le filament. On a toujours la condition $\frac{\rho(T)dx}{A} I^2 = 2\pi ah(T - T_e)dx$ mais il faut faire apparaître la tension à la place de l'intensité dans cette formule. Si U est la tension fournie par le générateur de tension, on peut écrire $\frac{\rho(T)\ell_f}{A} I = U$ toujours avec $A = \pi a^2$. En remplaçant dans la relation traduisant l'équilibre thermique,

on arrive à $\frac{\pi a^2 U^2}{\rho(T) \ell_f^2} = 2\pi a h(T - T_e)$. En poursuivant le calcul, on établit : $\rho(T) = \frac{a U^2}{2h \ell_f^2} \frac{1}{T - T_e} = y'(T)$. Comme on peut le voir sur le graphique de la figure 9, il n'y a qu'un seul point de fonctionnement.

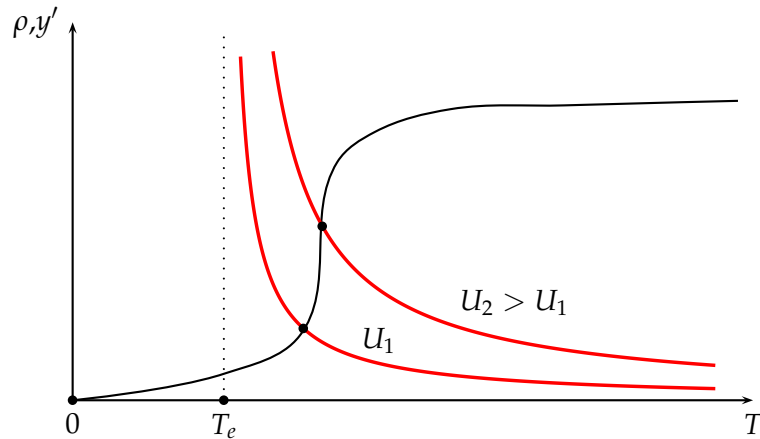


FIG. 10 – Point de fonctionnement à tension constante

46. Le point de fonctionnement est **toujours stable** car si la température T augmente un peu par fluctuation alors $\rho(T)$ augmente et la résistance du filament va augmenter. Cela fait aussitôt diminuer l'intensité puisque la tension d'alimentation U est fixée. La dissipation d'énergie sera moindre, cela va faire baisser la température T . Un raisonnement tout à fait réciproque peut s'effectuer si la température baisse à la suite d'une fluctuation.

3. Instabilité de croissance de Mullins-Sekerka

3.1. Mise en place du problème - Description des conditions aux limites

47. γ possède la dimension d'une pression multipliée par une distance au vu de la formule de LAPLACE. Or, une pression est une force divisée par une surface. La tension superficielle est donc une force par unité de longueur, on a : $\gamma \equiv \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$. On peut encore écrire, en justifiant par la relation de la dynamique, que γ s'exprime en $\text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$.

3.1.A. Relation de Gibbs-Thomson

48. En intégrant la relation de GIBBS-DUHEM aussi bien pour le liquide que le solide, et en supposant que les volumes massiques et les entropies massiques ne varient pas beaucoup dans le domaine de température et de pression étudié, on peut écrire $\mu_s(P^*, T^*) = \mu_s(P_0, T_0) + v_{ms}(P^* - P_0) - s_{ms}(T^* - T_0)$ et

$$\mu_l(P_0, T^*) = \mu_l(P_0, T_0) - s_{ml}(T^* - T_0).$$

49. À l'équilibre, on a $\mu_s(P^*, T^*) = \mu_l(P^*, T^*)$ et aussi $\mu_s(P_0, T_0) = \mu_l(P_0, T_0)$. On peut en déduire que $-v_{ms}(P^* - P_0) = (s_{ml} - s_{ms})(T^* - T_0) = \frac{L}{T_0}(T^* - T_0)$. On utilise alors la loi de LAPLACE et le fait que la masse volumique du solide est l'inverse du volume massique. On obtient la relation : $T^* \simeq T_0 \left(1 - \frac{2\gamma}{\rho R L}\right)$.

50. Le facteur $\frac{2\gamma}{\rho R L}$ doit être sans dimension. L étant en $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$, ρ en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et R en m et sachant que $\text{J} \cdot \text{m}^{-2} \equiv \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$, on retrouve bien le fait que γ est en $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$.

51. Si l'interface est plane alors $R \rightarrow \infty$. La formule démontrée précédemment nous amène à $T^* = T_0$, ce qui correspond bien au cas de l'interface plane proposée dans la présentation du problème.

3.I.B. Bilan d'énergie à la traversée de l'interface

52. La solidification dégage de l'énergie. Il y aura un flux d'énergie du solide vers le liquide puisque celui-ci est sous-refroidi (température inférieure à la température du changement d'état). Le gradient de température va donc du liquide vers le solide.

53. Pendant la durée dt , la masse $\rho AV dt$ change d'état et libère l'énergie $\rho AVL dt$. C'est cette énergie qui explique la discontinuité du flux surfacique de conduction thermique à l'interface entre le liquide et le solide. En effet, le flux surfacique de conduction dans le liquide a pour origine à la fois le flux surfacique de conduction dans le solide mais aussi le terme de production d'énergie liée au changement d'état. On écrit donc que $j_l(z(t)^+)Adt = j_s(z(t^-))Adt + \rho AVL dt$. On a alors : $-\lambda_l \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z(t^+)} + \lambda_s \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z(t^-)} = \rho LV(t)$.

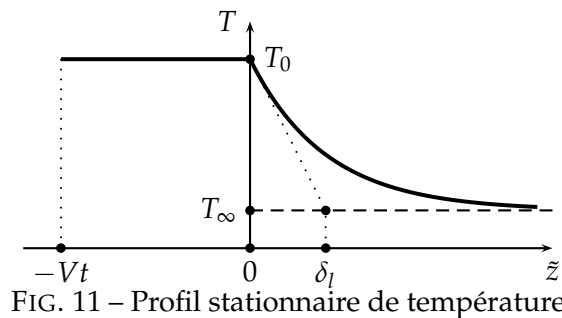
3.II. Recherche de la solution stationnaire

54. La relation de diffusion thermique dans un des deux milieux est de la forme : $\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$. Il faut effectuer le changement de variables $\tilde{z} = z - Vt$ et $\tilde{t} = t$. Le calcul des dérivées obéit à la loi : $\frac{\partial T}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial T}{\partial t} - V \frac{\partial T}{\partial \tilde{z}}$. On trouve $\frac{\partial T}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial T}{\partial t} - V \frac{\partial T}{\partial \tilde{z}}$. De la même façon, on a $\frac{\partial T}{\partial \tilde{z}} = \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \tilde{z}} = \frac{\partial T}{\partial z}$ ce qui conduit à $\frac{\partial T}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial T}{\partial \tilde{z}}$. Cela implique pour la dérivée seconde que $\frac{\partial^2 T}{\partial \tilde{z}^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$. En remplaçant dans l'équation différentielle de diffusion thermique, on obtient : $\frac{\partial T}{\partial \tilde{t}} - V \frac{\partial T}{\partial \tilde{z}} = D_s \text{ ou } l \frac{\partial^2 T}{\partial \tilde{z}^2}$.

55. On se place en régime stationnaire où $\frac{\partial T}{\partial \tilde{t}} = 0$ dans le liquide. On a alors $D_l \frac{d^2 \theta_l}{d\tilde{z}^2} + V \frac{d\theta_l}{d\tilde{z}} = 0$. Par une première intégration, on arrive à $D_l \frac{d\theta_l}{d\tilde{z}} + V\theta_l = \text{Cte}$. En utilisant la condition aux limites lorsque $\tilde{z} \rightarrow \infty$ pour laquelle le gradient de température est nécessaire nul et comme on note T_∞ la température dans ces mêmes conditions, on peut écrire : $D_l \frac{d\theta_l}{d\tilde{z}} + V\theta_l = VT_\infty$. En posant $\delta_l = \frac{D_l}{V}$, on obtient l'équation différentielle $\frac{d\theta_l}{d\tilde{z}} + \frac{\theta_l}{\delta_l} = \frac{T_\infty}{\delta_l}$ qui a pour solution avec $T(\tilde{z} = 0) = T_0$: $\theta_l = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \exp -\frac{\tilde{z}}{\delta_l}$.

56. Si la température vaut T_0 à la fois pour $\tilde{z} = 0$ et pour $\tilde{z} = -Vt$ et si elle n'était pas uniforme, il y aurait forcément au moins un maximum ou au moins un minimum. Par conséquent, il existerait deux flux surfaciques de conduction dans la zone solide qui seraient de sens contraire. Cela obligerait l'existence soit d'un puits soit d'une source d'énergie pour que le régime stationnaire soit possible. Une telle situation n'est pas envisageable : la température dans le solide est uniforme.

57. Le graphique de l'évolution de la température est fourni à la figure 11.



58. δ_l est la longueur caractéristique de l'évolution de la température dans le liquide à partir de l'interface. L'effet de la cristallisation ne se fait sentir que sur quelques δ_l .

59. D'après ce que l'on vient de voir, on a $\lambda_s \left. \frac{\partial T}{\partial \tilde{z}} \right|_{\tilde{z}=0^-} = 0$ et $-\lambda_l \left. \frac{\partial T}{\partial \tilde{z}} \right|_{\tilde{z}=0^+} = \lambda_l \frac{T_0 - T_\infty}{\delta_l}$. On en déduit d'après la relation entre les flux surfaciques de conduction que $\lambda_l \frac{T_0 - T_\infty}{\delta_l} = \rho LV$. En utilisant le fait que $\delta_l = \frac{D_l}{V} = \frac{\lambda_l}{\rho c V}$, on obtient la condition sur le coefficient de sous refroidissement suivante : $\Delta = \frac{c}{L}(T_0 - T_\infty) = 1$.

3.III. Instabilité de forme - Croissance dendritique

60. Le flux surfacique de conduction est perpendiculaire aux isothermes. Voir le tracé sur le graphique de la figure 12.

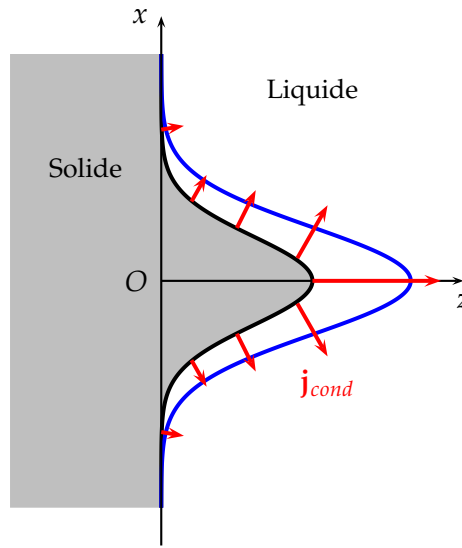


FIG. 12 – Évolution du front de solidification

61. Au niveau du sommet de la perturbation, les isothermes sont beaucoup plus resserrées que sur les bords. Cela signifie que le gradient de température y est plus élevé et que le flux surfacique de conduction aussi. Le liquide, à proximité de la pointe, va se réchauffer plus vite que les autres zones liquides et se retrouver par conséquent plus rapidement à la température de cristallisation qui va donc être provoquée à cet endroit plus tôt qu'ailleurs. Cela amplifie donc le phénomène.

62. Le schéma décrivant l'avancement de l'interface est donné à la figure 12. Il y aura déstabilisation si au cours du temps la perturbation de température est amplifiée. Pour cela, il faut que $\sigma(k) > 0$.

63. On a $\sigma(k) = kV(1 - d_0\delta_l(1+n)k^2)$. L'évolution de ce polynôme est donnée sur le graphique de la figure 13. L'étude de son signe nous amène à voir que $\sigma(k) > 0$ lorsque $k \in]-\infty; -\frac{1}{\sqrt{d_0\delta_l(1+n)}}[$ et aussi pour $k \in]0; \frac{1}{\sqrt{d_0\delta_l(1+n)}}[$. On pose $k_0 = \frac{1}{\sqrt{d_0\delta_l(1+n)}}$.

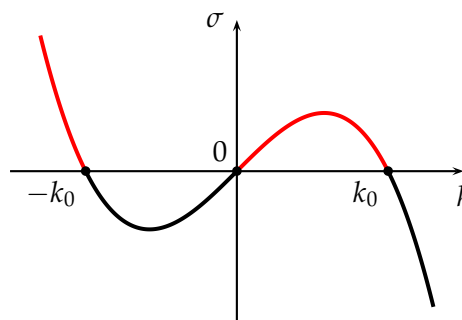


FIG. 13 – Étude du signe de $\sigma(k)$

64. On a posé $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, on raisonnera pour k positif. Pour obtenir la plus petite taille λ_c pouvant se développer lors de la croissance, il faut donc le plus grand vecteur d'onde k dans la zone où $\sigma > 0$. On a donc : $\lambda_c = 2\pi\sqrt{d_0\delta_l(1+n)}$.

65. La capacité thermique massique de l'eau est $c \simeq 4 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, la masse volumique $\rho \simeq 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et la température $T_0 \simeq 3 \times 10^2 \text{ K}$.

66. On trouve : $d_0 = 5 \times 10^{-11} \text{ m}$ et $\delta_l = 2,5 \times 10^{-2} \text{ m}$.

67. On nous suggère de prendre $n \simeq 1$, par conséquent $\lambda_c = 2\pi\sqrt{2}\sqrt{d_0\delta_l}$. On trouve que $\lambda_c \simeq 10^{-5} \text{ m}$, c'est-à-dire de l'ordre de la dizaine de microns.

68. λ_c augmente avec $\sqrt{\gamma}$ et donc augmente avec la tension superficielle. Plus la tension superficielle est élevée, plus il faut d'énergie pour provoquer la dendrite qui correspond à une augmentation de la surface de l'interface solide-liquide, moins cela sera favorable à l'instabilité. C'est cohérent avec le fait que λ_c qui est la taille minimale de la plus petite structure pouvant se développer, sera alors plus grande.