

CCP PC 2009 Physique 1

Partie I. VOILE SOLAIRE

I.1.1.

$$\vec{V} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta \quad \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$$

I.1.2.

$$\vec{F}_S = -G \frac{M_S m}{r^2} \vec{u}_r$$

Dans le référentiel héliocentrique galiléen, le corps est soumis à une force centrale conservative. Le moment cinétique du corps par rapport à S et son énergie mécanique sont conservées.

I.1.3. La trajectoire est plane (force centrale). Le principe fondamental de la dynamique : $m\vec{a} = \vec{F}_S$ donne en coordonnées polaires dans le plan de la trajectoire:

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -G \frac{M_S}{r^2} \\ \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \end{cases}$$

Pour une trajectoire circulaire, on retrouve avec $T = \frac{2\pi}{\dot{\theta}}$ la troisième loi de Képler:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM_S}} r_M^{\frac{3}{2}}$$

A.N. $T = 6,9.10^2$ jours

I.1.4. $m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -G \frac{mM_S}{r^2}$. Avec $L = mr^2\dot{\theta}$, valeur algébrique du moment cinétique perpendiculaire au plan de la trajectoire,

$$m\ddot{r} = -G \frac{mM_S}{r^2} + \frac{L^2}{mr^3} = -\frac{d}{dr} \left(\frac{L^2}{2mr^2} - G \frac{mM_S}{r} \right)$$

I.1.5. L'énergie mécanique $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_P \geq E_P$

Les trajectoires pour une force newtonienne sont des coniques:

- Energie E_A : $\dot{r} = 0$, une seule valeur de r , trajectoire circulaire
- Energie E_B : mouvement borné, état lié, trajectoire elliptique
- Energie E_C : mouvement non borné, état de diffusion, trajectoire hyperbolique

I.2.1. Il y a conservation de la quantité de mouvement totale: $\vec{p}_i = \vec{p}_r + \delta \vec{p}$

$$\delta \vec{p} = 2p \cos \alpha \vec{n} = 2p \cos \alpha (\cos \alpha \vec{e}_r + \sin \alpha \vec{e}_\theta)$$

I.2.2.

$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = N_i \delta \vec{p}. \quad \text{Soit:}$$

$$\vec{F} = 2p\phi_i S (\cos \alpha)^2 \vec{n} = 2p\phi_i S (\cos \alpha)^2 (\cos \alpha \vec{e}_r + \sin \alpha \vec{e}_\theta)$$

I.2.3. $\Phi = pc\phi_i = pc \frac{N_i}{S \cos \alpha}$ pour $\cos \alpha \neq 0$. D'où:

$$\vec{F} = 2 \frac{\Phi}{c} S (\cos \alpha)^2 \vec{n}$$

I.2.4. $F_\theta = 2 \frac{\Phi}{c} S (\cos \alpha)^2 \sin \alpha$

La dérivée $\frac{dF_\theta}{d\alpha} = 2 \frac{\Phi}{c} S (\cos \alpha - 3 \cos \alpha (\sin \alpha)^2)$ s'annule pour $\cos \alpha = 0$ (force nulle) et $\sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Pour $0 < \alpha < \pi$, on vérifie qu'on obtient une force maximale pour $\alpha_m = 35,3^\circ$

I.2.5. A.N. $a = 3,46.10^{-5} \text{ m.s}^{-2}$

I.3.1. Sur la figure 4, les valeurs du rayon correspondant au minimum sont peu différentes (pas d'échelle?) sur les deux courbes, le rayon de l'orbite héliocentrique est peu modifié.

I.3.2. Théorème du moment cinétique dans le référentiel héliocentrique:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F} = r F_{\theta} \vec{e}_r \wedge \vec{e}_{\theta} = r F_{\theta} \vec{e}_z$$

I.3.3. Avec les hypothèses faites, l'équation précédente s'écrit: $\frac{d(mr^2\dot{\theta})}{dt} = r F_{\theta}$

Or pour une trajectoire circulaire: $r\dot{\theta}^2 = G \frac{M_S}{r^2}$, d'où:

$$\frac{d(mr^2\dot{\theta})}{dt} = \frac{d(m\sqrt{GM_S r})}{dt} = r F_{\theta}$$

et $m\sqrt{GM_S}(\frac{1}{2\sqrt{r}} \frac{dr}{dt}) = r F_{\theta}$. On obtient le résultat demandé avec

$$C = \frac{2}{\sqrt{GM_S}}$$

I.3.4. Il y a conservation du flux lumineux isotrope à travers des sphères concentriques,

$$\Phi(r) = \Phi(r_T) \left(\frac{r_T}{r} \right)^2$$

A.N. $\Phi(r_M) = 5,7.10^2 W.m^{-2}$

$$F_{\theta} = \frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{\Phi(r)}{c} S = ma \left(\frac{r_T}{r} \right)^2. \text{ D'où}$$

$$\frac{dr}{dt} = Cr^{\frac{3}{2}} a \left(\frac{r_T}{r} \right)^2 = Cr_T^2 r^{-\frac{1}{2}} a \text{ et}$$

$$C' = Cr_T^2 = \frac{2r_T^2}{\sqrt{GM_S}}$$

I.3.5. Par intégration:

$$r_M^{\frac{3}{2}} - r_T^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} C' a t_{TM}$$

A.N. t_{TM} est de l'ordre de 8 ans

Partie II. VIBRATIONS TRANSVERSALES

II.1.1. et II.1.2 cf cours

$$F_y(x, t) = T \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} \text{ et}$$

$$\frac{\partial^2 h(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 h(x, t)}{\partial t^2} = 0 \text{ avec } c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

II.1.3. On ne peut pas observer de discontinuités spatiales de $\frac{\partial h}{\partial x}$ ailleurs qu'en A et B : en un point O de masse nulle s'exercent deux forces exercées l'une par la partie de la corde située à droite de O et l'autre par la partie située à gauche de O. La somme des deux forces est nulle.

$$\vec{F}(x_O^+, t) - \vec{F}(x_O^-, t) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow T \left(\frac{\partial h(x, t)}{\partial x} \right)_{x=x_O^+} = T \left(\frac{\partial h(x, t)}{\partial x} \right)_{x=x_O^-}$$

II.1.4. $h(x, t)$ vérifie l'équation de d'Alembert de II.1.2.. D'où

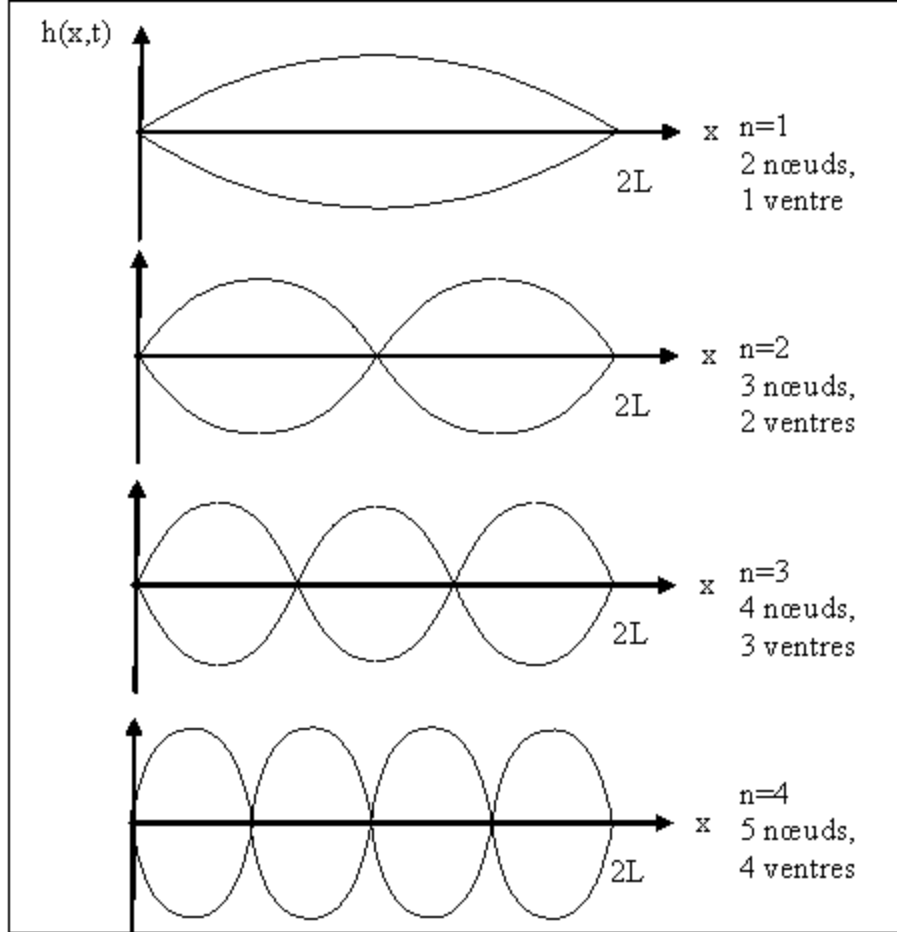
$$\omega^2 = k^2 c^2$$

II.1.5 La fonction $h(x, t)$ vérifie les conditions aux limites: $h(x = 0, t) = 0$ et $h(x = 2L, t) = 0$.

- $h(x = 0, t) = 0$ pour tout $t \Rightarrow \sin(\phi) = 0$. On peut prendre $\phi = 0$, choisir $\phi = \pi$ revient à changer le signe de Z .
- $h(x = 2L, t) = 0$ pour tout $t \Rightarrow \sin(2kL) = 0$. On en déduit les valeurs de k possibles:

$$k_n = n \frac{\pi}{2L}, \omega_n = n \frac{\pi c}{2L}, f_n = n \frac{c}{4L}$$

II.1.6.



Pour le mode fondamental ($n=1$), il y a deux noeuds en $x=0, x=2L$ et un ventre en $x=L$. Pour le mode n de vibration, il y a n ventres et $(n+1)$ noeuds.

II.1.7.

$$\langle e \rangle = \frac{\mu}{2} Z^2 \langle \omega_1^2 \sin^2(k_1 x) \sin^2(\omega_1 t) + c^2 k_1^2 \cos^2(k_1 x) \cos^2(\omega_1 t) \rangle$$

$$\langle e \rangle = \frac{\mu}{4} Z^2 (\omega_1^2 \sin^2(k_1 x) + c^2 k_1^2 \cos^2(k_1 x)) \text{ soit:}$$

$$\langle e \rangle = \frac{\mu}{16} Z^2 \left(\frac{\pi c}{L} \right)^2$$

II.1.8. L'énergie totale $E = 2L \langle e \rangle$

$$E = \frac{Z^2 \pi^2 T}{8L}$$

qui s'exprime bien en N.m, soit en Joule
A.N. $Z = 3cm$

II.2.1. Les modes indicés par un entier pair présentent un noeud en $x=L$. Ces modes ne seront pas modifiés par la présence de la perle immobile en $x=L$. En revanche, les modes de n impair sont certainement perturbés.

II.2.2. Dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen; la perle est soumise à son poids, à la tension de la part de la corde située à sa gauche, à la tension de la part de la corde située à sa droite. Au début de l'énoncé il est indiqué que les forces de pesanteur sont négligeables devant les forces de tension, on néglige le poids de la perle.

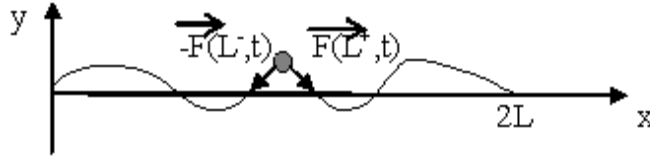
Le déplacement de la corde est uniquement vertical.

$$m \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(L, t) \vec{u}_y = \vec{F}(x = L^+, t) - \vec{F}(x = L^-, t). \text{D'où:}$$

$$\begin{cases} F_x(x = L^+, t) - F_x(x = L^-, t) = 0 \\ m \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(L, t) = F_y(x = L^+, t) - F_y(x = L^-, t) \end{cases}$$

Pour $x \neq L$, les équations sont inchangées. On obtient donc

$$\begin{cases} F_x(x = L^+, t) = F_x(x = L^-, t) = T \\ m \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(L, t) = T \frac{\partial h}{\partial x}(x = L^+, t) - T \frac{\partial h}{\partial x}(x = L^-, t) \end{cases}$$



$$\text{II.2.3. } h(x, t) = h(2L - x, t) \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = -\frac{\partial h}{\partial x}(2L - x, t)$$

Pour $x = L^-$, $\frac{\partial h}{\partial x}(x = L^-, t) = -\frac{\partial h}{\partial x}(x = L^+, t)$. On en déduit:

$$m \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(L, t) = -2T \frac{\partial h}{\partial x}(x = L^-, t)$$

$h(x, t) = Z \sin(Kx) \cos(\omega t)$ vérifie bien la condition aux limites en $x=0$ (Il manque Z dans l'énoncé). En $x=L$, la relation précédente donne:

$$-m\omega^2 Z \sin(KL) \cos(\omega t) = -2KTZ \cos(KL) \cos(\omega t)$$

, qui est vérifiée pour tout t .

Pour $\sin(KL)=0$, la condition n'est pas vérifiée (sauf $K=0$, sans intérêt). On en déduit pour $\sin(KL) \neq 0$,

$$\cot an(KL) = \frac{m\omega^2}{2KT}$$

II.2.4.

Sur le graphe est représentée la fonction $y=\cotan(x)$.

Pour $m=0$, l'équation vérifiée par K est $\cotan(KL)=0$. Les solutions sont de la forme

$$K = (2p + 1) \frac{\pi}{2L}$$

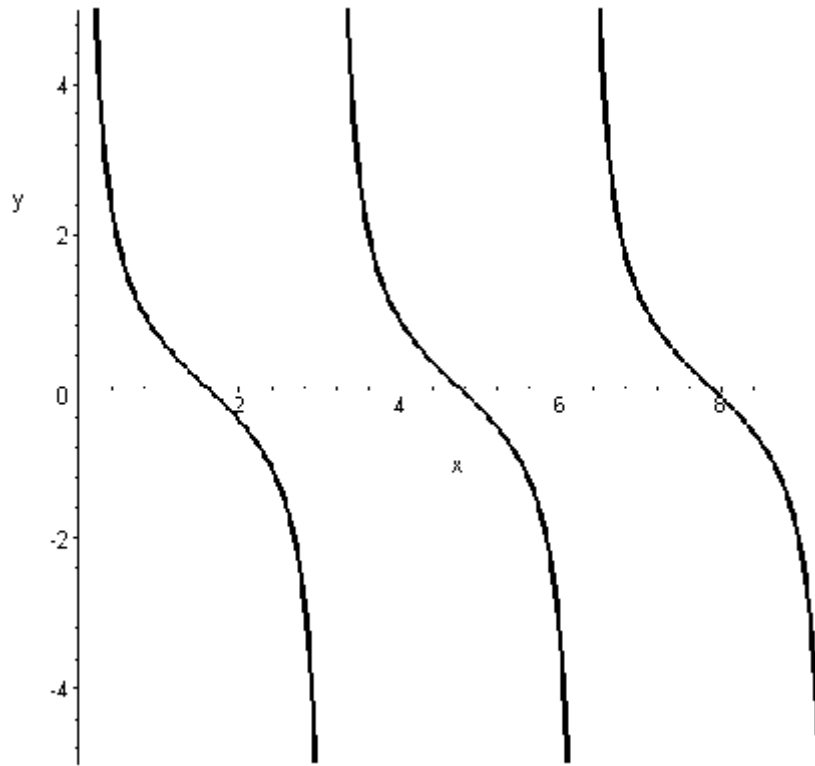
., avec p entier. On retrouve les modes propres de n impair de la première partie. En particulier $K = k_1 = \frac{\pi}{2L}$ convient.

$$\text{II.2.6. } \omega = cK \Rightarrow \cot an(KL) = \frac{mc^2}{2T} K$$

$$\text{Avec } K = k_1 + \beta m, \cot an(KL) = \cot an\left(\frac{\pi}{2} + \beta mL\right) = \frac{mc^2}{2T} (k_1 + \beta m)$$

Pour m faible, on obtient au premier ordre : $-\beta mL = \frac{mc^2}{2T} k_1$, soit

$$\beta = -\frac{\pi c^2}{4TL^2}$$



(β en $\text{kg}^{-1}.\text{m}^{-1}$). K est plus petit que k_1 .

II.2.6.

$$f = \frac{C}{2\pi} K \Rightarrow \frac{\Delta f_1}{f_1} = \frac{\Delta K}{K} = \frac{\beta m}{V} = -\frac{mc^2}{2LT}$$

$$\frac{\Delta f_1}{f_1} = -\frac{m}{2\mu L}$$

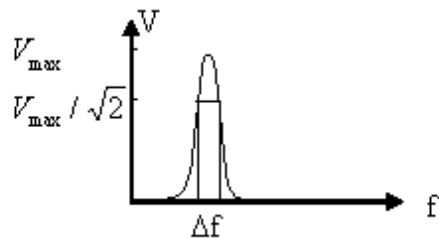
A.N. $m = 0,8mg$

II.3.1. Avec $\mu \rightarrow \rho_q S$ et $c \rightarrow c_q$, l'équation devient $\frac{\Delta f_1}{f_1} = -\frac{m}{2\rho_q SL} = -\frac{m}{2\rho_q S} \frac{4f_1}{c_q}$. D'où:

$$\Delta f_1 = -\frac{2mf_1^2}{\rho_q Sc_q}$$

En appelant Δf la bande passante du quartz:

$$\Delta f = \frac{f_1}{Q}$$



II.3.2. Si on impose $|\Delta f_1| \geq \Delta f$, soit:

$$\frac{m}{S} \geq \frac{\rho_q c_q}{2f_1 Q}$$

A.N. La sensibilité est de 4.10^{-3} ng