

OSCILLATIONS DE PUISSANCE À HAUTE FRÉQUENCE

Corrigé de Mohamed Elabdallaoui
 Professeur agrégé CPGE Marrakech

I. — Le magnétron, oscillateur hyperfréquence

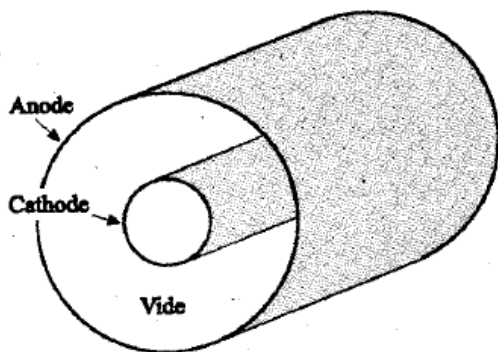


Fig. 1 - Le magnétron vue d'ensemble

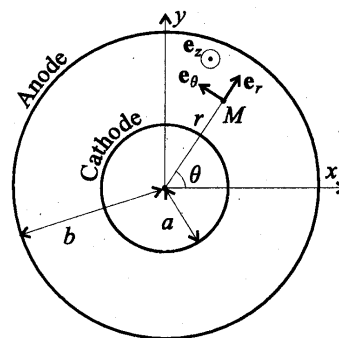


Fig 2

I.A. — Le magnétron sans champ magnétique

□-1 l'équation de Poisson $\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$ et $\rho = 0$ donne $\Delta V = 0$

$$\Delta V = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}V}) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = 0 \Rightarrow \left(r \frac{dV}{dr} \right) = A \Rightarrow \left(\frac{dV}{dr} \right) = \frac{A}{r} \Rightarrow V(r) = A \ln(r) + B$$

$$V(a) = 0 \text{ et } V(b) = V_0 \quad V(r) = V_0 \frac{\ln\left(\frac{r}{a}\right)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

□-2

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V} \Rightarrow \vec{E} = -\frac{V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \frac{1}{r} \vec{e}_r \text{ or } m \frac{d\vec{v}}{dt} = -eE(r) \vec{e}_r \Rightarrow m d\vec{v} = -eE(r) \vec{e}_r dt$$

$$m\vec{v}(t) - m\vec{v}(0) = -\left(\int_0^t eE(r) dt \right) \vec{e}_r$$

Si $\|\vec{v}(0)\| \ll \|\vec{v}(t)\|$ alors $m\vec{v}(t) = -\left(\int_0^t eE(r) dt \right) \vec{e}_r$, la trajectoire est une droite suivant un rayon du cylindre.

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{eV_0}{m \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \frac{1}{r} \Rightarrow 2 \frac{dr}{dt} \frac{d^2 r}{dt^2} = 2 -\frac{eV_0}{m \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \frac{1}{r} \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{d\dot{r}^2}{dt} = 2 -\frac{eV_0}{m \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \frac{d \ln r}{dt} \Rightarrow$$

$$\dot{r}^2 = 2 -\frac{eV_0}{m \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \ln r + Cste$$

Si $r = a$ alors $\dot{r} = 0$ (négligeable) donc $\dot{r}^2 = 2 -\frac{eV_0}{m \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \ln\left(\frac{r}{a}\right) \Rightarrow \dot{r} = \sqrt{\frac{2eV_0}{m \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \ln\left(\frac{r}{a}\right)}$

□- 3 la durée τ du trajet de la cathode à l'anode. On posera $f(u) = \int_1^u \frac{dx}{\sqrt{\ln x}}$

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2eV_0}{m \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \ln\left(\frac{r}{a}\right)} \Rightarrow \frac{dr}{\sqrt{\ln\left(\frac{r}{a}\right)}} = dt \sqrt{\frac{2eV_0}{m \ln\left(\frac{b}{a}\right)}} \text{ On pose } x = \frac{r}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{\ln x}} = \sqrt{\frac{2eV_0}{m \ln\left(\frac{b}{a}\right)}} \frac{dt}{a} \Rightarrow \int_1^{\frac{b}{a}} \frac{dx}{\sqrt{\ln x}} = \sqrt{\frac{2eV_0}{m \ln\left(\frac{b}{a}\right)}} \frac{\tau}{a}$$

$$\Rightarrow \tau = \sqrt{\frac{ma^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2eV_0}} f\left(\frac{b}{a}\right)$$

I.B. - Le magnétron vide, avec un champ magnétique.

□-4

On a $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -eE(r)\vec{e}_r - e\vec{v} \wedge \vec{B}_0$ donc si on multiplie par $\vec{e}_z$ on trouve $m \frac{dv_z}{dt} = 0$ soit $v_z = Cste$

si l'électron est émis au niveau de la cathode sans vitesse initiale alors $v_z = 0$ le mouvement se fait dans le plan xOy .

$-eE(r)\vec{e}_r$ est une force centrale conservative, $-e\vec{v} \wedge \vec{B}_0$ ne travail pas donc l'énergie mécanique Em de cet électron est conservée.

$$\text{on a } -eE(r)\vec{e}_r = \frac{eV_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \frac{1}{r} \vec{e}_r = -\frac{dEp}{dr} \vec{e}_r \Rightarrow Ep = -\frac{eV_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \ln\left(\frac{r}{a}\right) \text{ donc}$$

$$Em = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{eV_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \ln\left(\frac{r}{a}\right)$$

□-5

$$\frac{d\vec{\sigma}_o}{dt} = \underbrace{\overrightarrow{OM} \wedge -eE(r)\vec{e}_r}_{=0} + \overrightarrow{OM} \wedge -e\vec{v} \wedge \vec{B}_0 \Rightarrow \frac{d\vec{\sigma}_o}{dt} = -e \begin{vmatrix} r & \begin{vmatrix} \dot{r} & 0 \\ r\dot{\theta} & 0 \end{vmatrix} \\ 0 & \begin{vmatrix} 0 & B_0 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = -e \begin{vmatrix} r & r\dot{\theta}B_0 \\ 0 & -\dot{r}B_0 \end{vmatrix} = -e \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -r\dot{r}B_0 \end{vmatrix}$$

soit $\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = er\dot{r}B_0\vec{e}_z \Rightarrow \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{er^2B_0}{2}\right)\vec{e}_z \Rightarrow \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{er^2B_0}{2}\right)\vec{e}_z$ or $\vec{\sigma}_O = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z$ donc

$$mr^2\dot{\theta} - \frac{er^2B_0}{2} = Cste = -\frac{ea^2B_0}{2}$$

□-6

en $r = b$ alors $\dot{r} = 0$ le mouvement est impossible si $Em - E_{peff} < 0$ c'est-à-dire

$$\frac{2eV_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} - mb^2\dot{\theta}^2 < 0 \text{ ou } mb^2\dot{\theta}^2 > 2eV_0 \text{ or } mb^2\dot{\theta} = \frac{eb^2B_0}{2} - \frac{ea^2B_0}{2} \Rightarrow B_0 > \sqrt{\frac{2emV_0}{\left(\frac{eb^2}{2b} - \frac{ea^2}{2b}\right)^2}} \text{ et}$$

$$B_C = \sqrt{\frac{8b^2mV_0}{e(b^2 - a^2)^2}}$$

si $b \gg a$; cette relation porte le nom d'équation de HULL.

$$B_C = \sqrt{\frac{8mV_0}{eb^2}}$$

$$\omega = \frac{eB_C}{2m} \left(1 - \frac{a^2}{r_0^2}\right) \Rightarrow \text{si } r_0 = b \gg a \text{ alors } \omega \rightarrow \omega_c = \sqrt{\frac{2eV_0}{mb^2}}$$

I.C. - Le magnétron, avec charge d'espace et champ magnétique

□-7 $mr^2\dot{\theta} - \frac{er^2B_0}{2} = Cste \Rightarrow r^2\left(m\dot{\theta} - \frac{eB_0}{2}\right) = Cste \forall r$ ne peut être réalisé que si $\dot{\theta} = \omega_B = \frac{eB_0}{2m}$

le mouvement est circulaire $\dot{r} = 0$ et $Em = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - eV(r)$ donne

$$V(r) = \frac{m}{2e} \left(\frac{eB_0}{2m}\right)^2 r^2 - \frac{Em}{e} \text{ le potentiel qui règne dans l'espace inter électrode.}$$

Et l'équation de Laplace donne $\frac{m}{2e} \left(\frac{eB_0}{2m}\right)^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial r^2}{\partial r}\right) + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow$

$$\rho = -\frac{2m\epsilon_0}{e} \left(\frac{eB_0}{2m}\right)^2 \neq 0 \text{ Donc on doit tenir compte d'une charge dans l'espace inter-électrode.}$$

□-8

On a $V(r) = \frac{m}{2e} \left(\frac{eB_0}{2m}\right)^2 r^2 - \frac{Em}{e}$ avec $V(a) = 0$ et $V(b) = 0 \Rightarrow V(r) = \frac{V_0}{b^2 - a^2} (r^2 - a^2)$

Autre méthode $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -eE(r)\vec{e}_r - e\vec{v} \wedge \vec{B}_0$

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -eE - er\dot{\theta}B_0 \\ m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = erB_0 \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -eE - er\dot{\theta}B_0 \Rightarrow mr\omega_B^2 - er\omega_B B_0 = eE \Rightarrow \frac{m}{e}r\omega_B^2 - r\omega_B B_0 = E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow$$

$$V(r) = \frac{1}{2} \left(\omega_B B_0 - \frac{m}{e} \omega_B^2 \right) r^2 + Cste$$

Les conditions aux limites $\frac{1}{2} \left(\omega_B B_0 - \frac{m}{e} \omega_B^2 \right) a^2 + Cste = 0$ et $\frac{1}{2} \left(\omega_B B_0 - \frac{m}{e} \omega_B^2 \right) b^2 + Cste = V_0$

$$V(r) = V_0 \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2}$$

$$\frac{1}{2} \left(\omega_B B_0 - \frac{m}{e} \omega_B^2 \right) (b^2 - a^2) = V_0 \Rightarrow B_0 = B_B = \frac{m\omega_B}{e} + \frac{2V_0}{(b^2 - a^2)\omega_B}$$

□-9

Si $r \gg a$ alors (toujours le mouvement est circulaire et $Em(t=0) = 0$)

$$\begin{aligned} Em &\approx \frac{1}{2} m(r^2 \omega_B^2) - eV_0 \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \\ &\approx \frac{1}{2} m(r^2 \omega_B^2) - eV_0 \frac{r^2}{b^2} \\ &= r^2 \left(\frac{1}{2} m\omega_B^2 - \frac{eV_0}{b^2} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Possible si $\omega_B = \sqrt{\frac{2eV_0}{mb^2}}$ et $B_B = \sqrt{\frac{8mV_0}{eb^2}}$

□-10
$$V_0 = \frac{mb^2 \omega_B^2}{2e} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 25 \cdot 10^{-6} \cdot (2,3, 14,2, 45 \cdot 10^9)^2}{2,1, 6 \cdot 10^{-19}} = 16,83 \text{ kV}$$

$$B_B = \frac{2m}{e} \omega_B = \frac{2,9, 1 \cdot 10^{-31} \cdot 2,3, 14,2, 45 \cdot 10^9}{1, 6 \cdot 10^{-19}} = 0,175 \text{ T}$$

Soit quatre milles fois le champ magnétique terrestre.

II.A. - Étude du faisceau d'électrons dans le tube

□-11
$$I_0 = -\rho u_0 \pi a^2$$

Invariance par rotation autour de Oz $\vec{E}$ ne dépend pas de θ

$$\Phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$\Phi = E \cdot 2\pi r h$$

si $r < a$ $Q_{\text{int}} = \rho \pi r^2 h$ donc $E \cdot 2\pi r h = \frac{\rho \pi r^2 h}{\epsilon_0}$ et $E_c = -\frac{I_0}{2\epsilon_0 u_0 \pi a^2} r$

si $r > a$ $Q_{\text{int}} = \rho \pi a^2 h$ donc $E \cdot 2\pi r h = \frac{\rho \pi a^2 h}{\epsilon_0}$ et $E_c = -\frac{I_0}{2\epsilon_0 u_0 \pi} \cdot \frac{1}{r}$

□-12

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -eE_c(a) \text{ donc } r - a = -\frac{eE_c(a)t^2}{2m} \text{ soit } \Delta r = -\frac{eE_c(a)\tau^2}{2m}$$

Or $m \frac{d^2 z}{dt^2} = 0 \quad \dot{z} = u_0 \quad \text{et} \quad \ell = u_0 \cdot \tau$

$$\Delta r = -\frac{eE_c(a)}{2m} \left(\frac{\ell}{u_0} \right)^2 > 0$$

Si $\Delta r \ll a$ alors le faisceau est cylindrique : $\frac{eI_0}{4\pi\epsilon_0 m u_0 a} \left(\frac{\ell}{u_0} \right)^2 \ll a \Rightarrow I_0 \ll \frac{4\pi\epsilon_0 m u_0 a^2}{e} \left(\frac{u_0}{\ell} \right)^2$

$$I_1 = \frac{4\pi\epsilon_0 m u_0^3}{e} \left(\frac{a}{\ell} \right)^2$$

□-13

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{dE}{dz} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{dE}{dz} = -\frac{I_0}{\epsilon_0 u_0 s} \quad \text{de plus} \quad E = -\frac{dV}{dz}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 V}{dz^2} = \frac{I_0}{\epsilon_0 u_0 s} \Rightarrow \frac{dV}{dz} = \frac{I_0}{\epsilon_0 u_0 s} z + C_1 \Rightarrow V = \frac{I_0}{2\epsilon_0 u_0 s} z^2 + C_1 z + C_2$$

$$V(0) = C_2 = V_A$$

$$V(\ell) = \frac{I_0}{2\epsilon_0 u_0 s} \ell^2 + C_1 \ell + V_A = V_A \quad \text{soit} \quad C_1 = -\frac{I_0}{2\epsilon_0 u_0 s} \ell$$

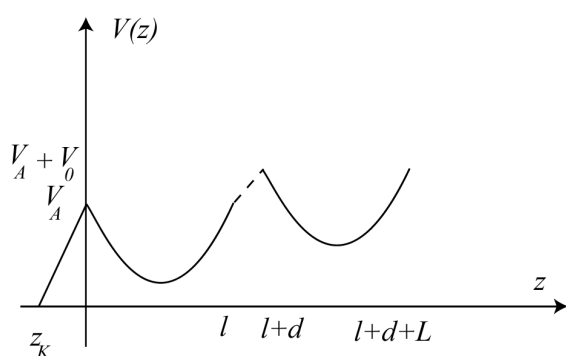
$$V(z) = \frac{I_0}{2\epsilon_0 u_0 s} (z^2 - \ell \cdot z) + V_A$$

$V(z)$ est minimale si $z = z_1 = \frac{\ell}{2}$ donc $V(z)$ est uniforme si $|V(z_1) - V_A| \ll V_A$

$$\frac{I_0 \ell^2}{8\epsilon_0 u_0 s} \ll V_A \quad \text{soit} \quad I_0 \ll \frac{8\epsilon_0 u_0 s V_A}{\ell^2} \quad \text{en fin} \quad I_2 = \frac{8\epsilon_0 u_0 s V_A}{\ell^2}$$

$$|\rho| \ll \frac{8\epsilon_0 V_0}{\ell^2}$$

□-14



□-15 l'énergie mécanique est conservée

$$Em = \frac{1}{2} m u_0^2 - eV_A = \frac{1}{2} m u^2 - eV_M \quad \text{donc} \quad \frac{1}{2} m u^2 = \frac{1}{2} m u_0^2 - eV_A + eV_M \Rightarrow u = \sqrt{u_0^2 + \frac{2eV_0}{m} \sin \omega t}$$

$$\text{Or} \quad \frac{1}{2} m u_0^2 = eV_A \quad \text{d'où} \quad u = u_0 \sqrt{1 + \frac{V_0}{V_A} \sin \omega t} \Rightarrow u = u_0 \sqrt{1 + 2\beta \sin \omega t}$$

Pour $\beta \ll 1$ alors $u = u_0 (1 + \beta \sin \omega t)$

□-16

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{2} m \langle u^2 \rangle \approx \frac{1}{2} m u_0^2 \langle (1 + 2\beta \sin \omega t) \rangle \approx \frac{1}{2} m u_0^2$$

Chocs et les forces de frottement consomment l'énergie.

II.B. - Étude de la modulation de vitesse du faisceau d'électrons

□-17 on a $u(t_1) = \frac{L}{t_2 - t_1}$ soit $(1 + \beta \sin \sigma_1) = \frac{\sigma_0}{(\sigma_2 - \sigma_1)}$

L'unité des grandeurs $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_0$ et k est le rad mais ils sont sans dimensions physiques.

Rappel :

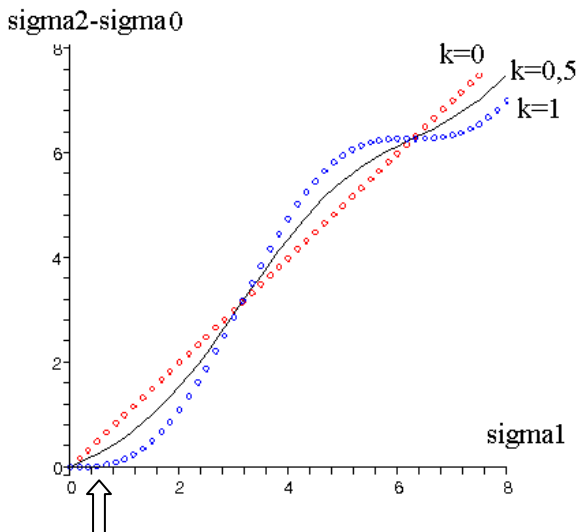
« La dimension d'une grandeur physique est son unité exprimée par rapport aux sept unités de base du système international. Exemple la fréquence : la dimension de Hz est $[Hz] = T^{-1}$ et son unité s^{-1} »

$$\sigma_2 = \sigma_1 + \sigma_0 \left(1 - \frac{k}{\sigma_0} \sin \sigma_1 \right)$$

□-18

$$\sigma_2 - \sigma_0 = \sigma_1 - k \sin \sigma_1$$

➤ `plot([x, x-(sin(x)/2), x-sin(x)], x=0..8, color=[red, black, blue], style=[point, line]);`



$$k = \beta \sigma_0 = \frac{V_0}{2V_A} \cdot \frac{\omega L}{u_0}$$

Paramètre du regroupement : le temps du parcours depuis M2 à D1 dépend de k .

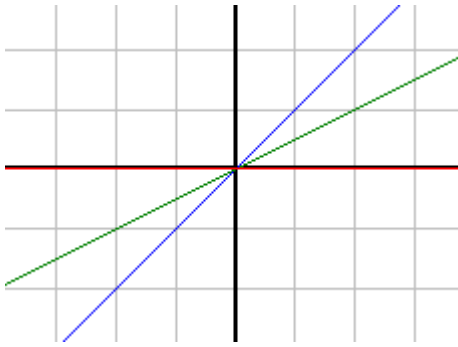
Si $k = 0$ il n'y a pas de regroupement

Si $k = 0,5$ il y a du regroupement

Si $k = 1$ il y a regroupement marqué

Il y a un regroupement marqué pour des valeurs de k assez élevées car $\sigma_2 - \sigma_0 \approx 0$ voir la flèche.

Remarque dans cette question on peut se limiter au tracés de `(x, x/2, 0)`



□-19

Rappel $\sin x = x - \frac{x^3}{6}$

On a $\sigma_2 - \sigma_0 = \sigma_1 - k \sin \sigma_1$

donc $\sigma_2^{+1/2} - \sigma_0 = \sigma_1^{+1/2} - \sin \sigma_1^{+1/2}$ et $\sigma_2^{-1/2} - \sigma_0 = \sigma_1^{-1/2} - \sin \sigma_1^{-1/2}$

$$\frac{t_2^{+1/2} - t_2^{-1/2}}{t_2^{+1/2}} = 0,01 \Rightarrow \frac{\sigma_2^{+1/2} - \sigma_2^{-1/2}}{\sigma_2^{+1/2}} = 0,01 \Rightarrow dt_1 = \left(\frac{0,24.L}{\omega^2 u_0} \right)^{1/3} \text{ AN } dt_1 = 1,6.10^{-10} \text{ s } \quad \varepsilon = 15\%$$

□-20

La charge entrante est égale à la charge sortante $I(\sigma_1)dt_2 = I_0 dt_1$

$$I_0 = I(\sigma_1) \frac{d\sigma_2}{d\sigma_1}$$

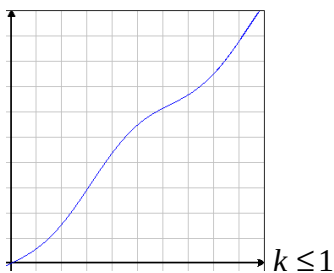
Or $\sigma_2 - \sigma_0 = \sigma_1 - k \sin \sigma_1$ donne $\frac{d\sigma_2}{d\sigma_1} = 1 - k \cos \sigma_1$

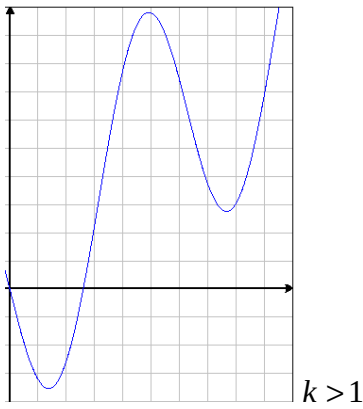
$$I(\sigma_1) = \frac{I_0}{1 - k \cos \sigma_1} \quad \text{cqfd}$$

□-21 $\varphi = \omega \left(t_2 - \frac{L}{u_0} \right) = (\sigma_2 - \sigma_0)$ soit $\varphi = \sigma_1 - k \sin \sigma_1$

Si $k \leq 1$ $I(\sigma_1) = \frac{I_0}{1 - k \cos \sigma_1} > 0$ et croissante donc I est une fonction de φ

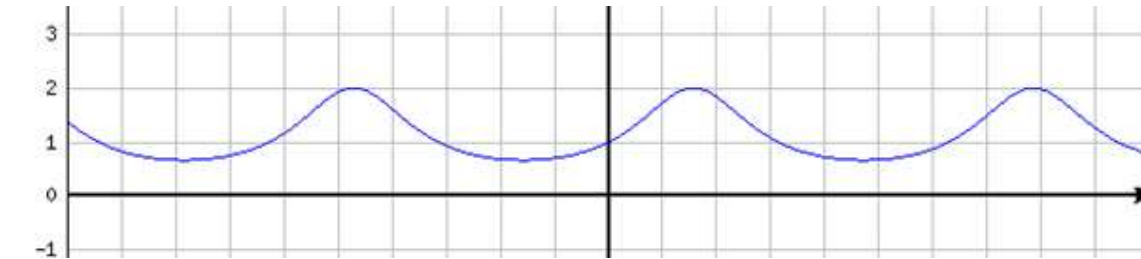
« Voila les courbes de φ en fonction de σ_1 si





$$\varphi + T_\varphi = \sigma_1 + 2\pi - k \sin \sigma_1 \text{ soit } T_\varphi = 2\pi$$

$I(\varphi)$ est une fonction paire



□-22

$$\langle I \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi I(\varphi) d\varphi = I_0$$

Fonction paire $b_n = 0$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi I(\varphi) \cos n\varphi d\varphi = \frac{2I_0}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos n\varphi}{1 - k \cos \sigma_1} (1 - k \cos \sigma_1) d\sigma_1 \text{ puisque } d\varphi = (1 - k \cos \sigma_1) d\sigma_1$$

$$a_n = \frac{2I_0}{\pi} \int_0^\pi \cos n(\sigma_1 - k \sin \sigma_1) d\sigma_1 \text{ donc } \boxed{a_n = 2I_0 \cdot J_n(nk)}$$

$$\text{Avec } J_n(nk) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nk \sin \psi - n\psi) d\psi$$

□-23

$$\text{On a } \beta \frac{\omega L_m}{u_0} = \alpha_m \Rightarrow L_m = \frac{u_0 \alpha_m}{\beta \omega}$$

$$\text{Or } \frac{1}{2} m u_0^2 = e V_A \text{ donc } \boxed{L_m = \frac{\alpha_m}{2\pi f \beta} \sqrt{\frac{2e V_A}{m}}}$$

□-24

$$\boxed{f = \frac{\alpha_m}{2\pi L_m \beta} \sqrt{\frac{2e V_A}{m}}} \quad \boxed{f = \frac{1,84}{2,3,14,0,1,0,5} \sqrt{\frac{2,1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 75000}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 952 \text{ MHz}}$$

UHF 300 MHz à 3 GHz

Télédiffusion, radiodiffusion numérique, radioamateurs, radiocommunications professionnelles, transmissions militaires y compris aéronautiques, liaisons gouvernementales, liaisons satellites, FH terrestres, radiolocalisation et radionavigation, services de la DGAC, usages spatiaux, satellites météo, téléphonie GSM et UMTS, liaisons Wi-Fi et Bluetooth, systèmes radar

□-25

$$\Sigma_{01} = \frac{Q}{s} = -\frac{Cv_D}{s} \quad \text{or} \quad C = \frac{\epsilon_0 s}{d}$$

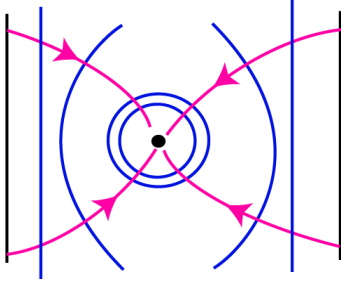
$$\Sigma_{01} = -\frac{\epsilon_0 v_D}{d}$$

$$\Sigma_{02} = \frac{\epsilon_0 v_D}{d}$$

□-26

les lignes du champs

les surfaces équipotentiels



$$\Sigma_1 > 0, \Sigma_2 > 0, q_1 > 0 \text{ et } q_2 > 0.$$

$$q_1 + q_2 = e$$

□-27

$$z_e \ll d \text{ On aura } \lim q_{1i} = e \text{ et } \lim q_{2i} = 0$$

$$z_e \simeq d \text{ On aura } \lim q_{1i} = 0 \text{ et } \lim q_{2i} = e$$

$$q_D = e$$

□-28

$$i_D = I_K$$

□-29

$$\text{On peut raisonner dans le cas où on a un maximum pour } \alpha_m. \text{ et } \eta = \frac{i_D(\alpha_m)}{I_0}.$$