

I. Première approche

I.1 La similitude entre $\text{div } \vec{g} = -4\pi G \rho$ et l'équation de Maxwell-Gauss: $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ permet les analogies suivantes:

- champ gravitationnel $\vec{g}$ $\longleftrightarrow$ champ électrique $\vec{E}$
- masse volumique ρ $\longleftrightarrow$ densité volumique de charge ρ ($\text{C} \cdot \text{m}^{-3}$)
- constante G $\longleftrightarrow$ constante $-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$

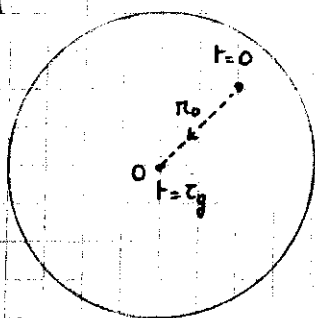
I.2.1 Théorème de Gauss pour la gravitation: $\oint_{(S)} \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = -4\pi G m_{\text{int}}(S)$

- invariance par toute rotation autour de O : $\vec{g}(\vec{r}) = g(r) \vec{u}_r$
- La droite OM est axe de symétrie des charges: $\vec{g}(\vec{r}) = g(r) \vec{u}_r$ (remarque: $\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r}$)
- On choisit (S) = sphère de centre O et de rayon $r \geq R \Rightarrow 4\pi r^2 g(r) = -4\pi G M$

donc: $\boxed{\vec{g}(r) = -\frac{GM}{r^2} \vec{u}_r}$

I.2.2 Idem en remplaçant M par $m(r)$: $\boxed{\vec{g}(r) = -\frac{Gm(r)}{r^2} \vec{u}_r}$

I.3.1



Le trajet rectiligne de la masse μ entre $t=0$ et $t=\tau_g$ peut être vu comme le quart d'une ellipse très aplatie de demi-grand axe r_0 .

On applique la loi de Kepler avec: $\mathcal{P} = 4\tau_g$; $a = r_0$; $M_0 = \frac{4}{3}\pi r_0^3 \rho$

$$4\tau_g = 2\pi \sqrt{\frac{r_0^3}{G \cdot \frac{4}{3}\pi r_0^3 \rho}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$$

donc: $\boxed{\tau_g = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}}$ indépendant de r_0 .

I.3.2 A.N 1: $\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R_0^3} = 1392 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et $\tau_g = 2513 \text{ s}$

A.N 2: $\rho = \frac{M_H \cdot 10^{16}}{M_A} = 1,66 \cdot 10^{-20} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et $\tau_g = 7,28 \cdot 10^{14} \text{ s} = 23 \text{ millions d'années}$

I.3.3 Les forces de pression freinent un tel effondrement.

I.4.1 Pour une mole: $U_{\text{cin}} = \frac{3}{2} R_G T$. Il y a $\frac{M}{M_A}$ moles, donc: $\boxed{U_{\text{cin}} = \frac{3}{2} R_G T \cdot \frac{M}{M_A}}$

I.4.2 Effondrement si: $E_g + 2U_{\text{cin}} < 0 \Rightarrow -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R_0} + 3 R_G T \frac{M}{M_A} < 0$

Soit: $\frac{R_G T}{M_A} < \frac{GM}{5R_0}$ avec: $M = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R_0^3$

Donc: $\frac{R_G T}{M_A} < \frac{4\pi G \rho R_0^2}{15}$

D'où: $\boxed{R_0 > R_c = \sqrt{\frac{15 R_G T}{4\pi G \rho M_A}}}$

I.4.3 On a: $C_s = \sqrt{\frac{\gamma R_{\text{g}} T}{M_A}}$ et $\gamma = \frac{5}{3}$ (gaz monoatomique) donc:

$$C_s = \sqrt{\frac{5 R_{\text{g}} T}{3 M_A}}$$

Puis: $\tau_s = R_0 \sqrt{\frac{3 M_A}{5 R_{\text{g}} T}}$

$$\tau_s > \tau_g \Leftrightarrow R_0 \sqrt{\frac{3 M_A}{5 R_{\text{g}} T}} > \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3 \pi}{\rho G}} \Leftrightarrow R_0 > R_s = \sqrt{\frac{5 \pi R_{\text{g}} T}{16 \rho G M_A}}$$

$R_c = R_s$ donc, quand l'effondrement a lieu, les ondes acoustiques n'ont pas le temps de se propager de la surface au centre car $\tau_s > \tau_g$. Les forces de pression ne peuvent donc pas compenser les forces de gravitation.

II. Stabilité d'une étoile

II.1.1 $\vec{\int}_{\text{vol}} (\vec{\pi}) = \rho(n) \vec{g}(n)$ soit: $\vec{\int}_{\text{vol}} (\vec{\pi}) = - \rho(n) \frac{G m(n)}{n^2} \vec{u}_n$

II.1.2 Equation de la statique des fluides: $\vec{\int}_{\text{vol}} (\vec{\pi}) = \vec{\nabla} P \Rightarrow \frac{dP}{dr} = - \rho(n) \frac{G m(n)}{n^2}$

II.2.1 $dE_g = dm(n) \cdot \phi(n)$ avec: $\phi(n) = - \frac{G m(n)}{n}$ (potentiel) donc: $dE_g = - dm(n) \frac{G m(n)}{n}$

II.2.2 On a: $dm(n) = \rho(n) \cdot 4\pi n^2 dr \Rightarrow dE_g = - 4\pi n dr \underbrace{\rho(n) G m(n)}_{= - n^2 \frac{dP}{dr} \text{ d'après II.2.1}}$

donc: $dE_g = \frac{dP}{dr} \cdot 4\pi n^3 dr$

II.2.3 $E_g = \int_0^R dE_g = \int_0^R \frac{dP}{dr} \cdot 4\pi n^3 dr = \underbrace{\left[P \cdot 4\pi n^3 \right]_0^R}_{= 0 \text{ car } P(R) = 0} - \int_0^R 12\pi n^2 \cdot P dr$ en intégrant par parties.

d'où: $E_g = - 3 \int_0^R P dV$ avec: $dV = 4\pi n^2 dr$

II.3 $U_{\text{mol}} = C_v T$ et $C_v = \frac{R_{\text{g}}}{\gamma - 1}$ donc: $U_{\text{mol}} = \frac{R_{\text{g}} T}{\gamma - 1}$

II.4 $U = m U_{\text{mol}} = \frac{M}{M_A} \frac{R_{\text{g}} T}{\gamma - 1}$

Equation du gaz parfait pour $dV = 4\pi n^2 dr$: $P dV = \frac{dm}{M_A} R_{\text{g}} T$

donc: $E_g = - 3 \int_0^R \frac{dm}{M_A} R_{\text{g}} T = - \frac{3 M R_{\text{g}} T}{M_A}$

d'où: $E_g = - 3(\gamma - 1) U$

II.5 $E = U + E_g = U[1 - 3(\gamma - 1)]$ donc $E = U[4 - 3\gamma]$

En supposant l'énergie nulle quand les molécules du gaz sont à l'infini et très éloignées les unes des autres, la condition de stabilité est: $E < 0$

D'où: $\gamma > 4/3$

II.6 Pour $\gamma = \frac{5}{3}$: $E_g = -2U$ $\gamma = \frac{5}{3}$ correspond à un gaz parfait monoatomique.

U correspond à de l'énergie cinétique de translation.

II.7 D'après II.5 : $\frac{dE}{dU} = 4 - 3\gamma < 0$

T augmente $\Rightarrow E$ augmente à cause des réactions nucléaires
 $\Rightarrow U$ diminue
 $\Rightarrow T$ diminue
 $\Rightarrow$ retour à l'équilibre. L'augmentation de T est "corrigée".

III. Evolution d'une perturbation

III.1 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$ (1)

III.2 $\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g} + \rho \vec{\Gamma}$ (2)

III.3 $\text{div} \vec{g} = -4\pi G \rho$ (3)

III.4.1 Pour $\rho = \rho_0$; $\vec{v} = \vec{0}$; $\vec{g} = \vec{g}_0$; $\vec{\Gamma} = -\vec{g}_0$, les équations précédentes sont bien vérifiées.

III.4.2 (1) donne : $\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \text{div}[(\rho_0 + \rho_1)\vec{v}_1] = 0$ linéarisation $\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \text{div} \vec{v}_1 = 0$ (1')

(2) donne : $(\rho_0 + \rho_1) \left[\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_1 \right] = (\rho_0 + \rho_1)(\vec{g}_0 + \vec{g}_1) + (\rho_0 + \rho_1)(-\vec{g}_0)$ linéarisation $\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = \vec{g}_1$ (2')

(3) donne : $\text{div}(\vec{g}_0 + \vec{g}_1) = -4\pi G(\rho_0 + \rho_1)$ linéarisation $\text{div} \vec{g}_1 = -4\pi G \rho_1$ (3')

On en déduit : $\text{div} \left(\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} \right) = -4\pi G \rho_1 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\text{div} \vec{v}_1) = -4\pi G \rho_1$

(1') $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \right) = -4\pi G \rho_1$

d'où : $\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} = 4\pi G \rho_0 \rho_1$

Solution : $\rho_1 = A e^{-\omega t} + B e^{+\omega t}$ avec : $\omega = \sqrt{4\pi G \rho_0}$

Le terme $e^{+\omega t}$ traduit une amplification de la perturbation avec le temps
 caractéristique : $\tau = \frac{1}{\sqrt{4\pi G \rho_0}}$

III.5.1 $(\rho_0 + \rho_1) \left[\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_1 \right] = (\rho_0 + \rho_1)(\vec{g}_0 + \vec{g}_1) + (\rho_0 + \rho_1)(-\vec{g}_0) - \vec{\nabla} P_1$

Après linéarisation : $\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = \rho_0 \vec{g}_1 - \vec{\nabla} P_1$ (2'')

III.5.2 $P(\rho) \Rightarrow dP = \left(\frac{dP}{d\rho} \right) d\rho \Rightarrow \underbrace{P - P_0}_{= P_1} = \left(\frac{dP}{d\rho} \right) \underbrace{(\rho - \rho_0)}_{= \rho_1}$ donc on a en plus : $P_1 = \left(\frac{dP}{d\rho} \right) \rho_1$ (4)

$$\begin{aligned}
 (3') \quad \text{div } \vec{g}_1 &= -4\pi G \rho_1 \quad \xRightarrow{(2'')} \quad \text{div} \left[\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} \rho_1 \right] = -4\pi G \rho_1 \\
 &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \vec{v}_1) + \frac{1}{\rho_0} \Delta \rho_1 = -4\pi G \rho_1 \\
 (4') \quad &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \right) + \frac{1}{\rho_0} \Delta \rho_1 = -4\pi G \rho_1 \\
 (5) \quad &\Rightarrow -\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} + \left(\frac{d\rho}{d\ell} \right) \cdot \Delta \rho_1 = -4\pi G \rho_1 \rho_0
 \end{aligned}$$

donc: $\boxed{\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} = c_s^2 \Delta \rho_1 + 4\pi G \rho_1 \rho_0}$ avec: $\boxed{c_s = \sqrt{\frac{d\rho}{d\ell}}}$

III.5.3 On reporte: $\rho_1 = B e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ dans l'équation d'onde du III-5.2

$$\Rightarrow -\omega^2 = -k^2 c_s^2 + 4\pi G \rho_0 \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{k^2 c_s^2 - 4\pi G \rho_0}}$$

III.5.4 amplification en $e^{i\omega t}$ si ω est imaginaire pur, soit: $k^2 c_s^2 - 4\pi G \rho_0 < 0$

donc: $k < k_J = \frac{\sqrt{4\pi G \rho_0}}{c_s}$. D'où: $\boxed{\lambda_J = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G \rho_0}}}$

Pour un gaz parfait monoatomique: $c_s = \sqrt{\frac{5 R_g T}{3 M_A}} \Rightarrow \lambda_J = \sqrt{\frac{5 \pi R_g T}{3 M_A G \rho_0}}$

λ_J est du même ordre de grandeur que R_c et R_s

III.5.5 $\boxed{M_J = \rho_0 \cdot \frac{4}{3} \pi \left(\frac{\lambda_J}{2} \right)^3 = \frac{\pi}{6} \frac{1}{\sqrt{\rho_0}} \left(\frac{5 \pi R_g T}{3 M_A G} \right)^{3/2}}$

D'après I.4.2, il n'y a pas effondrement gravitationnel si $R_0 < R_c \approx \lambda_J$

donc si: $\underline{M < M_J}$ (condition de stabilité)

IV. Univers en expansion et stabilité

IV.1 $\vec{v}_A - \vec{v}_B = \frac{d}{dt} \vec{r}_A - \frac{d}{dt} \vec{r}_B = \frac{d}{dt} (\vec{r}_A - \vec{r}_B)$

Le mouvement relatif de A par rapport à B suit la même loi que le mouvement de A par rapport à O. On peut choisir B comme origine.

IV.2.1 $\int_{\text{boule}} \rho_0(t) d\tau = \rho_0(t) \cdot \frac{4}{3} \pi r^3(t) = \tilde{\rho}_0 \cdot \frac{4}{3} \pi \frac{r^3(t)}{a^3(t)} \quad \text{or: } \frac{r(t)}{a(t)} = \|\vec{s}'\|$

donc: $\int_{\text{boule}} \rho_0(t) d\tau = \tilde{\rho}_0 \cdot \frac{4}{3} \pi \|\vec{s}'\|^3 = \text{constante au cours du temps}$

Ce résultat traduit la conservation de la masse contenue dans la sphère de rayon $\|\vec{s}'\|$ à l'instant t_R .

IV.2.2 L'équation d'Euler avec $P=0$ et $\vec{r}' = \vec{0}'$ donne: $\frac{D\vec{v}_0'}{Dt} = \vec{g}_0'$

$$\begin{aligned}
 \frac{D\vec{v}_0'}{Dt} &= \frac{\partial \vec{v}_0'}{\partial t} + \vec{\nabla} \left(\frac{v_0'^2}{2} \right) + (\vec{\nabla} t \vec{v}_0') \wedge \vec{v}_0' \quad \text{avec } \vec{\nabla} t \vec{v}_0' = 0 \quad (\text{car } \vec{\nabla} t \vec{r}' = \vec{0}') \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\dot{a}}{a} \vec{r}' \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\dot{a}^2 r^2}{2 a^2} \right) \vec{v}_r \\
 &= \frac{\ddot{a}}{a} \vec{r}' - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \vec{r}' + \frac{\dot{a}^2}{2 a^2} \cdot 2 \vec{r}' \cdot \vec{v}_r = \frac{\ddot{a}}{a} \vec{r}'
 \end{aligned}$$

On veut donc: $\frac{\ddot{a}}{a} \vec{n} = \vec{g}_0 = -\frac{4\pi G \rho_0(t)}{3} \vec{n} = -\frac{4\pi G \tilde{\rho}_0}{3a^3} \vec{n}$

L'équation d'Euler est donc satisfaite si: $a^2 \ddot{a} = -\frac{4}{3} \pi G \tilde{\rho}_0 = \text{constante}$

IV.2.3 $a(t) = A t^\alpha \Rightarrow \ddot{a} = A \alpha(\alpha-1) t^{\alpha-2}$

donc: $A^3 \alpha(\alpha-1) t^{2\alpha} \cdot t^{\alpha-2} = -\frac{4}{3} \pi G \tilde{\rho}_0 \Rightarrow 3\alpha-2=0 \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3}$

puis: $A^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot (-\frac{1}{3}) = -\frac{4}{3} \pi G \tilde{\rho}_0 \Rightarrow A = (6\pi G \tilde{\rho}_0)^{1/3}$

donc: $a(t) = (6\pi G \tilde{\rho}_0)^{1/3} \cdot t^{2/3}$

IV.2.4 $H(t) = \frac{A \alpha t^{\alpha-1}}{A t^\alpha}$ donc: $H(t) = \frac{2}{3t}$

Donc: $H_R = \frac{2}{3t_R}$ soit: $t_R = \frac{2}{3H_R}$

t_R est le temps nécessaire pour que a passe de 0 ($t=0$) à 1 (instant de référence), ce qui correspond à l'expansion du fluide modélisant l'univers depuis le big bang ($t=0$) jusqu'à l'instant de référence. C'est donc l'âge de l'univers.

A.N: $t_R = 2,9 \cdot 10^{17} \text{ s} = 9 \cdot 10^9 \text{ années}$

IV.3.1 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \text{div}(\rho_0 \vec{v}_0) + \text{div}(\rho_0 \vec{v}_1) + \text{div}(\rho_1 \vec{v}_0) = 0$ ($\text{div}(\rho_1 \vec{v}_1)$ négligée)

On: $\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \text{div}(\rho_0 \vec{v}_0) = 0$ (conservation de la masse en l'absence de perturbation)

• $\text{div}(\rho_0 \vec{v}_1) = \rho_0 \text{div} \vec{v}_1$ car ρ_0 ne dépend que du temps

• $\text{div}(\rho_1 \vec{v}_0) = \rho_1 \text{div} \vec{v}_0 + \vec{v}_0 \cdot \text{grad} \rho_1$ avec $\text{div} \vec{v}_0 = \text{div}(\frac{\dot{a}}{a} \vec{n}) = \frac{\dot{a}}{a} \text{div} \vec{n} = \frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) = 3$

Il reste: $\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \text{grad} \rho_1 + \rho_1 \cdot 3 \frac{\dot{a}}{a} + \rho_0 \text{div} \vec{v}_1 = 0$

$\frac{d\rho_1}{dt} + \rho_1 3 \frac{\dot{a}}{a} + \rho_0 \text{div} \vec{v}_1 = 0$

Puis: $\dot{\delta} = \frac{d\delta}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} \right) + \vec{v}_0 \cdot \text{grad} \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} \right) = -\frac{1}{\rho_0^2} \rho_1 \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \vec{v}_0 \cdot \text{grad} \rho_1 + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial t}$

On: $\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = -\text{div}(\rho_0 \vec{v}_0)$ (conservation de la masse en l'absence de perturbation)

Donc: $\dot{\delta} = \frac{1}{\rho_0^2} \rho_1 \cdot \text{div}(\rho_0 \vec{v}_0) + \frac{1}{\rho_0} \vec{v}_0 \cdot \text{grad} \rho_1 + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial t}$
 $= \frac{\rho_1}{\rho_0} \cdot 3 \frac{\dot{a}}{a} + \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_1}{dt}$ car $\text{div} \vec{v}_0 = 3 \frac{\dot{a}}{a}$ et $\frac{d\rho_1}{dt} = \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \text{grad} \rho_1$
 $= -\text{div} \vec{v}_1$ d'après la relation précédente

d'où: $\dot{\delta} + \text{div} \vec{v}_1 = 0$

IV.3.2 L'équation d'Euler avec $P=0$ et $\vec{F}=\vec{0}$ donne encore: $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{g}$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + ((\vec{v}_0 + \vec{v}_1) \cdot \vec{\nabla}) \vec{g}(\vec{v}_0 + \vec{v}_1) = \vec{g}_0 + \vec{g}_1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_0 + (\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_1 + (\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_0 = \vec{g}_0 + \vec{g}_1 \quad ((\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_1 \text{ négligé})$$

$$\Rightarrow \frac{D\vec{v}_0}{Dt} + \frac{d\vec{v}_1}{dt} + (\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_0 = \vec{g}_0 + \vec{g}_1 \quad \text{or} \quad \frac{D\vec{v}_0}{Dt} = \vec{g}_0 \text{ d'après IV.2.2}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}_1}{dt} + (\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla}) \left(\frac{a}{a} \vec{r} \right) = \vec{g}_1 \quad \text{or} \quad (\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla} x \\ \vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla} y \\ \vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla} z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{v}_1 \cdot \vec{u}_x \\ \vec{v}_1 \cdot \vec{u}_y \\ \vec{v}_1 \cdot \vec{u}_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \\ v_{1z} \end{vmatrix} = \vec{v}_1$$

donc: $\boxed{\frac{d\vec{v}_1}{dt} + \vec{v}_1 \cdot \frac{a}{a} = \vec{g}_1}$

IV.3.3 $\dot{\delta} + \text{div} \vec{v}_1 = 0 \Rightarrow \ddot{\delta} + \frac{d}{dt}(\text{div} \vec{v}_1) = 0$

$$\Rightarrow \ddot{\delta} - \frac{a}{a} \text{div} \vec{v}_1 + \text{div} \left(\frac{d\vec{v}_1}{dt} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\delta} - \frac{a}{a} \text{div} \vec{v}_1 + \text{div} \left(\vec{g}_1 - \frac{a}{a} \vec{v}_1 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\delta} - 2 \frac{a}{a} \text{div} \vec{v}_1 + \text{div} \vec{g}_1 = 0$$

On a l'équation locale: $\boxed{\text{div} \vec{g}_1 = -4\pi G \rho_1}$ soit $\text{div} \vec{g}_1 = -4\pi G \delta \rho_0$

Et on a aussi: $\text{div} \vec{v}_1 = -\dot{\delta}$

Donc: $\boxed{\ddot{\delta} + 2 \frac{a}{a} \dot{\delta} - 4\pi G \rho_0 \delta = 0}$

IV.3.4 On a: $\frac{a}{a} = \frac{2}{3t}$ et $\rho_0 = \frac{\tilde{\rho}_0}{a^3} = \frac{\tilde{\rho}_0}{6\pi G \tilde{\rho}_0 t^2}$ donc: $\boxed{\ddot{\delta} + \frac{4}{3t} \dot{\delta} - \frac{2}{3} \frac{\delta}{t^2} = 0}$

On pose: $\delta = B t^\beta$, $\dot{\delta} = B \beta t^{\beta-1}$; $\ddot{\delta} = B \beta(\beta-1) t^{\beta-2}$

donc: $B \beta(\beta-1) t^{\beta-2} + \frac{4}{3} B \beta t^{\beta-2} - \frac{2}{3} B t^{\beta-2} = 0$

$\Rightarrow \beta(\beta-1) + \frac{4}{3} \beta - \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow \beta^2 + \frac{1}{3} \beta - \frac{2}{3} = 0$ de solutions: $\beta = -1$ et $\beta = \frac{2}{3}$

La solution générale est donc: $\boxed{\delta = B_1 \frac{1}{t} + B_2 t^{2/3}}$

La perturbation croît au cours du temps. Cette croissance est moins forte qu'au III.5.4 où l'amplification était exponentielle.