

Concours CCP 2009 option PC Physique 2 Problème I

EFFETS DE MOYENNE EN RÉGIMES OSCILLATOIRES RAPIDES

Francis BROUCHIER

14 mai 2009

Les figures de l'énoncé étant suffisamment claires ne seront pas reproduites dans le corrigé. Le lecteur est prié de garder l'énoncé sous les yeux.

1 Questions préliminaires.

1.1

D'après les formules trigonométriques données en page 1 on peut écrire :

$$p(t) = \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} [\cos \varphi + \cos(2\omega t + \varphi)]$$

La pulsation fondamentale est 2ω et il n'y a pas d'harmoniques. La valeur moyenne d'une fonction sinusoïdale du temps est nulle sur une période. Il en est de même pour un grand nombre de périodes. Ainsi le développement en série de Fourier d'une fonction périodique contient un terme constant et une suite de fonctions sinusoïdales de pulsations $\omega, 2\omega, \dots$, la valeur moyenne de ces fonctions est nulle et il ne reste comme valeur moyenne que le terme constant.

Dans le cas du problème la valeur moyenne de la fonction est donc égale à la composante continue $\cos \varphi / 2$

1.2

$$\begin{aligned} s(t) &= A \cos(\omega t) + B \cos(\omega t + \varphi) \\ s^2(t) &= A^2 \cos^2 \omega t + B^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + 2AB \cos \omega t \cos(\omega t + \varphi) \\ s^2(t) &= \frac{A^2}{2} (1 + \cos 2\omega t) + \frac{B^2}{2} [1 + \cos(2\omega t + \varphi)] + 2AB \cos \omega t \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

D'après les résultats précédents il reste :

$$\langle s^2(t) \rangle = \frac{A^2}{2} + \frac{B^2}{2} + AB \cos \varphi$$

1.3

$$P(t) = \cos \omega t \cos(\Omega t + \varphi) = \frac{1}{2} \{ [\cos(\omega + \Omega)t + \varphi] + [\cos(\omega - \Omega)t - \varphi] \}$$

Le produit $P(t)$ se ramène à une somme de cosinus dont la valeur moyenne est nulle : $\langle P(t) \rangle = 0$

$$\begin{aligned} S(t) &= A \cos \omega t + B \cos(\Omega t + \varphi) \\ S^2(t) &= A^2 \cos^2 \omega t + B^2 \cos^2(\Omega t + \varphi) + 2AB \cos \omega t \cos(\Omega t + \varphi) \end{aligned}$$

La valeur moyenne du dernier produit est nulle, compte tenus des calculs précédents il ne reste que

$$\langle S^2(t) \rangle = \frac{1}{2} (A^2 + B^2)$$

2 Effet d'inertie thermique.

2.1

La puissance moyenne dissipée sous forme d'effet Joule est $\langle v(t) \rangle / R$. On a entre crochets la somme deux fonctions sinusoïdales de pulsations différentes. On se trouve donc dans le cas **1.3** et l'on a :

$$P_J = \frac{\hat{V}^2}{2R}(1 + 0,18^2) = 0,5162 \frac{\hat{V}^2}{2R}$$

2.2

En courant continu $P'_J = V^2/R$ avec $P'_J = P_J$ on a $V^2 = 0,5162 \hat{V}^2$ soit $V = 0,7185 \hat{V}$. Cette valeur est appelée "valeur efficace de la tension".

2.3

De la relation précédente on tire $\hat{V} = 230/0,7185 \sim 320 \text{ Volts}$

3 Effets de moyenne en électrocinétique.

3.1 filtrage des ondulations autour de la valeur moyenne d'un signal.

3.1.1

On écrit les équations de l'électrocinétique dans l'approximation des régimes quasi stationnaires :

$$v(t) = Ri + u(t) \quad i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt} \quad v(t) = u + RC \frac{du}{dt} = u + \tau \frac{du}{dt} \quad \tau = RC$$

Si on prend $v(t) = \hat{V} \cos^2(\omega t) = (\hat{V}/2)[1 + \cos(2\omega t)]$ il vient :

$$u + \tau \frac{du}{dt} = \frac{\hat{V}}{2} + \frac{\hat{V}}{2} \cos(2\omega t).$$

3.1.2

a) La solution particulière de la première équation différentielle est $u(t) = Cste$ car $du/dt = 0$, d'où $u(t) - u(0) = \hat{V}/2$. Si à $t = 0$ le condensateur est déchargé $u(0) = 0$ et $u = \hat{V}/2$

b) Dans le cas de la question l'amplitude complexe est une fonctionnelle linéaire définie sur l'ensemble des fonctions sinusoïdales du temps de pulsation 2ω qui remplace les équations différentielles linéaires à coefficients constants par des équations algébriques. Le symbole de dérivation d/dt est remplacé par $2i\omega$ en respectant la notation de l'énoncé. L'amplitude complexe de $u(t)$ pourra s'écrire U et celle de $\hat{V} \cos(2\omega t)/2$ s'écrira $\hat{V}/2$ en prenant ce cosinus comme origine des phases. On en déduit :

$$U + 2i\omega\tau U = \frac{\hat{V}}{2} \quad U = \frac{\hat{V}}{2(1 + 2i\omega\tau)} \quad \hat{U} = \frac{\hat{V}}{2\sqrt{1 + 4\omega^2\tau^2}}$$

De la dernière expression on déduit que l'amplitude tend vers zéro si $4\omega^2\tau^2 \gg 1$ soit $RC \gg 1/(2\omega)$

3.1.3

En négligeant 1 sous le radical on peut écrire $\hat{U} = \hat{V}/4\omega\tau$. On désire que $\hat{U}/\hat{V}/2 \sim 1/100$ soit $1/2\omega RC \sim 1/100$. Avec les valeurs numériques de l'énoncé on trouve $R > 1590 \Omega$. La valeur de ω correspond à la valeur de la pulsation du secteur de distribution d'électricité à 50 Hz. Après traitement l'ondulation reste faible.

3.2 Détection synchrone.

3.2.1

On exprime le produit demandé :

$$s(t).w(t) = [\hat{V} \cos \omega t + \hat{U} \cos(\Omega t + \varphi)] [\hat{W}(\cos(\omega t + \alpha))] = \hat{V} \hat{W} \cos \omega t \cos(\omega t + \alpha) + \hat{U} \hat{W} \cos(\Omega t + \varphi) \cos(\omega t + \alpha)$$

D'après le résultat du 1.3 la valeur moyenne du second produit est nulle de sorte que la valeur moyenne recherchée est :

$$\mu = \langle s(t).w(t) \rangle = \frac{\hat{U} \cdot \hat{W}}{2} \cdot \cos \alpha$$

3.2.2

On règle $\hat{W} = 2 \text{ Volts}$ la valeur de μ est maximale lorsque $\cos \alpha = 1$, soit $\alpha = 0$. On a alors $\mu_{max} = \hat{V}$ qui est la valeur désirée.

4 Effets de moyenne dans les capteurs optiques.

4.1 Sensibilité des instruments d'optique

4.1.1

Les longueurs d'onde du spectre visible par l'œil sont comprises entre 0,4 et 0,8 μm . Comme $\lambda = c/f$ on en déduit que les fréquences correspondantes sont comprises entre $3,75 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ et $7,5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$.

4.1.2

Si $s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, l'éclairement est la valeur moyenne de son carré soit : $E = \langle s^2(t) \rangle = A^2/2$.

4.2 Interférences de deux ondes planes.

4.2.1

A partir des résultats des questions préliminaires on peut écrire $\mathcal{E}_1 = A_1^2/2$ $\mathcal{E}_2 = A_2^2/2$
 $\mathcal{E} = \langle s^2(t) \rangle$. Deux cas sont alors à envisager :

- Soit $\omega_1 \neq \omega_2$ la valeur moyenne du carré de la somme est la somme des valeurs moyennes de chaque signal : $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$. Dans ce cas il ne peut pas y avoir d'interférences puisque l'éclairement total est uniforme.
- Soit $\omega_1 = \omega_2$ on ajoute aux termes précédents $A_1 A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)/2 = \sqrt{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$. L'éclairement total vaut donc :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \sqrt{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Dans ce cas l'éclairement varie en fonction de φ_1 et φ_2 on peut donc observer des variations d'éclairement donnant des interférences.

4.2.2

Pour obtenir des interférences lumineuses il faut deux signaux de même longueur d'onde ayant entre eux un déphasage constant. Or la lumière est produite lors du passage d'un électron d'un atome d'un niveau d'énergie élevé à un niveau plus bas ($\Delta W = h\nu$). La source lumineuse est donc ponctuelle et deux sources voisines ne sont pas corrélées. Il faut donc avoir deux images en optique géométrique de la même source pour avoir deux sources cohérentes. Avec un laser on peut obtenir une onde plane cohérente sur une surface assez faible.

4.2.3

a) Pour des ondes planes les plans d'onde (même phase) sont perpendiculaires aux rayons lumineux. Pour l'onde s_0 le plan (P) est le plan de phase zéro. Le signal de la source s_1 arrivant en x est en retard sur celui arrivant en O d'une distance $\delta = x \sin \theta$

b) La vibration de l'onde $s_1(t)$ vaudra donc :

$$s_1(t) = A_1 \cos(\omega t - 2\pi \frac{x \sin \theta}{\lambda})$$

4.2.4

On utilise la formule démontrée en 4.2.1 :

$$E = E_0 + E_1 + \sqrt{E_0 E_1} \cos 2\pi \frac{x \sin \theta}{\lambda}$$

4.2.5

L'interfrange " i " est la distance entre deux franges successives ayant le même éclairement. Le cosinus reprend la même valeur pour une variation de son angle de 2π soit $i \sin \theta / \lambda = 1$ d'où l'interfrange

$i = \lambda / \sin \theta$, à ne pas confondre avec le symbole des imaginaires.

Certaines franges ont un éclairement maximum, d'autres un éclairement minimum :

$$E_{max} = E_0 + E_1 + \sqrt{E_0 E_1} \quad E_{min} = E_0 + E_1 - \sqrt{E_0 E_1}$$

Par définition le contraste vaut :

$$\frac{E_{max} - E_{min}}{E_{max} + E_{min}} = \frac{\sqrt{E_0 E_1}}{E_0 + E_1}$$

Application numérique : $\theta = 30^\circ$ $\sin \theta = 1/2$ et $i = 2\lambda = 1,266 \mu m$

$A_0 = 2A_1$ $E_0 = 4E_1$ $\text{contraste} = 2/5$

4.3 Principe de l'imagerie par diffraction.

4.3.1

L'optique géométrique prend pour modèle l'existence de rayons lumineux sans épaisseur qui sont des segments de droite dans les milieux homogènes et isotropes. Elle ne tient pas compte de la nature ondulatoire de la lumière.

Principe de Huygens-Fresnel : Dans le cas de l'optique les ondes qui se propagent à l'extérieur d'une surface fermée à l'intérieur de laquelle se trouve une source (A) sont les mêmes que celles obtenues en supprimant la source (A) et en la remplaçant par une série de sources de sources ponctuelles sur la surface, ces sources ayant l'amplitude et la phase de l'onde émise par (A).

4.3.2

Introduisons l'éclairement E dans la formule donnant $T(x)$:

$$T(x) = \mu E = \alpha + \beta \cos[2\pi \frac{x \sin \theta}{\lambda}] = \mu \{E_0 + E_1 + \sqrt{E_0 E_1} \cos[2\pi \frac{x \sin \theta}{\lambda}]\}$$

d'où on déduit :

$$\alpha = \mu(E_0 + E_1) \quad \beta = \mu \sqrt{E_0 E_1}$$

4.3.3

a) $a_0 dx$ est le produit de l'amplitude de l'onde qui arrive sur le plan (P) par la surface éclairée. Celle-ci vaut $l dx$ et l'amplitude de l'onde vaut A_0 . En comparant on trouve $a_0 = A_0 l$.

b) δ' est la différence de marche entre le rayon passant par O et le rayon passant par x . D'où $\delta' = x \sin \Psi$

c) Pour répondre à cette question il va falloir intégrer ds' en faisant varier x de $-h/2$ à $h/2$. Développons ds' :

$$ds' = a_0 [\alpha + \beta \cos(2\pi \frac{x \sin \theta}{\lambda})] [\cos(2\pi \frac{x \sin \Psi}{\lambda}) + i \sin(2\pi \frac{x \sin \Psi}{\lambda})] dx$$

Laissons de côté a_0 qui est en facteur du tout et occupons nous d'abord du terme en α :

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} \alpha \exp(i \frac{2\pi x \sin \Psi}{\lambda}) dx &= \left[\alpha \frac{\lambda}{2i\pi \sin \Psi} \exp(i \frac{2\pi x \sin \Psi}{\lambda}) \right]_{-h/2}^{h/2} \\ \alpha \frac{\lambda}{2i\pi \sin \Psi} [\exp(i\pi \frac{h \sin \Psi}{\lambda}) - \exp(i\pi \frac{h \sin \Psi}{\lambda})] &= \alpha \frac{\lambda}{\pi \sin \Psi} \sin(\frac{\pi h}{\lambda} \sin \Psi) \\ &= \alpha h \frac{\lambda}{\pi h \sin \Psi} \sin(\frac{\pi h}{\lambda} \sin \Psi) \end{aligned}$$

Un œil exercé reconnaîtra là un sinus cardinal que l'on trouve souvent dans les problèmes simples de diffraction. Nous y reviendrons plus loin. Le sinus cardinal est la fonction : $\text{sinc}(x) = \sin x/x$.

Le terme en β est constitué de deux produits. Étudions d'abord le premier :

$$\begin{aligned} \beta \cos \frac{2\pi x \sin \theta}{\lambda} \cdot \cos \frac{2\pi x \sin \Psi}{\lambda} &= \beta \frac{1}{2} \left[\cos \frac{2\pi x}{\lambda} (\sin \theta - \sin \Psi) + \cos \frac{2\pi x}{\lambda} (\sin \theta + \sin \Psi) \right] \\ \frac{\beta}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \cos \frac{2\pi x}{\lambda} (\sin \theta - \sin \Psi) dx &= \frac{\beta}{2} \left[\frac{\lambda}{2\pi(\sin \theta - \sin \Psi)} \sin \frac{2\pi x}{\lambda} (\sin \theta - \sin \Psi) \right]_{-h/2}^{h/2} \\ &= \frac{\beta h}{2} \frac{\lambda}{\pi h(\sin \theta - \sin \Psi)} \sin \frac{\pi h}{\lambda} (\sin \theta - \sin \Psi) = \frac{\beta h}{2} \text{sinc} \left[\frac{\pi h}{\lambda} (\sin \theta - \sin \Psi) \right] \end{aligned}$$

vaut donc :

Le second terme du produit est le même que le premier où l'on change $\sin \theta - \sin \Psi$ en $\sin \theta + \sin \Psi$, il vaut donc :

Le second produit fait apparaître un terme en $\cos a \sin b = 1/2[\sin(b+a) + \sin(b-a)]$; Pour ne pas alourdir le calcul nous laisserons de côté le terme constant en facteur $ia_0\beta/2$ et ne calculerons que le premier sinus, le calcul pour l'autre étant identique en remplaçant $\sin \theta + \sin \Psi$ par $\sin \theta - \sin \Psi$. L'intégrale se calcule ainsi :

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} \sin \frac{2\pi x}{\lambda} (\sin \theta + \sin \Psi) dx &= \left[\frac{-\lambda}{2\pi(\sin \theta + \sin \Psi)} \cos \frac{2\pi x}{\lambda} (\sin \theta + \sin \Psi) \right]_{-h/2}^{h/2} \\ &= \frac{-\lambda}{2\pi(\sin \theta + \sin \Psi)} \left[\cos \frac{\pi h}{\lambda} (\sin \theta + \sin \Psi) - \cos \frac{-\pi h}{\lambda} (\sin \theta + \sin \Psi) \right] = 0 \end{aligned}$$

L'autre terme du produit sera lui aussi nul et l'amplitude totale diffractée dans la direction Ψ sera :

$$A = a_0 \alpha \cdot h \cdot \text{sinc} \left(\frac{\pi h}{\lambda} \sin \Psi \right) + \frac{a_0 \beta h}{2} \cdot \left[\text{sinc} \left(\frac{\pi h}{\lambda} (\sin \theta + \sin \Psi) \right) + \text{sinc} \left(\frac{\pi h}{\lambda} (\sin \theta - \sin \Psi) \right) \right]$$

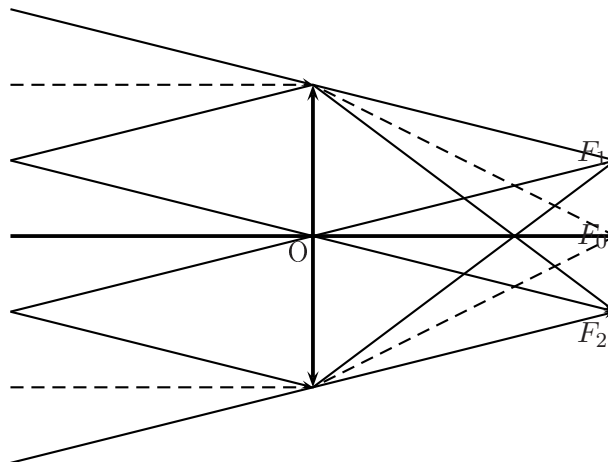
4.3.4

Si $h \gg \lambda$ soit la valeur de la variable du sinus cardinal est très grande et le sinus cardinal tend vers zéro. Si la valeur de la variable du sinus cardinal est nulle, le sinus cardinal vaut 1. Ainsi il y aura de la lumière dans les directions qui annulent la variable du sinus cardinal, soit :

$$\Psi = 0 \quad \Psi = \theta \quad \Psi = -\theta$$

4.3.5

Lorsque $\Psi = 0$ la lumière diffractée est parallèle à l'axe principal de la lentille pour simplifier les choses. Il y aura donc une frange passant par le foyer principal image de la lentille. Puis, de part et d'autre, deux franges parallèles avec les angles $\Psi = \theta$ et $\Psi = -\theta$. Ces deux franges sont à la distance $f \tan \theta$ de la frange centrale soit $5,3 \text{ cm}$.



4.4 Phénomènes de battements

4.4.1

Nous avons une somme de cosinus de même amplitude. En développant les cosinus et en mettant en facteur il vient :

$$s(t) = A \cos \delta\omega t \cdot \cos \omega t \quad s^2(t) = A^2 \cos^2 \delta\omega t \cdot \cos^2 \omega t = A^2 \cos^2 \delta\omega t \cdot \frac{1 + \cos 2\omega t}{2}$$

La valeur moyenne de $\cos 2\omega t$ est nulle d'où

$$\langle s^2(t) \rangle = A^2 \frac{\cos^2 \delta\omega t}{2} = \frac{A^2}{4} (1 + \cos 2\delta\omega t)$$

D'après les travaux de Fletcher la bande passante moyenne de l'oreille humaine est de 20 Hz à 20 kHz . Mais diverses causes peuvent la modifier : le vieillissement diminue les fréquences élevées audibles, l'écoute de musique à très fort niveau sur de longues périodes provoque une surdité irréversible (Attention les oreilles!).

les deux fréquences de $40,5 \text{ kHz}$ et $39,5 \text{ kHz}$ sont des fréquences ultrasonores inaudibles séparément par l'oreille humaine (mais pas par les chauve-souris). En revanche le phénomène de battements provoque l'apparition d'un son de pulsation $2\delta\omega$ ou ce qui revient au même en fréquence $2\delta f$. Ici par rapport à la fréquence centrale 40 kHz le δf est de $0,5 \text{ kHz}$ et donc la fréquence détectée par l'oreille est de $\boxed{1 \text{ kHz}}$.

4.4.2

a) B est en arrière de A avec un décalage dans le temps de T , donc $\boxed{x_1 = -cT}$.

Dans le référentiel du problème l'abscisse de B en fonction du temps est $x_B = ct + x_1$ et l'abscisse du miroir est $x_M = vt$. Lorsque B atteint le miroir on a :

$$x_B = x_M \quad c\tau - cT = v\tau \quad (c - v)\tau = cT$$

on en tire :

$$\tau = \frac{cT}{c - v} \quad x_2 = v\tau = \frac{vcT}{c - v}$$

b) Bien que cela ne soit pas précisé dans l'énoncé la position de $A(\tau)$ est celle du maximum qui s'est réfléchi sur le miroir à $t = 0$. Donc la distance $\boxed{d = AO = c\tau}$ et $OB(\tau) = x_2$, ce qui donne $\boxed{(AB) = (c + v)\tau}$. Cette distance représente la longueur de l'onde réfléchie.

c) Par définition $f' = c/\lambda'$ d'où :

$$\lambda' = d + x_2 = \frac{c^2T}{c - v} + \frac{cvT}{c - v} = c \frac{c + v}{(c - v)T}$$

Pour l'observateur fixe on trouve donc :

$$f' = \frac{c - v}{(c + v)T} = \frac{c - v}{c + v} f$$

d) En développant l'expression de f' au premier ordre on tire $f' \approx (1 - 2v/c)f$ d'où $\boxed{f - f' \approx 2fv/c}$

e) *Application numérique* Avec les valeurs numériques de l'énoncé on trouve $f = 6.10^{14} \text{ Hz}$ d'où

$\boxed{f - f' = 12.10^7 \text{ Hz} = 120 \text{ MHz}}$. On se trouve dans le domaine des ondes "radio" juste au dessus de la bande "FM".

Concours CCP 2009 option PC Physique 2 Problème II

Francis BROUCHIER

12 mai 2009

Les figures de l'énoncé étant suffisamment claires ne seront pas reproduites dans le corrigé. Le lecteur est prié de garder l'énoncé sous les yeux.

1 Modélisation d'une ligne électrique composée de résistances réparties uniformément

1.1

Au point M on écrit que la somme algébrique des courants y arrivant est nulle :

$$\frac{V(x-dx) - V(x)}{rdx} + \frac{V(x+dx) - V(x)}{rdx} + (0 - V(x))gdx = 0$$

En utilisant la formule de Taylor au second ordre il vient :

$$\frac{V(x) - dx \frac{dV}{dx} + \frac{(dx)^2}{2} \frac{d^2V}{dx^2} - V(x)}{rdx} + \frac{V(x) + dx \frac{dV}{dx} + \frac{(dx)^2}{2} \frac{d^2V}{dx^2} - V(x)}{rdx} - V(x)gdx = 0$$

En simplifiant il reste :

$$\boxed{\frac{d^2V}{dx^2} - rgV = 0}$$

1.2

Cette équation différentielle est du type : $\frac{d^2V}{dx^2} - \alpha^2 V = 0$ on en déduit $\boxed{\alpha = \sqrt{rg}}$.

1.3

Comme la ligne n'est formée que de résistances elle dissipe de la puissance sous forme de chaleur. Si elle est infiniment longue il ne reste plus de tension au bout donc $V(x \rightarrow \infty) = 0$. Le coefficient de l'exponentielle en $+ax$ doit donc être nul : $\boxed{A=0}$. Si au bout de la ligne la tension est nulle la valeur de R_L n'intervient pas dans ce résultat.

2 Modélisation d'une ligne électrique infinie composée de résistances longitudinales et de capacités transverses réparties uniformément.

2.1

l'impédance complexe d'un condensateur de capacité γdx est $\boxed{1/i\gamma dx\omega}$. gdx est une conductance (inverse d'une résistance), son analogue en amplitude complexe est une admittance (inverse d'une impédance). g est donc analogue à $i\gamma\omega$. En remplaçant l'équation différentielle demandée est :

$$\boxed{\frac{d^2V(x)}{dx^2} - ir\gamma\omega V(x) = 0}$$

2.2

Comme la ligne est infiniment longue la solution en exponentielle à exposant positif est nulle il ne reste que $\underline{V}(x) = \hat{V} e^{-i\underline{k}x}$ avec $\underline{k}^2 = ir\gamma\omega = r\gamma\omega \frac{(1+i)^2}{2}$ de sorte que :

$$\underline{k} = \sqrt{\frac{r\gamma\omega}{2}}(1+i)$$

Cette relation est appelée "relation de dispersion".

2.3

En multipliant la solution en $\underline{V}(x)$ par l'exponentielle en $i\omega t$ on obtient :

$$\underline{v}(x, t) = \hat{V} e^{i[\omega t - \sqrt{\frac{r\gamma\omega}{2}}(1+i)x]} = \hat{V} e^{-\sqrt{\frac{r\gamma\omega}{2}}x} * e^{i\omega(t - \sqrt{\frac{r\gamma}{2\omega}}x)}$$

Le terme en exponentielle imaginaire est le terme de propagation et le terme en exponentielle réelle à exposant négatif est le terme d'atténuation de l'amplitude de l'onde. Soit $x = \delta$ la distance à laquelle l'amplitude vaut $1/e$ de l'amplitude initiale, on écrit :

$$\frac{1}{e} = e^{-\sqrt{\frac{r\gamma\omega}{2}}\delta} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{r\gamma\omega}}$$

La vitesse de phase v_φ apparaît dans le terme en exponentielle imaginaire sous la forme $e^{i\omega[t - \frac{x}{v_\varphi}]}$ d'où :

$$v_\varphi = \sqrt{\frac{2\omega}{r\gamma}}$$

En posant $a = 1/r\gamma$ appelée "diffusivité" on obtient :

$$\delta = \sqrt{\frac{2a}{\omega}} \quad v_\varphi = \sqrt{2a\omega}$$

3 Propagation de la chaleur dans le sol.

3.1

Le problème est formellement régi par la même équation différentielle qu'à la section précédente. Les notations ont le bon goût d'utiliser les mêmes lettres pour désigner des grandeurs physiques différentes. Par analogie on en déduit :

$$\underline{\theta}(x, t) = \hat{\Theta} e^{-\frac{x}{\delta}} * e^{i[\omega(t - \frac{x}{v_\varphi})]}$$

3.2

Pour les variations diurnes la période de la variation est $T = 86400 \text{ s}$. La pulsation correspondante vaut $\omega_d = 7,27.10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$. Soit p la profondeur pour laquelle l'amplitude de la température est réduite à 1 % de la valeur en surface, on a :

$$\frac{\hat{\Theta}}{100} = \hat{\Theta} e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}p}$$

il vient alors $p = \ln(100) \cdot \sqrt{2a}/\sqrt{\omega}$. Ou, numériquement, $p = 3,85.10^{-3}/\sqrt{\omega}$. De même $v_\varphi = \sqrt{2a\omega} = 8,37.10^{-4}\sqrt{\omega}$.

Pour les variations diurnes : $p = 45 \text{ cm}$ $v_\varphi = 0,6 \text{ cm/jour}$ Pour les variations annuelles la période est 365 fois plus grande donc le ω_a est 365 fois plus petit et sa racine carrée est 19,1 fois plus petite.

On a donc : $p = 857 \text{ cm}$ $v_\varphi = 0,03 \text{ cm/jour}$.

4 Transport industriel de la chaleur.

4.1

En régime stationnaire on a la formule : $\Phi = (\theta_i - \theta_f)/R_{th}$, soit $\theta_i - \theta_f = R_{th} \cdot \Phi$. Si la ligne a une longueur de 100 m sa résistance thermique est de $R_{th} = 30 \text{ K/W}$. D'où $\theta_i = \theta_f + 30 * 10^4 = 300080^\circ\text{C}$. Il n'est pas raisonnable d'envisager un tel moyen de transport pour la chaleur car la source de chaleur devrait être à une température de l'ordre de grandeur de celle du Soleil.

Le transfert de chaleur sur de courtes distances et pour des puissances ne dépassant pas le kW est utilisé, entre autre, pour refroidir les circuits électroniques de puissance : amplificateurs ou microprocesseurs. Souvent ce transfert s'accompagne d'une convection par ventilateur : dans les unités centrales d'ordinateur le microprocesseur est muni d'un radiateur et d'un ventilateur. Il en est de même pour les amplificateurs B.F. de sonorisation.

4.2

4.2.1

D_m est le débit massique de la conduite.

4.2.2

Le débit massique est le produit du débit volumique D_v par la masse volumique ρ de sorte que

$$G = D_m \cdot c = \rho \cdot c \cdot D_v$$

4.2.3

Au point de température $\theta(x)$ arrive le flux $\Phi(x - dx)$ et repart le flux $\Phi(x)$ et le flux de fuite vers l'extérieur $(\theta(x) - \theta_{ext})gdx$. En ce nœud la somme algébrique des flux est nulle d'où :

$$G[\theta(x - dx) - \theta(x)] + [\theta_{ext} - \theta(x)]gdx = 0$$

En développant $\theta(x - dx) = \theta(x) - \frac{d\theta}{dx}dx$ il vient, après simplification :

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{g}{G} \cdot \theta(x) = \frac{g}{G} \cdot \theta_{ext}$$

4.2.4

Cette équation différentielle est du premier ordre à coefficient constant avec second membre, sa solution générale est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation avec second membre. On peut alors écrire :

$$\theta(x) = Ae^{-\frac{g}{G}x} + \theta_{ext} \quad x = 0 \quad \theta(0) = \theta_0 \Leftrightarrow \theta(x) - \theta_{ext} = [\theta_0 - \theta_{ext}]e^{-\frac{g}{G}x}$$

d'où on tire la valeur de l'écart relatif :

$$e_r = \frac{\theta(x) - \theta_{ext}}{\theta_0 - \theta_{ext}} = e^{-\frac{g}{G}x}$$

4.2.5 Application numérique :

Il faut d'abord passer en unités légales : $D_v = 360 \text{ litres/heure} = 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$

a) $\theta_0 = 90^\circ\text{C}$ $\theta_1 = 89^\circ\text{C}$ $g/G = 9,57 \cdot 10^{-4}$

$$\frac{84}{85} = e^{-9,57 \cdot 10^{-4} x_1} \quad \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{9,57 \cdot 10^{-4}} \ln \frac{85}{84} \quad \Leftrightarrow x_1 = 12,4 \text{ m}$$

b) Avec $L = 100 \text{ m}$ on a $\theta_L - 5 = 85 \cdot e^{-9,57 \cdot 10^{-2}}$ $\boxed{82,3^\circ\text{C}}$

c) Désignons par Φ_L le flux arrivant dans le pavillon et par Φ'_L le flux en sortant, on peut écrire : $\Phi_L - \Phi'_L = 10^4 \text{ W}$ d'où $G[\theta_L - \theta'_L] = 10^4$ et enfin :

$$\theta'_L = 58,4 \text{ } ^\circ\text{C}$$

De la même façon on écrit $\theta'_0 - 5 = (\theta'_L - 5)e^{-9,57 \cdot 10^{-2}}$ soit $\theta'_0 = 53,5 \text{ } ^\circ\text{C}$

d) D'après la relation $\Phi = G \cdot \theta(x)$ on peut écrire : $\Phi_0 = G \cdot \theta_0$ $\Phi'_0 = G \cdot \theta'_0$. Le flux net est alors :

$\Phi_{net} = \Phi_0 - \Phi'_0 = G \cdot (\theta_0 - \theta'_0)$. Avec les valeurs numériques déjà trouvées on obtient : $\Phi_{net} = 15,26 \cdot 10^3 \text{ W}$

e) De la même façon le flux perdu à l'aller vaut : $\Phi_{perdu} = G \cdot (\theta_0 - \theta_L) = 3,22 \cdot 10^3 \text{ W}$

f) Le flux perdu au retour est : $\Phi'_{perdu} = G \cdot (\theta'_L - \theta'_0) = 2,04 \cdot 10^3 \text{ W}$

g) Le flux perdu le long de la conduite vaut : $\Phi_{net} - \Phi_u = 5,26 \cdot 10^3 \text{ W}$. Le pourcentage des pertes par rapport au flux utile est $52,6 \%$. L'isolation de la conduite ne paraît pas suffisante, mais tout dépend du contexte. Si le flux net coûte cher, il faut éviter de perdre de la chaleur, d'où une bonne isolation de la conduite qui coûte elle-même cher. Si le flux net est un sous produit d'une activité industrielle (par exemple refroidissement d'une centrale nucléaire) on peut accepter une perte en ligne plus forte, car la conduite coûtera moins cher.