

I) L'expérience d'Elmer Chomson:

I.1 Considérations générales: 1) Champ radial au voisinage de l'axe le champ magnétique $\vec{B}$ est

à flux conservatif $\rightarrow$ le flux à travers un cylindre élémentaire de rayon r , d'axe Oz , compris entre z et $z+dz$ est nul et sur les faces $B_z(r,z) \approx B_0(z)$ si $r \ll b$, sur la surface latérale $B_r(r,z) \approx B_r(r,z)$ pour $z \leq z' \leq z+dz$.

$$\text{donc } (B_0(z+dz) - B_0(z)) \pi r^2 + B_r(r,z) 2\pi r dz = 0 \rightarrow \boxed{B_r(r,z,t) = -\frac{r}{2} \frac{dB_0}{dz} \cos \omega t \vec{e}_r}$$

2) Résultante des forces électromagnétiques appliquées à l'anneau de par la symétrie de révolution, elle est dirigée selon l'axe Oz la composante selon Oz de la force subie par un élément $d\vec{l}$ de l'anneau est $d\vec{F} = i_A d\vec{l} \wedge \vec{B}_r = -i_A B_r(r,z,t) d\vec{l} \wedge \vec{e}_\phi$ d'où $\vec{F} = -i_A B_r(r,z,t) 2\pi r \vec{e}_z = i_A \pi r^2 \frac{dB_0}{dz} \cos \omega t \vec{e}_z = i_A \frac{d\Phi}{dz} \vec{e}_z$

Or M est défini par $\Phi = M i_s(t)$ donc $\boxed{\vec{F} = i_A (M i_s(t)) \frac{dM}{dz} \vec{e}_z}$

3) Force électromotrice induite par (S) dans (A) $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(M i_s(t))$ Si l'anneau est fixe $\mathcal{E} = -M \frac{di_s}{dt}$

4) Cas où $a \ll b$ on suppose que le champ $\vec{B}$ est uniforme sur la section du rayon

$$\Phi(z,t) \approx \pi a^2 B_0(z) \cos \omega t = \Phi_0(z) \cos \omega t$$

En supposant l'anneau fixe et donc M constant $\rightarrow$

$$\boxed{\mathcal{E} = \omega \Phi_0(z) \sin(\omega t)}$$

si on $\mathcal{E} = \omega \Phi_0(z) \sin(\omega t) = \frac{d\Phi}{dt} \cos \omega t$

5) Résultante des forces de Laplace: d'où l'on obtient

$$\boxed{\vec{F} = i_A \frac{d\Phi_0}{dz} \cos \omega t \vec{e}_z}$$

6) Inductance propre de (A) et inductance mutuelle:

Pour une spire unique, l'inductance propre est L_A . Pour N spires, le champ propre $\vec{B}_A$ est multiplié par N (à i_A fixé) donc le flux propre à travers les N spires est multiplié par $N^2 \rightarrow \boxed{L_A = N^2 L_A}$

Inductance mutuelle M est proportionnelle au flux du champ $\vec{B}$ de (S) à travers les N spires donc $M \propto N$ d'où la relation $\boxed{M = N M_A}$

I.2 Modélisation de la première série d'expériences

1) Régime temporelle de la résultante des forces de Laplace: $L_A = 0$ ici $\mathcal{E} = -N M_A \frac{di_s}{dt} = N L_A i_A(t)$

$$i_A(t) = \frac{M_A I_s}{L_A} \omega \sin(\omega t) \text{ et } \vec{F}_L(t) = \frac{M_A}{L_A} I_s^2 \omega \sin \omega t \cos \omega t N \frac{dM_A}{dz} \vec{e}_z \quad \langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = \langle \frac{\sin 2\omega t}{2} \rangle = 0 \rightarrow \langle \vec{F}_L \rangle = \vec{0}$$

2) Cas où $L_A \neq 0$ mais $L_A = 0$ $\mathcal{E} = -N M_A \frac{di_s}{dt} = N L_A \frac{di_A}{dt}$

$$\text{il vient } i_A(t) = -\frac{L_A}{L_A} i_s(t) \text{ en régime sinusoïdal établi } \rightarrow \vec{F}_L(t) = -\frac{M_A}{L_A} I_s^2 \cos^2 \omega t N \frac{dM_A}{dz} \vec{e}_z$$

3) Compatibilité avec l'expérience:

$$\boxed{\langle \vec{F}_L \rangle = -\frac{N M_A}{L_A} I_s^2 \frac{dM_A}{dz} \vec{e}_z}$$

$B_0(z)$ est une fonction décroissante pour $z > 0$ donc $\frac{dB_0}{dz} < 0$. Les forces de Laplace sont dirigées vers le haut et décroissent avec z . Si elles sont suffisamment intenses en $z=0$ pour soulever l'anneau, on peut s'attendre à un équilibre stable en $z=z_0$ si le rayon est assez large. $\langle \vec{F}_L \rangle$ et $N \rightarrow z_0$ augmente avec N . Mais le changement de mouvement ne modifie pas L_A donc on ne peut pas expliquer F_z

10) Cas général $L_A \neq 0$ $L_A \neq 0$

loi des mailles pour (S)

$$u_s(t) = U_0 \cos \omega t = R_s i_s(t) + L_s \frac{di_s}{dt} + M \frac{di_A}{dt}$$

loi des mailles pour (A)

$$0 = N L_A i_A(t) + N^2 L_A \frac{di_A}{dt} + M \frac{di_s}{dt}$$

11) Représentation complexe:

$$\left. \begin{aligned} U_0 &= Z_s I_s + Z_{AS} I_A \\ 0 &= Z_A I_A + Z_{AS} I_s \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\boxed{I_A = -\frac{Z_{AS} U_0}{D^2}, \quad I_s = \frac{Z_A U_0}{D^2} \text{ où } D = Z_A Z_s + M^2 \omega^2}$$

En fonction des modules et arguments, $I_s = \frac{U_0 |Z_A|}{|D|^2} e^{j(\varphi_A - 2\varphi_D)}$ $\rightarrow i_s(t) = \frac{U_0 |Z_A|}{|D|^2} \cos(\omega t + \varphi_A - 2\varphi_D)$
 $I_A = -j \frac{N \omega U_0}{|D|^2} e^{-2j\varphi_D} = \frac{N \omega U_0}{|D|^2} e^{-j(2\varphi_D + \pi/2)}$ $\rightarrow i_A(t) = \frac{U_0 N \omega}{|D|^2} \cos(\omega t - 2\varphi_D - \pi/2)$

12) Expression de la force moyenne: $\langle F_L \rangle = \langle F_L \rangle \vec{e}_z$ avec $F_L = i_A(t) i_s(t) \frac{dM}{dz}$

$$\langle F_L \rangle = N \frac{dM}{dz} \langle i_A(t) i_s(t) \rangle = N \frac{dM}{dz} \frac{U_0^2 |Z_A| N \omega}{|D|^4} \langle \cos(\omega t + \varphi_A - 2\varphi_D) \cos(\omega t - 2\varphi_D - \pi/2) \rangle$$

$$\text{or } \langle \cos(\omega t + \varphi_A - 2\varphi_D) \cos(\omega t - 2\varphi_D - \pi/2) \rangle = \frac{1}{2} \langle \cos(2\omega t + \varphi_A - 4\varphi_D - \frac{\pi}{2}) + \cos(\varphi_A + \pi/2) \rangle = -\frac{1}{2} \sin \varphi_A$$

$$\text{et } \sin \varphi_A = \frac{L_A \omega}{|Z_A|} \text{ d'où } \langle F_L \rangle = N \frac{dM}{dz} \frac{U_0^2 N \omega^2}{|D|^4}$$

$$Z^2 = Z_A Z_s + N^2 \omega^2 = N^2 R_A R_s + N^2 L_A^2 \omega^2 - N^2 L_A L_s \omega^2 - j\omega(N^2 L_A R_s + N^2 R_A L_s)$$

$$\text{Finalement } \langle F_L \rangle = \frac{U_0^2 N^2 \frac{dM}{dz} \omega^2 L_A}{(R_A R_s + N^2 \omega^2 (L_A^2 - L_A L_s))^2 + \omega^2 (L_A R_s + N^2 R_A L_s)^2}$$

13) Application numérique: $\frac{F(z)}{F(1)} = \frac{4 [(R_A R_s + \omega^2 (L_A^2 - L_A L_s))^2 + \omega^2 (L_A R_s + N^2 R_A L_s)^2]}{(R_A R_s + 2\omega^2 (L_A^2 - L_A L_s))^2 + \omega^2 (2L_A R_s + N^2 L_s)^2}$

Pour $R_A = 10^{-4} \Omega$ $\frac{F(z)}{F(1)} = 3,43$

14) Interprétation de F_L : l'anneau à 2 spires a une masse double ($m = 2m_0$) mais la force est multipliée par 3,43 $\rightarrow$ équilibre à une altitude supérieure (ceci reste vrai tant que $R_A \geq R_{\min} = 3,3 \cdot 10^{-5} \Omega$)

15) Interprétation de F_L : Si on remplace le cuivre par l'aluminium $R_A = 1,7 \cdot 10^{-4} \Omega$, la force diminue d'un facteur 2,78 mais la masse diminue d'un facteur 3 donc $z_0(Al) > z_0(Cu)$

I.3) Modélisations de la deuxième série d'expériences

16) Composante F_z de la résultante des forces de Laplace: $F_z = i_A \frac{d\Phi}{dz}$ avec $\frac{d\Phi}{dz} = -\frac{\Phi_0}{H} \cos \omega t$

$$\text{d'où la relation } F_z = -\omega \left(\frac{\Phi_0}{H} \right) \phi(z) \left(\frac{r_A \sin \omega t - \frac{1}{\omega} \cos \omega t}{r_A^2 + (L\omega)^2} \right) \cos \omega t$$

17) Moyenne temporelle $\langle F_z \rangle$

$$\langle F_z \rangle = \omega \left(\frac{\Phi_0}{H} \right) \phi(z) \frac{L\omega}{2(r_A^2 + (L\omega)^2)} = F_0 \left(1 - \frac{z}{H} \right) \text{ si } z \leq H \text{ avec}$$

$$F_0 = \frac{r \Phi_0^2 L \omega^2}{2H (r_A^2 + (L\omega)^2)}$$

Equation du mouvement (on suppose que la Fém induite n'est pas modifiée quand il y a mouvement)

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_0 \left(1 - \frac{z}{H} \right) - mg$$

18) Condition pour que l'anneau (R) décollé

En $z=0$, on a $\langle F_z \rangle = F_0$, il faut donc $F_0 > mg$

Hauteur de l'anneau à l'équilibre. $F_0 \left(1 - \frac{z_0}{H} \right) = mg \rightarrow z_0 = \frac{H}{f} \left(1 - \frac{mg}{F_0} \right)$ si $z_0 \leq H$

19) Application numérique. $F_0 = 0,135 \text{ N}$ $z_0 = 0,09 \text{ m}$.

20) Solution de l'équation du mouvement

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{F_0}{mH} z = \frac{F_0}{m} - g = \frac{F_0 - mg}{mH}$$

$$z(t) = z_0 + A \cos \Omega t + B \sin \Omega t \text{ on } \Omega = \left(\frac{F_0 - mg}{mH} \right)^{1/2} \text{ Conditions } z(0) = 0, \dot{z}(0) = 0 \rightarrow z(t) = z_0 (1 - \cos \Omega t)$$

21) On a négligé la modification de l'expression de $\phi(z, t)$ lorsque z varie (qui introduit un terme en $\dot{z}$)

22) Résistance abaissée d'un facteur 10 $\rightarrow z_0 = 0,76 \text{ m} > H$ ce n'est pas une position d'équilibre.

23) Vitesse de l'anneau en $z=H$

$$z(t) = H \rightarrow \cos(\Omega t) = 1 - \frac{H}{z_0} \quad \Omega = 11,6 \text{ rad/s} \rightarrow t = 0,105 \text{ s}$$

$$\dot{z}(t) = \Omega z_0 \sin(\Omega t) = \Omega z_0 \left(1 - \left(1 - \frac{H}{z_0} \right)^2 \right)^{1/2} \rightarrow \dot{z}(t) = 8,3 \text{ m/s}$$

24) Utilisation d'une force moyennée tangentielle:

Distance parcourue pendant une période pour $t \approx \tau$ $\Delta z = \dot{z}(0) \times \frac{2\pi}{\omega} = 0,14m$

Δz n'étant pas petit devant H , la moyenne tangentielle $\dot{z}$ fixée n'est pas justifiée. Ceci permet cependant d'obtenir la position d'équilibre et une idée du mouvement.

25) Mouvement de l'anneau sorti du rayon

on a supposé $\Phi(z) = 0$ pour $z \gg H$ donc $F_z = 0$. L'anneau n'est soumis qu'à son poids.

L'altitude maximale est donnée par la conservation de l'énergie mécanique $mg(z_{max} - H) = \frac{1}{2} m \dot{z}(0)^2$

$$\rightarrow z_{max} = H + \frac{\dot{z}(0)^2}{2g} = 3,94m$$

26) En remplaçant le cylindre conique de rayon a par p cylindres de rayon $\frac{a}{p}$ d'axes parallèles séparés par de l'isolant, on limite les courants de Foucault (dus au champ E et thermique) et donc les pertes par effet Joule.

II) Commande en lévitation.

II.1) Modélisation et stabilité du système EDS

27) Valeurs numériques $F(z) = F_0 e^{-az}$ où $F_0 = \frac{1}{2} a L_1 I^2 = 525 \text{ kN}$

28) Position d'équilibre $F(z) = mg \rightarrow z_0 = \frac{1}{a} \ln\left(\frac{F_0}{mg}\right) \quad z_0 = 0,14m$

on suppose le référentiel lié au rail galvanique.

29) Petits mouvements autour de l'équilibre:

$$\tilde{z} = z - z_0 \text{ et } |\tilde{z}| \ll \frac{1}{a}$$

Equation du mouvement $m \ddot{\tilde{z}} = F(z) - mg$ et $F(z) = F(z_0) + (-a F(z_0)) \tilde{z}$
 $a \ddot{\tilde{z}} = \ddot{\tilde{z}}$ d'où $\ddot{\tilde{z}} + a g \tilde{z} = 0$ oscillations non amorties de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{ag} = 10 \text{ rad/s}$
 fréquence propre $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{\sqrt{ag}}{2\pi} = 1,59 \text{ Hz}$

30) Utilisation de la fréquence f_0 mesurée $f_0 = 1,65 \text{ Hz} \rightarrow a = \frac{(2\pi f_0)^2}{g} = 10,7 \text{ m}^{-1} \quad \frac{1}{a} = 0,093 \text{ m}$

Valeurs corrigées $F_0 = 564 \text{ kN} \quad z_0 = 0,16 \text{ m}$

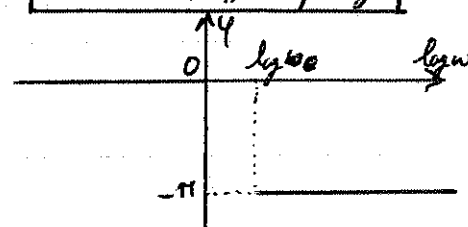
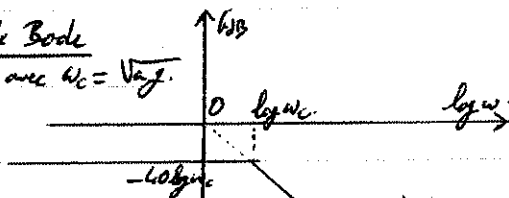
3-1) les interactions avec l'air génèrent une force de frottement fluide qui amortit les oscillations.

3-2) Ajout d'une force de commande pour les transformées de Laplace $(p^2 + ag) \tilde{Z}(p) = F_c(p)$ d'où $H_{EDS}(p) = \frac{\tilde{Z}(p)}{F_c(p)} = \frac{1}{p^2 + ag}$

33) Diagramme asymptotique de Bode

si $\omega \rightarrow 0$ $G_{dB} \approx -40 \text{ dB/déc}$ avec $\omega_c = \sqrt{ag}$

si $\omega \rightarrow \infty$ $G_{dB} \approx -40 \text{ dB/déc}$



gain statique -40 dB/déc fonction décroissante de a .
 pulsation $\omega_c = \sqrt{ag}$ fonction croissante de a

34) Fonction de transfert en boucle ouverte:

$$H_{BO}^{EDS}(p) = \frac{\tilde{Z}(p)}{E(p)} = \frac{1}{p^2 + ag} \times C(p) = \frac{K}{p^2 + bp + C}$$

35) Fonction de transfert en boucle fermée:

$$E(p) = \tilde{Z}_{nf} - \tilde{Z}(p) = \frac{\tilde{Z}(p)}{H_{BO}^{EDS}(p)} \rightarrow H_{BO}^{BF}(p) = \frac{\tilde{Z}(p)}{\tilde{Z}_{nf}} = \frac{H_{BO}^{EDS}}{1 + H_{BO}^{EDS}}$$

$$G_{statique} = K/(C+K) \quad \sigma = \frac{1}{2} \frac{b}{\sqrt{C+K}}$$

$$H_{EDS}^{BF}(p) = \frac{K}{p^2 + bp + (C+K)} = \frac{K/(C+K)}{1 + \frac{b}{C+K} p + \frac{p^2}{C+K}}$$

On peut fixer la pulsation propre, le facteur d'amortissement et le gain statique de H_{EDS}^{BF}

36) Gain statique unitaire: $G_{statique} = 1 \rightarrow C = 0$