

– MÉCANIQUE –

Partie 1 – Oscillations dans le champ de pesanteur terrestre

$$1.1. I_O = I_G + m\ell^2 = \frac{mL^2}{3} + m\ell^2 = \frac{3}{2}m\ell^2 \Rightarrow \frac{\ell}{L} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$1.2. \left[E_C = \frac{1}{2} I_O \dot{\theta}^2 = \frac{3}{4} m\ell^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \quad E_p = -m\vec{g} \cdot \vec{OG} + Cste \quad \left[E_p = mg\ell(1 - \cos\theta) \right]$$

1.3. La Liaison en O est parfaite et le poids est une force conservative donc l'énergie est constante

$$\text{au cours du mouvement. } E_m = \frac{3}{4} m\ell^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + mg\ell(1 - \cos\theta) \text{ d'où } \left[\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2g}{3\ell} \sin\theta = 0 \right]$$

$$1.4. \text{ on a } \sin\theta \approx \theta \Rightarrow \left[\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2g}{3\ell} \theta = 0 \right] \text{ et } \left[\theta(t) = \theta_0 \cos[\omega_1 t] \right] \quad \left[\omega_1 = \sqrt{3} \text{ rad.s}^{-1} \right]$$

Partie 2 – Oscillateur harmonique.

$$2.1. \left[E_p = \frac{1}{2} K.X^2 \right]$$

$$2.2. \left[E_t = \frac{1}{2} M \left(\frac{dX}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} K.X^2 \right] \quad \left[\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{K}{M}.X = 0 \right]$$

$$2.3. \left[X(t) = X_0 \cos \left[\sqrt{\frac{K}{M}}.t \right] \right]$$

Partie 3 – Oscillations couplées.

$$3.1. \text{ L'accélération de } O \text{ est } \left[\vec{\Gamma}_O = \ddot{x}.\vec{e}_x = \ddot{X}.\vec{e}_x \right]$$

$$\text{on a } \vec{OG} = \ell.\vec{e}_r \text{ puis } \left[\frac{d^2\vec{OG}}{dt^2} = \ell\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - \ell\dot{\theta}^2\vec{e}_r \right]$$

$$\left[\vec{\Gamma}_G = \vec{\Gamma}_O + \frac{d^2\vec{OG}}{dt^2} = \ddot{X}.\vec{e}_x + \ell\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - \ell\dot{\theta}^2\vec{e}_r \right] \text{ (loi de la composition des accélérations)}$$

on a

$$\vec{e}_r = \sin\theta\vec{e}_x - \cos\theta\vec{e}_y \quad \text{donc}$$

$$\vec{e}_\theta = \cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y$$

$$\left[\vec{\Gamma}_G = \left[\ddot{X} + \ell\ddot{\theta}\cos\theta - \ell\dot{\theta}^2\sin\theta \right] \vec{e}_x + \left[\ell\ddot{\theta}\sin\theta + \ell\dot{\theta}^2\cos\theta \right] \vec{e}_y \right]$$

3.2.

Le Théorème de la résultante cinétique appliqué à la tige s'écrit : $\vec{P} + \vec{N} + \vec{T} = m\vec{\Gamma}_G$

$$\begin{cases} T = m \left[\ddot{X} + \ell\ddot{\theta}\cos\theta - \ell\dot{\theta}^2\sin\theta \right] \\ N = mg + m \left[\ell\ddot{\theta}\sin\theta + \ell\dot{\theta}^2\cos\theta \right] \end{cases}$$

3.3.

$$\vec{\sigma}_G = I_G \cdot \dot{\vec{\theta}} \cdot \vec{e}_z$$

3.4.

$$\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} = \vec{GO} \wedge (T \vec{e}_x + N \vec{e}_y) + \underbrace{\vec{M}_G(\vec{P})}_0 \Rightarrow I_G \cdot \ddot{\theta} = -\ell \cdot N \cdot \sin \theta - \ell \cdot T \cdot \cos \theta$$

3.5.

$$I_G \cdot \ddot{\theta} = -m\ell \cdot \left[g + (\ell \ddot{\theta} \sin \theta + \ell \dot{\theta}^2 \cos \theta) \right] \cdot \sin \theta - m\ell \left[\ddot{X} + \ell \ddot{\theta} \cos \theta - \ell \dot{\theta}^2 \sin \theta \right] \cdot \cos \theta$$

3.6.

$\sin \theta \approx \theta$ et $\cos \theta \approx 1$

$$I_G \cdot \ddot{\theta} = -m\ell \cdot \left[g + (\ell \ddot{\theta} \sin \theta + \ell \dot{\theta}^2 \cos \theta) \right] \cdot \theta - m\ell \left[\ddot{X} + \ell \ddot{\theta} - \ell \dot{\theta}^2 \cdot \theta \right]$$

$$\ddot{\theta} + \frac{mg\ell}{(I_G + m\ell^2)} \theta = -\frac{m\ell}{(I_G + m\ell^2)} \ddot{X} \quad \text{Donc} \quad \left[\ddot{\theta} + \frac{2g}{3\ell} \theta = -\frac{2}{3} \frac{d^2(X/\ell)}{dt^2} \right] \quad [I] \quad \alpha = \frac{m\ell^2}{(I_G + m\ell^2)} = \frac{2}{3}$$

$$\omega_1 = \sqrt{3} \text{rad.s}^{-1}$$

3.7.

Le Théorème de la résultante cinétique appliqué à la plateforme

s'écrit : $\underbrace{\vec{R}}_{\text{la tige: principe d'action et de la réaction}} + M\vec{g} + \underbrace{\vec{R}'}_{\text{réaction des rails}} - \underbrace{K \cdot X \cdot \vec{e}_x}_{\text{ressort}} = M\vec{\Gamma}_O$

Par projection sur l'axe des x

$$M\ddot{X} = -T - KX \Rightarrow M\ddot{X} = -m \left[\ddot{X} + \ell \ddot{\theta} \cos \theta - \ell \dot{\theta}^2 \sin \theta \right] - KX$$

$$\ddot{X} + \frac{K}{(M+m)} X = -\frac{m}{(M+m)} \left[\ell \ddot{\theta} \cos \theta - \ell \dot{\theta}^2 \sin \theta \right]$$

3.8.

Petits mouvements $\ddot{X} + \frac{K}{(M+m)} X = -\frac{m}{(M+m)} \left[\ell \ddot{\theta} - \ell \dot{\theta}^2 \theta \right]$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{X}{\ell} \right) + \frac{K}{(M+m)} \frac{X}{\ell} = -\frac{m}{(M+m)} \frac{d^2 \theta}{dt^2} \quad [II] \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{K}{(M+m)}} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{m}{(M+m)}$$

3.9.

$$\omega_2^2 = 4 \text{rad.s}^{-1} \quad \alpha \beta = \frac{1}{2}$$

3.10.

On remplace $\theta = A \cos \Omega t$ et $\frac{X}{\ell} = B \cos \Omega t$ dans [I] et [II]

On trouve $\alpha \beta \cdot \Omega^4 = (\omega_1^2 - \Omega^2)(\omega_2^2 - \Omega^2)$

Et on vérifie sans problème pour $\Omega = \sqrt{2} \text{rad.s}^{-1} \Rightarrow \frac{1}{2} 4 = (3-2)(4-2)$

Pour $\Omega = 2\sqrt{3} \text{rad.s}^{-1} \Rightarrow \frac{1}{2} 144 = (3-12)(4-12)$.

3.11.

On écrit $\theta = A_1 \cos[\sqrt{2} \cdot t] + A_2 \cos[2\sqrt{3} \cdot t]$ et $\frac{X}{\ell} = B_1 \cos[\sqrt{2} \cdot t] + B_2 \cos[2\sqrt{3} \cdot t]$

On trouve $\theta = \frac{3}{5} \theta_0 \cos[\sqrt{2} \cdot t] + \frac{2}{5} \theta_0 \cos[2\sqrt{3} \cdot t]$ et $\frac{X}{\ell} = \frac{9}{20} \theta_0 (\cos[\sqrt{2} \cdot t] - \cos[2\sqrt{3} \cdot t])$