

Corrigé E3A PC 2009

PREMIÈRE PARTIE :

ETUDE THERMODYNAMIQUE DE L'AIR HUMIDE.

A/ RELATIONS GÉNÉRALES

A1. La loi des gaz parfaits peut s'écrire :

$$P_A V = n R T = (n_{\text{air}} + n_{\text{vap}}) R T \Rightarrow P_A = \underbrace{\frac{n_{\text{air}} R T}{V}}_{P_{\text{air}}} + \underbrace{\frac{n_{\text{vap}} R T}{V}}_{P_{\text{vap}}}$$

$$\text{donc : } \left. \begin{aligned} P_{\text{air}} &= m_{\text{air}} \frac{R}{M_{\text{air}}} \frac{T}{V} \\ P_{\text{vap}} &= m_{\text{vap}} \frac{R}{M_{\text{vap}}} \frac{T}{V} \end{aligned} \right\} \Rightarrow r_{\text{air}} = \frac{R}{M_{\text{air}}} \quad r_{\text{vap}} = \frac{R}{M_{\text{vap}}}$$

A2. On a :

$$w = \frac{m_{\text{vap}}}{m_{\text{air}}} = \frac{\frac{P_{\text{vap}}}{r_{\text{vap}}} \times \frac{V}{T}}{\frac{P_{\text{air}}}{r_{\text{air}}} \times \frac{V}{T}} = \frac{r_{\text{air}}}{r_{\text{vap}}} \times \frac{P_{\text{vap}}}{P_A - P_{\text{vap}}} \Rightarrow$$

$$w = \frac{M_{\text{vap}}}{M_{\text{air}}} \times \frac{P_{\text{vap}}}{P_A - P_{\text{vap}}} \Rightarrow \delta = \frac{M_{\text{vap}}}{M_{\text{air}}}$$

On peut résoudre en P_{vap} . Le calcul donne :

$$\frac{w}{\delta} (P_A - P_{\text{vap}}) = P_{\text{vap}} \Rightarrow P_{\text{vap}} = \frac{w/\delta}{1 + w/\delta} P_A = \frac{w}{w + \delta} P_A$$

$$A.N : \delta = \frac{18}{29} \approx 0,62.$$

A3*a. Si $HU_R = 0 \Rightarrow m_{\text{vap}} = 0$: l'air est sec !

Si $HU_R = 100\% \Rightarrow P_{\text{vap}} = P_{\text{sat}}$

A3*b. On a vu que $w = \delta \frac{P_{\text{vap}}}{P_A - P_{\text{vap}}}$. La fonction $w = f(P_{\text{vap}})$ est $\nearrow$ dans l'intervalle $[0; P_s]$, car $P_s < P_A \Rightarrow$

$$w_M = \delta \frac{P_s}{P_A - P_s} \approx 0,62 \times \frac{3200}{101300} \approx 0,02 \approx 2\%$$

A3*c. Etudions les différents cas :

- Pour une élévation isobare de température, P_A reste constante. Par contre, le graphe fourni dans l'énoncé montre que P_s est une fonction croissante de la température. On déjà vu dans la question précédente que la fonction w_M est une fonction croissante de P_s . Finalement, on voit qu'une élévation isobare de température entraîne une augmentation de w_M .
- Pour une augmentation isotherme de pression, on a alors $P_A \nearrow$, à $P_s = C^{\text{ste}} \Rightarrow w_M$ va diminuer.

A4*a. On a les relations suivantes :

$$P_{\text{air}} = m_{\text{air}} r_{\text{air}} \frac{T}{V} \quad P_{\text{vap}} = m_{\text{vap}} r_{\text{vap}} \frac{T}{V} \quad P_A = P_{\text{air}} + P_{\text{vap}}$$

$$\Rightarrow P_A = \frac{T}{V} (m_{\text{air}} r_{\text{air}} + m_{\text{vap}} r_{\text{vap}}) \quad (1)$$

De plus :

$$HU_R = \frac{P_{\text{vap}}}{P_s} = \frac{P_A}{P_s} \times \frac{w}{w + \delta} = \frac{P_A}{P_s} \times \frac{\frac{m_{\text{vap}}}{m_{\text{air}}}}{\frac{m_{\text{vap}}}{m_{\text{air}}} + \delta}$$

$$HU_R = \frac{P_A}{P_s} \frac{m_{\text{vap}}}{m_{\text{vap}} + \delta m_{\text{air}}} \Rightarrow m_{\text{vap}} = \delta \frac{HU_R P_s}{P_A - HU_R P_s} m_{\text{air}}$$

En injectant cette relation dans (1), on obtient :

$$\frac{P_A V}{T} = \left(r_{\text{air}} + r_{\text{vap}} \delta \frac{HU_R P_s}{P_A - HU_R P_s} \right) m_{\text{air}} \Rightarrow$$

$$m_{\text{air}} = \frac{P_A V}{T \left(r_{\text{air}} + r_{\text{vap}} \delta \frac{HU_R P_s}{P_A - HU_R P_s} \right)} \approx 410 \text{ kg}$$

d'où :

$$m_{\text{vap}} = \delta \frac{HU_R P_s}{P_A - HU_R P_s} m_{\text{air}} \approx 3,25 \text{ kg}$$

La masse totale d'air humide est évidemment :

$$m_h = m_{\text{air}} + m_{\text{vap}} \approx 413 \text{ kg}$$

A4*b. La température étant descendue à 5°C , la pression de vapeur saturante est maintenant voisine de $P_s \approx 900 \text{ Pa}$. Calculons la pression de la vapeur d'eau *en la supposant toujours entièrement sous forme gazeuse*, donc en supposant $P_{\text{vap}} < P_s$:

$$P_{\text{vap}} = m_{\text{vap}} r_{\text{vap}} \frac{T}{V} \approx 1280 \text{ Pa} > P_s \Rightarrow \text{impossible}$$

De la vapeur s'est donc condensée, et la pression de vapeur dans le local vaut P_s : l'humidité relative est donc de 100%.

On en déduit immédiatement la masse d'eau m' sous forme gazeuse :

$$m' = \frac{P_s V}{r_{\text{vap}} T} \approx 2,30 \text{ kg}$$

et donc la masse d'eau qui s'est condensée :

$$m_{\text{eau}} = m_{\text{vap}} - m' \approx 0,95 \text{ kg}$$

A5*a. La température de rosée est atteinte quand toute l'eau est sous forme vapeur, à la pression P_s . On a alors :

$$HU_R = 100\% \Rightarrow \frac{P_A}{P_s} \frac{m_{\text{vap}}}{m_{\text{vap}} + \delta m_{\text{air}}} = 1 \Rightarrow$$

$$P_s = \frac{m_{\text{vap}} P_A}{m_{\text{vap}} + \delta m_{\text{air}}} \approx \frac{3,25 \times 101300}{3,25 + 0,62 \times 410} \approx 1280 \text{ Pa}$$

La lecture de la courbe fournie donne alors : $\theta_{\text{rosée}} \approx 10^\circ\text{C}$

A5*b. Si la nouvelle température de rosée vaut 8°C , la courbe donne : $P_s \approx 1100 \text{ Pa}$. La masse d'eau présente dans le local est donc :

$$m'' = \frac{P_s V}{r_{\text{vap}} T} \approx 2,97 \text{ kg}$$

La masse d'air se déduit de $P_A = \frac{T}{V} (m_{\text{air}} r_{\text{air}} + m_{\text{vap}} r_{\text{vap}}) \Rightarrow$

$$m_{\text{air}} = \frac{1}{r_{\text{air}}} \left(\frac{P_A V}{T} - m'' r_{\text{vap}} \right) \approx 410,4 \text{ kg}$$

(le résultat est très peu différent de celui de la question **A4*a**, comme on pouvait s'y attendre !)

On en déduit l'humidité absolue à 25°C :

$$w = \frac{m''}{m_{\text{air}}} \approx \frac{2,97}{410,4} \approx 0,73\%$$

et l'humidité relative à la même température :

$$HU_R = \frac{P_A}{P_s} \times \frac{w}{w + \delta} \approx \frac{101300}{3200} \times \frac{7,3 \times 10^{-3}}{0,62 + 7,3 \times 10^{-3}} \approx 25\%$$

B/ ETUDE DE L'ÉQUILIBRE EN VASE CLOS

B1. Un potentiel thermodynamique est une fonction des variables d'état du système qui va décroître lors d'une évolution spontanée du système ; elle sera minimale à l'équilibre.

B2. Une transformation monotherme et monobare est caractérisée par le contact avec un pressostat à la pression P_A et un thermostat à la température T_A . Exprimons $dU = \delta W + \delta Q$:

$$\left. \begin{aligned} \delta W &= -P_A dV \\ dS &= \frac{\delta Q}{T_A} + \delta S_c \end{aligned} \right\} \Rightarrow dU = -P_A dV + T_A dS - T_A \delta S_c$$

Et donc : $d(U + P_A V - T_A S) = -T_A \delta S_c \leq 0$. On peut donc introduire le potentiel thermodynamique :

$$G^* = U + P_A V - T_A S$$

qui sera minimal à l'équilibre.

B3*a. On considère maintenant une transformation pour laquelle l'équilibre mécanique et thermique est assuré à tout instant : $T = T_A$ et $P = P_A$. De l'expression de $G = U + PV - TS$ on tire dans ces conditions :

$$dG = dU + P_A dV - T_A dS$$

expression qui est bien la même que celle de dG^* .

Revenons à l'expression de dG . On sait que G est une fonction des variables P, T, n_i . On peut donc écrire :

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial P} \right)_{T, n_i} dP + \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_{P, n_i} dT + \sum_i \left(\frac{\partial G}{\partial n_i} \right)_{T, P} dn_i$$

Comme $P = P_A = C^{\text{ste}}$, $T = T_A = C^{\text{ste}}$, $\mu_i = \left(\frac{\partial G}{\partial n_i} \right)_{T, P} \Rightarrow$

$$dG = \sum_i \mu_i dn_i = \mu_{\text{liq}} dn_{\text{liq}} + \mu_{\text{vap}} dn_{\text{vap}}$$

On a bien finalement $dG^* = \mu_{\text{liq}} dn_{\text{liq}} + \mu_{\text{vap}} dn_{\text{vap}}$.

B3*b. La conservation de la matière pour le changement d'état *liquide* $\leftrightarrow$ *vapeur* s'écrit :

$$n_{\text{liq}} + n_{\text{vap}} = n_{\text{tot}} = C^{\text{ste}} \Rightarrow dn_{\text{liq}} + dn_{\text{vap}} = 0$$

donc : $dG^* = (\mu_{\text{vap}} - \mu_{\text{liq}}) dn_{\text{vap}}$

- Le potentiel chimique de la phase liquide vaut $\mu_{\text{liq}} = \mu_{\text{liq}}^0(T)$ car le liquide est seul dans sa phase
- Le potentiel chimique de la phase gazeuse vaut

$$\mu_{\text{vap}} = \mu_{\text{vap}}^0 + RT \ln \left(\frac{P_{\text{vap}}}{P^0} \right)$$

On en déduit donc :

$$\begin{aligned} dG^* &= \left(\mu_{\text{vap}}^0 + RT \ln \left(\frac{P_{\text{vap}}}{P^0} \right) - \mu_{\text{liq}}^0(T) \right) dn_{\text{vap}} \\ &= \left(RT \ln \left(\frac{P_{\text{vap}}}{P^0} \right) - RT \ln \left(\frac{P_s(T)}{P^0} \right) \right) dn_{\text{vap}} \end{aligned}$$

Finalement :

$$dG^* = RT \ln \left(\frac{P_{\text{vap}}}{P_s} \right) dn_{\text{vap}}$$

B3*c. Si $P_{\text{vap}}(0) < P_s(T) \Rightarrow \ln \left(\frac{P_{\text{vap}}(0)}{P_s(T)} \right) < 0$. Comme dG^* doit être négatif pour une évolution spontanée, il faut donc que $dn_{\text{vap}} > 0 \Rightarrow$ une partie du liquide va se transformer en vapeur. Si l'état d'équilibre final est diphasé, on doit avoir $0 < n_{\text{liq}} < n_0 + n_1$. Par conservation de la matière, on a

$$n_{\text{vap}} = n_0 + n_1 - n_{\text{liq}} > 0.$$

A l'équilibre, on a :

$$P_s = P_{\text{vap}} = \frac{n_{\text{vap}}}{n_{\text{vap}} + n_{\text{air}}} P \Rightarrow n_{\text{vap}} = n_{\text{air}} \frac{P_s}{P - P_s}$$

$$\text{d'où : } n_{\text{air}} \frac{P_s}{P - P_s} + n_{\text{liq}} = n_0 + n_1$$

B3*d. Etudions les cas proposés, en calculant

$$n_{\text{liq}} = n_0 + n_1 - n_{\text{air}} \frac{P_s}{P - P_s}$$

i) on trouve

$$n_{\text{liq}} \approx 3,6 \times 10^{-2} \text{ mol} \Rightarrow n_{\text{vap}} \approx 0,364 \text{ mol}$$

ii) les données fournies mènent à une valeur de $n_{\text{liq}} < 0 \Rightarrow$ le système final n'est donc pas diphasé : toute l'eau est sous forme de vapeur :

$$n_{\text{liq}} = 0 \Rightarrow n_{\text{vap}} = n_0 + n_1 = 0,35 \text{ mol}$$

C/ EVAPORATION DE L'EAU LIQUIDE

C1. La loi de FICK relie la densité volumique particulaire $n_{\text{vap}}(M, t)$ au vecteur densité de courant particulaire $\vec{j}(M, t) = n_{\text{vap}}(M, t) \vec{v}(M, t)$:

$$\vec{j}(M, t) = -D \overrightarrow{\text{grad}}(n_{\text{vap}}(M, t))$$

Elle exprime le fait que la diffusion, phénomène irréversible, tend à uniformiser la densité particulaire.

L'équation de la diffusion résulte de la combinaison de la loi de FICK avec l'équation de continuité :

$$\text{div}(\vec{j}(M, t)) + \left(\frac{\partial n_{\text{vap}}(M, t)}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$D \Delta n_{\text{vap}}(M, t) = \left(\frac{\partial n_{\text{vap}}(M, t)}{\partial t} \right)$$

Dans le cas unidimensionnel le long de l'axe z :

$$D \left(\frac{\partial^2 n_{\text{vap}}(z, t)}{\partial z^2} \right) = \left(\frac{\partial n_{\text{vap}}(z, t)}{\partial t} \right)$$

C2*a. Entre t_0 et $t_0 + dt$, la tranche de hauteur dh de liquide disparaissant au sommet de $\mathcal{C}$ laisse place à de la vapeur d'eau, occupant le même volume. Le nombre de molécules d'eau contenues dans $\mathcal{C}$ est donc :

$$\begin{aligned} \text{à } t_0 &: N(t_0) = n_{\text{liq}} S h(t_0) \\ \text{à } t_0 + dt &: N(t_0 + dt) = n_{\text{liq}} S h(t_0 + dt) \\ &\quad - n_{\text{vap}}(h(t_0), t_0) S dh \end{aligned}$$

Remarque : signe $-$ dans la dernière ligne car $dh < 0$.

On a donc :

$$\begin{aligned} dN &= N(t_0 + dt) - N(t_0) \\ &= n_{\text{liq}} S h(t_0 + dt) - n_{\text{vap}}(h(t_0), t_0) S dh - n_{\text{liq}} S h(t_0) \\ &= n_{\text{liq}} S \frac{dh(t_0)}{dt} dt - n_{\text{vap}}(h(t_0), t_0) S \frac{dh(t_0)}{dt} dt \\ &= (n_{\text{liq}} - n_{\text{vap}}(h(t_0), t_0)) S \frac{dh(t_0)}{dt} dt \end{aligned}$$

Ce qui est la formule du texte, au facteur S près afin de rendre la formule homogène !

C2*b. Il est clair que la variation dN est liée aux molécules d'eau s'échappant du cylindre $\mathcal{C}$ par sa face supérieure, qu'on peut calculer à l'aide du vecteur densité de courant particulaire (attention au signe...) :

$$dN = -j(h_0, t) S dt = D \left(\frac{\partial n_{\text{vap}}(h_0, t)}{\partial z} \right) S dt$$

On obtient finalement :

$$\begin{aligned} D \left(\frac{\partial n_{\text{vap}}(h_0, t)}{\partial z} \right) S dt &= (n_{\text{liq}} - n_{\text{vap}}(h(t_0), t_0)) S \frac{dh(t_0)}{dt} dt \Rightarrow \\ \frac{dh(t_0)}{dt} &= \frac{D}{n_{\text{liq}} - n_{\text{vap}}(h(t_0), t_0)} \left(\frac{\partial n_{\text{vap}}(h(t_0), t)}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

C3 Loi de FOURIER : $\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda_{\text{liq}} \overrightarrow{\text{grad}}(T)$. L'équation de continuité dans le liquide est : $\text{div}(\vec{j}_{\text{th}}) + \rho_{\text{liq}} c \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) = 0$, ce qui donne finalement l'équation de la chaleur au sein du liquide :

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \frac{\rho_{\text{liq}} c}{\lambda_{\text{liq}}} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)$$

c étant la chaleur massique du liquide, curieusement absente des données de l'énoncé ...

C4. Soit dz l'épaisseur de la tranche supérieure de liquide qui va se vaporiser pendant dt . Il est clair que $dz = -dh$ et donc que $dz = -\left(\frac{\partial h}{\partial t} \right) dt$.

La vaporisation de la tranche de gaz nécessite de la chaleur, qui va être fournie par le liquide situé en dessous et le gaz situé au dessus. On a donc :

$$\rho_{\text{liq}} S dz L_V = j_{\text{th}}(h(t), t) S dt + K_{\text{cc}} S (T_A - T(h(t), t)) dt$$

Soit :

$$-\rho_{\text{liq}} L_V \left(\frac{\partial h}{\partial t} \right) = -\lambda_{\text{liq}} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) + K_{\text{cc}} (T_A - T(h(t), t)) \Rightarrow$$

$$\lambda_{\text{liq}} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) + K_{\text{cc}} (T(h(t), t) - T_A) = \rho_{\text{liq}} L_V \left(\frac{\partial h}{\partial t} \right)$$

C5*a. Si le régime est quasi-stationnaire, on peut alors résoudre dans le liquide l'équation de la chaleur en régime permanent, et appliquer le résultat à la date t :

$$(\text{régime permanent}) \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = 0 \Rightarrow T(z) = a z + b$$

Comme la température en $z = 0$ vaut T_A , on a donc

$$T(z) = a z + T_A$$

En appliquant maintenant ce résultat au régime quasi-stationnaire, le coefficient a devient une fonction lentement variable de t :

$$T(z, t) = a(t) z + T_A$$

C5*b. Posons $v = -\frac{dh}{dt} = -\frac{dz}{dt}$. Le résultat précédent peut s'écrire $T(z, t) = a(t) h(t) + T_A$. En reportant dans l'équation (C4) :

$$\lambda_{\text{liq}} a(t) + K_{\text{cc}} (a(t) h(t) + T_A - T_A) = -v(t) \rho_{\text{liq}} L_V \Rightarrow$$

$$a(t) (\lambda_{\text{liq}} + K_{\text{cc}} h(t)) = -v(t) \rho_{\text{liq}} L_V \Rightarrow a(t) = \frac{-v(t) \rho_{\text{liq}} L_V}{\lambda_{\text{liq}} + K_{\text{cc}} h(t)}$$

C5*c. Comme $v(t) > 0$, on en déduit que $a(t) < 0$: la température décroît donc dans le liquide à partir du fond vers la surface ; la température moyenne du liquide est donc diminuée par le phénomène d'évaporation.

Cette diminution va favoriser l'évaporation : en effet, la chaleur nécessaire à la vaporisation provient de l'atmosphère et du liquide (c.f. C4), et les deux quantités sont d'autant plus grandes que la température de la surface du liquide est faible.

DEUXIÈME PARTIE :

MESURE DE L'HUMIDITÉ DE L'AIR HUMIDE.

A/ PSYCHROMÈTRE

A1. La masse d'air ne changeant pas au cours de la transformation, on a :

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{m_{\text{vap}}}{m_{\text{air}}} \\ w_M &= \frac{m_{\text{vap}} + m_{\text{év}}}{m_{\text{air}}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{m_{\text{vap}} + m_{\text{év}}}{m_{\text{vap}}} = \frac{w_M}{w}$$

A2. On peut écrire pour le système $\mathcal{S}$: $\Delta U = W + Q$. La transformation étant isobare, $\delta W = -P_A dV \Rightarrow$

$$\left. \begin{aligned} \Delta U &= W \\ W &= -P_A \Delta V \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta(U + P_A V) = 0 \Rightarrow \Delta H = 0$$

A3. Ecrivons les différentes variations d'enthalpie des parties de $\mathcal{S}$:

- air : $\Delta H_{\text{air}} = m_{\text{air}} c_{p(\text{air})} (T_h - T)$
- vapeur : $\Delta H_{\text{vap}} = m_{\text{vap}} c_{p(\text{vap})} (T_h - T)$
- eau liquide se vaporisant :

$$\Delta H_{\text{év}} = m_{\text{év}} L_V(T)$$

On peut donc écrire, par extensivité de H :

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta H_{\text{air}} + \Delta H_{\text{vap}} + \Delta H_{\text{év}} \\ &= (m_{\text{air}} c_{p(\text{air})} + m_{\text{vap}} c_{p(\text{vap})}) (T_h - T) + m_{\text{év}} L_V(T_h) \end{aligned}$$

En divisant par m_{air} :

$$0 = (c_{p(\text{air})} + w c_{p(\text{vap})}) (T_h - T) + \frac{m_{\text{év}}}{m_{\text{air}}} L_V(T_h)$$

Or $m_{\text{év}}/m_{\text{air}} = w_M - w \Rightarrow$

$$(w_M - w) L_V(T_h) = (c_{p(\text{air})} + w c_{p(\text{vap})}) (T - T_h)$$

A4*a. La résolution en w est immédiate :

$$w = \frac{w_M L_V(T_h) + c_{p(\text{air})}(T_h - T)}{L_V(T_h) + c_{p(\text{vap})}(T - T_h)} \\ = \frac{\delta \frac{P_s(T_h)}{P_A - P_s(T_h)} L_V(T_h) + c_{p(\text{air})}(T_h - T)}{L_V(T_h) + c_{p(\text{vap})}(T - T_h)}$$

A4*b. Si la variation de température n'excède pas quelques degrés, il est clair que

$$L_V(T_h) \gg c_{p(\text{vap})}(T - T_h)$$

car $L_V(T) \approx 2500 \text{ kJ/kg}$, $c_{p(\text{vap})} \Delta T \approx 2 \text{ à } 4 \text{ kJ/kg}$. On a donc :

$$w = \frac{\delta \frac{P_s(T_h)}{P_A - P_s(T_h)} L_V(T_h) + c_{p(\text{air})}(T_h - T)}{L_V(T_h)} \\ = \delta \frac{P_s(T_h)}{P_A - P_s(T_h)} + \frac{c_{p(\text{air})}}{L_V(T_h)}(T_h - T) \\ = \delta \frac{P_s(T_h)}{P_A - P_s(T_h)} \left[1 - \frac{c_{p(\text{air})}}{L_V(T_h)} \times \frac{P_A - P_s(T_h)}{\delta P_s(T_h)} (T - T_h) \right] \\ = \delta \frac{P_s(T_h)}{P_A - P_s(T_h)} [1 - A(T - T_h)] \\ \text{en posant : } A = \frac{c_{p(\text{air})}}{L_V(T_h)} \times \frac{P_A - P_s(T_h)}{\delta P_s(T_h)}$$

$$A.N : A \approx 4,38 \times 10^{-2} \text{ K}^{-1}$$

A5. La courbe fournit :

- $T_h = 280 \text{ K} \approx 7^\circ\text{C} \Rightarrow P_s(T_h) \approx 1000 \text{ Pa}$
- $T = 288 \text{ K} \approx 15^\circ\text{C} \Rightarrow P_s(T) \approx 1700 \text{ Pa}$

On peut donc calculer HU_R :

$$HU_R \approx \frac{1000}{1700} (1 - 6,6 \times 10^{-2} \times 8) \approx 28\%$$

B/ Hygromètre capacitif

B1. La modification de la constante diélectrique du condensateur provient de la forte constante diélectrique de l'eau ($\epsilon_r \approx 81$)

B2. On a $C_h = C_0(1 + a HU_r) \Rightarrow$

$$\left. \begin{array}{l} HU_r = 0 \Rightarrow C_h = C_0 = 110 \text{ pF} \\ HU_r = 1 \Rightarrow C_h = C_0(1 + a) = 250 \text{ pF} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} C_0 = 110 \text{ pF} \\ a \approx 1,273 \end{array}$$

B3. Supposons la diode D_a passante : le courant dans R_a est donc positif de $A \rightarrow B$. On en déduit évidemment que $U_{AB} \geq 0$. Ceci est incompatible avec la diode D_b passante qui imposerait une tension $U_{AB} \leq 0$.

On a donc :

$$\begin{array}{l} D_a \text{ passante} \Rightarrow (AB) \text{ équivalent à } R_a \\ D_b \text{ passante} \Rightarrow (AB) \text{ équivalent à } R_b \end{array}$$

B4*a. Quand la tension $u_e(t)$ est positive, le condensateur se charge à travers R_a : $u_c(t) + R_a C \frac{du_c(t)}{dt} = E \Rightarrow$

$$u_c(t) = E \left(1 - e^{-t/\tau_a} \right) \quad \tau_a = R_a C_h$$

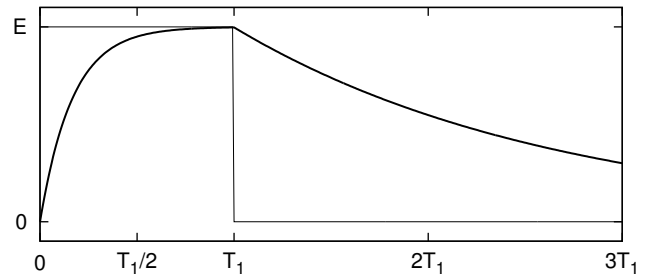
B4*b. Quand la tension d'entrée passe à 0, le condensateur va se décharger à travers R_b . On a alors l'équation différentielle suivante :

$$u_c(t) + R_b C_h \frac{du_c(t)}{dt} = 0 \Rightarrow u_c(t) = A e^{-t/\tau_b} \quad \tau_b = R_b C_h$$

La détermination de A se fait par continuité de la tension aux bornes du condensateur :

$$u_c(T_1) = E \left(1 - e^{-T_1/\tau_a} \right) = A e^{-T_1/\tau_b} \Rightarrow A = E \frac{1 - e^{-T_1/\tau_a}}{e^{-T_1/\tau_b}} \Rightarrow \\ u_c(t) = E \left(1 - e^{-T_1/\tau_a} \right) e^{-(t-T_1)/\tau_b}$$

B4*c. Le tracé a l'allure suivante :



la décroissance de la tension pour $t > T_1$ est bien moins rapide que la montée, car si $R_b = 10 R_a \Rightarrow \tau_b = 10 \tau_a$.

B5*a. L'AOP fonctionnant en régime de saturation, la tension différentielle d'entrée $\varepsilon = v_+ - v_-$ fixe le signe de la tension de sortie $u_1(t)$: $u_1(t) = \text{signe}(\varepsilon) \times U_{\text{SAT}}$.

- Au début de chaque période, donc en particulier à $t = 0^+$, la tension d'entrée $u_e(0^+) = +E \Rightarrow v_+ = E/2$ (formule du pont diviseur)
- Quand $t = 0^-$, la tension $v_- = 0$ (elle est égale à celle existant aux bornes du condensateur). Par continuité de cette tension, on a donc $v_-(0^+) = 0$

Il s'en suit donc que $\varepsilon(0^+) > 0 \Rightarrow u_1(0^+) = +E$

La tension aux bornes de C_h va donc augmenter (c.f. question précédente) pour atteindre E . L'AOP va pouvoir basculer de $+U_{\text{SAT}}$ à $-U_{\text{SAT}}$ si ε devient négatif, donc si $v_- > v_+ = \frac{E}{2}$. Or $u_c(t) = E \left(1 - e^{-t/\tau_a} \right)$, maximale quand $t = T_1 \Rightarrow$ il faut donc :

$$E \left(1 - e^{-T_1/\tau_a} \right) > \frac{E}{2} \Rightarrow T_1 \geq \tau_a \times \ln(2)$$

Si cette dernière condition est satisfaite, l'AOP va basculer à la date T_2 définie par :

$$E \left(1 - e^{-T_2/\tau_a} \right) = \frac{E}{2} \Rightarrow T_2 = \tau_a \times \ln(2)$$

B5*b. Il faut que le circuit fonctionne quelle que soit la valeur du taux d'humidité ($\Rightarrow$ quelque soit la capacité du condensateur). On va donc évaluer T_1 en utilisant la plus grande valeur possible pour τ_a , et donc pour C_h le plus grand possible.

A.N : $\tau_a = 250 \times 10^{-12} \times 2,7 \times 10^6 = 6,75 \times 10^{-4} \text{ s}$, ce qui donne :

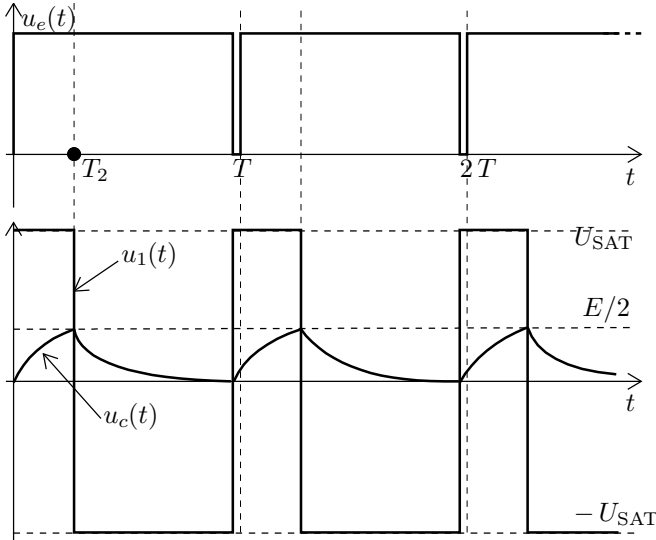
$$T_1 \geq 4,68 \times 10^{-4} \text{ s}$$

ce qui donne pour T_2 , en minimisant avec la valeur obtenue pour C_h la plus faible possible :

$$2,06 \times 10^{-4} \text{ s} \leq T_2 \leq 4,68 \times 10^{-4} \text{ s}$$

B5*c. Le fait d'avoir $T = T_1$ sous-entend « certainement » que le signal périodique d'entrée est une impulsion négative ramenant très brièvement u_e à 0 à chaque début de période. Ainsi, v_+ est aussi nul tandis que v_- est encore très légèrement positif, permettant ainsi le basculement de la tension de sortie $u_1(t)$ de $-U_{\text{SAT}}$ à $+U_{\text{SAT}}$.

On a donc les graphes suivants :



B6. Analysons les différents cas :

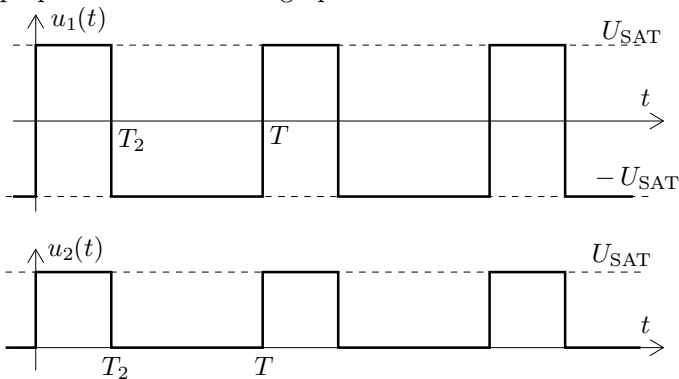
- Si D_1 est passante, on a alors :

$$v_+ = R_1 i_1 \geq 0 \Rightarrow u_1 \geq 0 \text{ et } u_D = 0$$

- Si D_1 est bloquée, on a :

$$v_+ = 0 \Rightarrow u_1 < 0 \text{ et } u_D < 0$$

L'AOP étant câblé en suiveur, on a bien sûr : $u_2 = v_+$, ce qui permet de tracer les graphes suivants :



B7*a. Le calcul est évident (surface d'un rectangle divisée par la période) :

$$\langle u_2(t) \rangle = \frac{U_{\text{SAT}} \times T_2}{T} = U_{\text{SAT}} \frac{T_2}{T}$$

B7*b. Etant en régime périodique, on peut donc écrire :

$$q(0) = q(T) \Rightarrow \int_0^T \frac{dq(t)}{dt} dt = 0 \Rightarrow \int_0^T i_c dt = 0 \Rightarrow \langle i_c \rangle = 0$$

Comme $i = i_c + i_3 = i_c + \frac{u_3}{R_3}$, on en déduit :

$$\langle i \rangle = \langle i_c \rangle + \frac{1}{R_3} \langle u_3 \rangle$$

Enfin, $u_2 = R_2 i + u_3 \Rightarrow \langle u_2 \rangle = R_2 \frac{1}{R_3} \langle u_3 \rangle + \langle u_3 \rangle \Rightarrow$

$$\langle u_3 \rangle = \frac{R_3}{R_2 + R_3} \langle u_2 \rangle \Rightarrow \langle u_3 \rangle = \frac{R_3}{R_2 + R_3} U_{\text{SAT}} \frac{T_2}{T}$$

On posera dans la suite $\alpha = \frac{R_3}{R_2 + R_3}$ pour simplifier les expressions.

B8*a,b. Etablissons tout d'abord l'équation différentielle vérifiée par $u_3(t)$. On a :

$$\left. \begin{aligned} u_2(t) &= u_3(t) + R_2 i(t) \\ i(t) &= i_c(t) + \frac{u_3(t)}{R_3} \\ i_c &= \dot{q} = C \dot{u}_3(t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} u_2(t) &= u_3(t) + \\ &R_2 \left(C \dot{u}_3(t) + \frac{u_3(t)}{R_3} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Soit : } u_3(t) + \tau \frac{du_3(t)}{dt} = \alpha u_2(t) \quad \text{avec : } \begin{cases} \tau = \frac{R_2 R_3 C}{R_2 + R_3} \\ \alpha = \frac{R_3}{R_2 + R_3} \end{cases}$$

- Si $t \in [0, T_2]$, on a : $u_2(t) = U_{\text{SAT}} \Rightarrow$

$$u_3(t) + \tau \frac{du_3(t)}{dt} = \alpha U_{\text{SAT}}$$

La solution de cette équation différentielle est :

$$u_3(t) = \alpha U_{\text{SAT}} + A e^{-t/\tau}$$

La valeur minimale de cette tension doit correspondre à $t=0$ (on charge un condensateur...) $\Rightarrow$

$$U_{\text{min}} = \alpha U_{\text{SAT}} + A \Rightarrow A = U_{\text{min}} - \alpha U_{\text{SAT}}$$

Finalement :

$$u_3(t) = \alpha U_{\text{SAT}} + (U_{\text{min}} - \alpha U_{\text{SAT}}) e^{-t/\tau}$$

- Si $t \in [T_2, T]$, on a $u_2(t) = 0 \Rightarrow$

$$u_3(t) + \tau \frac{du_3(t)}{dt} = 0 \Rightarrow u_3(t) = B e^{-t/\tau}$$

La valeur maximale de cette tension doit correspondre à $t=T_2$ (décharge d'un condensateur) $\Rightarrow$

$$U_{\text{max}} = B e^{-T_2/\tau} \Rightarrow u_3(t) = U_{\text{max}} e^{-(t-T_2)/\tau}$$

B8*c. La détermination de U_{max} et U_{min} est classique : on va utiliser la périodicité et la continuité de $u_3(t)$:

$$u_3(0^+) = u_3(T^-) \quad u_3(T_2^-) = u_3(T_2^+)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} U_{\text{min}} = U_{\text{max}} e^{-(T-T_2)/\tau} \\ \alpha U_{\text{SAT}} + (U_{\text{min}} - \alpha U_{\text{SAT}}) e^{-T/\tau} = U_{\text{max}} \end{cases}$$

La résolution de ce système est facile, elle conduit à :

$$\begin{cases} U_{\text{min}} = \alpha U_{\text{SAT}} \frac{1 - e^{-T_2/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}} e^{-(T-T_2)/\tau} \\ U_{\text{max}} = U_{\text{min}} e^{-(T_2-T)/\tau} = \alpha U_{\text{SAT}} \frac{1 - e^{-T_2/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}} \end{cases}$$

qui sont bien les expressions fournies dans l'énoncé.

B8*d. Le taux d'ondulation est défini par :

$$\rho = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{\langle u_3(t) \rangle} = \frac{\phi U_{\text{SAT}} \frac{1 - e^{-T_2/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}} \times \left(e^{-(T_2-T)/\tau} - 1 \right)}{\phi U_{\text{SAT}} \frac{T_2}{T}} \Rightarrow$$

$$\rho = \frac{T}{T_2} \left(e^{(T-T_2)/\tau} - 1 \right) \frac{1 - e^{-T_2/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}}$$

A.N : En prenant le cas le plus défavorable, correspondant à la valeur de T_2 la plus faible ($T_2 = 2,06 \times 10^{-4}$ s), on obtient $\rho \approx 4\%$ (Pour $T_2 \approx 4,68 \times 10^{-4}$ s, $\rho \approx 2,7\%$)

B8.e) Le taux d'ondulation est nul quand $T = T_2$: il sera certainement faible si $T_2 \lesssim T$: il faut donc augmenter la constante de temps de charge du condensateur.

B9. La valeur mesurée donnée par le dispositif correspond à la valeur moyenne de $u_3(t)$. On a donc :

$$\begin{aligned} u_3 &= \frac{R_3}{R_2 + R_3} U_{\text{SAT}} \frac{T_2}{T} \\ &= \frac{R_3}{R_2 + R_3} \frac{U_{\text{SAT}}}{T} \ln(2) \times R_a C_h \\ &= \ln(2) \times \frac{R_3}{R_2 + R_3} \times \frac{U_{\text{SAT}}}{T} \times R_a C_0 (1 + a HU_r) \end{aligned}$$

Et donc :

$$HU_r = \frac{1}{a} \left(\frac{T (R_2 + R_3) u_3}{\ln(2) R_3 U_{\text{SAT}} R_a C_0} - 1 \right) \approx 79\%$$