

I. 1. 1. $m \frac{d^2 z}{dt^2} = -k(z-d) - \lambda \frac{dz}{dt} + f_0 \cos \omega t$

I. 1. 2. $[\omega_0] = \frac{[k]^{1/2}}{[m]^{1/2}} = \left[\frac{[F]}{L} \times \frac{1}{M} \right]^{1/2} = \left[\frac{M \cdot L \cdot T^{-2}}{M \cdot L} \right]^{1/2} = T^{-1}$

$[Q] = \frac{M[\omega_0]}{[\lambda]} = \frac{M[\omega_0]}{[F]/L \cdot T^{-1}} = \frac{M \cdot T^{-1}}{M \cdot L \cdot T^{-2}} \times \frac{L \cdot T^{-1}}{1} = 1$; Q est sans dimension

$[a_m] = \frac{[Q][f_0]}{[m][\omega_0]^2} = \frac{1 \cdot M \cdot L \cdot T^{-2}}{M \cdot T^{-2}} = L$; a_m a la dimension d'une longueur

$[u] = \frac{[\omega]}{[\omega_0]} = \left[\frac{2\pi}{T} \right] \times \frac{1}{[\omega_0]} = \frac{1}{T \cdot T^{-1}} = 1$; u est sans dimension

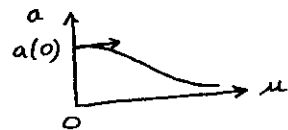
I. 1. 3. Avec les notations proposées: $\frac{d^2}{dt^2}(z-d) + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d}{dt}(z-d) + \omega_0^2(z-d) = \frac{\omega_0^2}{Q} a_m \cos \omega t$
On utilise la notation complexe: $\cos \omega t = \text{Re}(e^{i\omega t})$; $z-d = \text{Re}(a e^{i\varphi} e^{i\omega t})$

$a e^{i\varphi} \left[\omega_0^2 - \omega^2 + i \frac{\omega_0 \omega}{Q} \right] = \frac{\omega_0^2}{Q} a_m$; $a e^{i\varphi} [Q(1-u^2) + iu] = a_m$

D'où $a = \left| \frac{a_m}{Q(1-u^2) + iu} \right|$; $a = \frac{a_m}{\sqrt{Q^2(1-u^2)^2 + u^2}}$

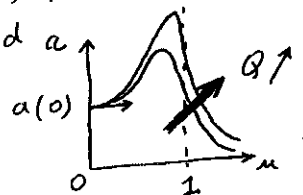
Étude du graphe $a(u)$: $a(0) = \frac{a_m}{Q} (= \frac{f_0}{k})$; $\lim_{u \rightarrow 0} a = 0$; $\frac{da}{du} \Big|_{u=0} = 0$

• Si $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $a(u)$ est monotone décroissante



• Si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, a passe par un maximum pour $u = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} < 1$ (donc pour $\omega < \omega_0$) d'autant plus proche de $u=1$ (donc de $\omega = \omega_0$) que Q est grand.

$a_{\max} = \frac{a_m}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} = \frac{Q a(0)}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$ d'autant plus grand que Q est grand



Phénomène de résonance d'autant plus aigüe que Q est grand.

I. 1. 4 $\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = 100 \text{ kHz}$

I. 2. 1. Développement de Taylor au voisinage de $z=d$ et pousse à l'ordre 3:

$F(z) = F(d) + (z-d) \frac{dF}{dz} \Big|_d + \frac{(z-d)^2}{2} \frac{d^2 F}{dz^2} \Big|_d + \frac{(z-d)^3}{3!} \frac{d^3 F}{dz^3} \Big|_d$

$A = F(d) = -\frac{K}{d^2}$; $B = \frac{dF}{dz} \Big|_d = \frac{2K}{d^3}$; $C = \frac{1}{2} \frac{d^2 F}{dz^2} \Big|_d = -\frac{3K}{d^4}$; $D = \frac{1}{3!} \frac{d^3 F}{dz^3} \Big|_d = +\frac{4K}{d^5}$

(Rem: le coefficient de $(z-d)^m$ est $(-1)^{m+1} \times \frac{(m+1)K}{d^{m+2}}$)

I. 2. 2. $m \frac{d^2 z}{dt^2} = -k(z-d) - \lambda \frac{dz}{dt} + f_0 \cos \omega t + F(z)$

$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dz}{dt} + \omega_0^2(z-d) = \frac{\omega_0^2}{Q} a_m \cos \omega t + \frac{A}{m} + \frac{B}{m}(z-d)$

On peut écrire: $\frac{d^2}{dt^2}(z-d) + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d(z-d)}{dt} + \left(\omega_0^2 - \frac{B}{m}\right)(z-d) = \frac{A}{m} + \frac{\omega_0^2}{Q} a_m \cos \omega t$

ou $\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dz}{dt} + \left(\omega_0^2 - \frac{B}{m}\right)z = \frac{A}{m} + \frac{\omega_0^2}{Q} a_m \cos \omega t$

I.2.3 La présence de A modifie la position d'équilibre, donc la position autour de laquelle se font les oscillations forcées.

$$z_{eq} = \frac{A/m}{\frac{k}{m} - \frac{B}{m}} = \frac{-K/d^2}{k - \frac{2K}{d^3}} = \frac{Kd}{2K - kd^3} \approx -\frac{K}{kd^2} = -1,1 \cdot 10^{-13} = -1,1 \cdot 10^{-4} \text{ nm}$$

$\uparrow$ AN: $Kd^3 \gg K$

I.2.4 B modifie la pulsation propre qui devient $\omega_0'^2 = \omega_0^2 - \frac{B}{m} = \frac{1}{m} \left(k - \frac{2K}{d^3} \right)$
Cet effet est très faible: $\omega_0' = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{B}{m\omega_0^2}} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{B}{2m\omega_0^2} \right)$

D'où la variation relative de ω_0 : $\Delta\omega_0 = \frac{\omega_0' - \omega_0}{\omega_0} = -\frac{B}{2m\omega_0^2} = -\frac{2K}{kd^3} = -1,5 \cdot 10^{-5}$

L'influence de B est donc tout à fait négligeable pour les oscillations de faible amplitude (Rem: Q est aussi modifiée de façon négligeable: $Q' = Q \frac{\omega_0'}{\omega_0}$)

I.2.5

$C(z-d)^2 = C a^2 \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{C a^2}{2} (1 + \cos 2(\omega t + \varphi))$: apparition de l'harmonique de fréquence double ($2 \times \frac{\omega}{2\pi}$).

$D(z-d)^3 = D a^3 \cos^3(\omega t + \varphi) = \frac{D a^3}{4} (\cos 3(\omega t + \varphi) + 3 \cos(\omega t + \varphi))$: apparition de l'harmonique de fréquence triple ($\frac{3\omega}{2\pi}$).

I.3.1. $\frac{d^2}{dt^2}(z-d) + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d(z-d)}{dt} + \omega_0^2(z-d) = \frac{-K}{m z^2} + \frac{a_m \omega_0^2}{Q} \cos \omega t$

I.3.2. $F_1 = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{K \cos \theta}{(d + a \cos \theta)^2} d\theta = -\frac{K}{d^2} \times 2 \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{\left(1 + \frac{a}{d} \cos \theta\right)^2} = -\frac{K}{d^2} \times 2 \times \left(-\frac{a/d}{\left(1 - \left(\frac{a}{d}\right)^2\right)^{3/2}} \right)$

$F_1 = \frac{2Ka}{(d^2 - a^2)^{3/2}}$ donc $F(z) \approx \frac{2Ka}{(d^2 - a^2)^{3/2}} \cos(\omega t + \varphi)$ et on remplace dans I.3.1.

I.3.3. L'équation différentielle devient, en régime forcé et en notation complexe:

$$\left[\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{i\omega\omega_0}{Q} \right] a e^{i\varphi} = \frac{2Ka e^{i\varphi}}{m(d^2 - a^2)^{3/2}} + \frac{a_m \omega_0^2}{Q}$$

$$\left[Q(1 - u^2) + iu - \frac{2KQ}{m\omega_0^2(d^2 - a^2)^{3/2}} \right] a e^{i\varphi} = a_m ; \text{ on passe aux modules au carré:}$$

$$a^2 \left\{ Q^2 \left(1 - u^2 - \frac{2K}{m\omega_0^2(d^2 - a^2)^{3/2}} \right)^2 + u^2 \right\} = a_m^2 \quad \text{Posons } \frac{2K}{m\omega_0^2} \left(= \frac{2K}{k} \right) = \beta a_m^3$$

$$a^2 \left\{ Q^2 \left(1 - u^2 - \frac{\beta a_m^3}{(d^2 - a^2)^{3/2}} \right)^2 + u^2 \right\} = a_m^2 \quad \text{On introduit } \tilde{a} = \frac{a}{a_m} \text{ et } \tilde{d} = \frac{d}{a_m};$$

alors: $\frac{a_m^3}{(d^2 - a^2)^{3/2}} = \frac{1}{(\tilde{d}^2 - \tilde{a}^2)^{3/2}}$; on reporte; on isole le carré...

$$\left\{ Q(1-u^2) - \frac{Q\beta}{(\tilde{d}^2 - \tilde{a}^2)^{3/2}} \right\}^2 = \frac{1}{\tilde{a}^2} - u^2 = \left\{ \sqrt{\frac{1}{\tilde{a}^2} - u^2} \right\}^2$$

$$\text{d'où } Q(1-u^2) - \frac{Q\beta}{(\tilde{d}^2 - \tilde{a}^2)^{3/2}} = -\sqrt{\frac{1}{\tilde{a}^2} - u^2}$$

$$\frac{Q\beta}{(\tilde{d}^2 - \tilde{a}^2)^{3/2}} = Q(1-u^2) \pm \sqrt{\frac{1}{\tilde{a}^2} - u^2} = \mathcal{A}; \quad (\tilde{d}^2 - \tilde{a}^2)^{3/2} = \frac{Q\beta}{\mathcal{A}}; \quad \tilde{d}^2 - \tilde{a}^2 = \left(\frac{Q\beta}{\mathcal{A}}\right)^{2/3}$$

$$\text{et enfin: } \tilde{d}^2 = \tilde{a}^2 + \left[\frac{\beta Q}{Q(1-u^2) \pm \sqrt{1/\tilde{a}^2 - u^2}} \right]^{2/3} \text{ ouf...}$$

$$\text{I.3.5 (on se repose...) } \beta Q = \frac{2 \times 5 \cdot 10^{-28} \times 400}{20 \times (13,5)^3 \times 10^{-27}} = 8,13 \cdot 10^{-3}$$

$$\text{On trouve } (\beta Q)^{2/3} = 0,0404 \neq 0,04$$

$$\text{On se place ensuite dans le cas } u \approx 1: \tilde{d}^2 = \tilde{a}^2 + \frac{0,04}{(1/\tilde{a}^2 - 1)^{1/3}}$$

$$\text{I.3.6 } \frac{1}{\tilde{a}^2} \text{ est une fonction décroissante de } \tilde{a}, \text{ ainsi que } \left(\frac{1}{\tilde{a}^2} - 1\right) \text{ et } \left(\frac{1}{\tilde{a}^2} - 1\right)^{1/3}.$$

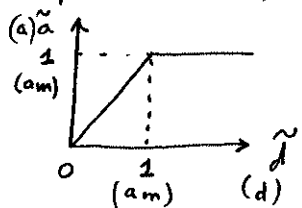
$$\frac{0,04}{\left(\frac{1}{\tilde{a}^2} - 1\right)^{1/3}} \text{ est donc croissante, ainsi que } \tilde{a}^2. \text{ Donc } \tilde{d}^2 \text{ est croissante et } \tilde{d} \text{ aussi.}$$

$$\text{Si } \tilde{a} \rightarrow 0, \frac{1}{\tilde{a}^2} \rightarrow \infty, \text{ donc } \frac{0,04}{\left(\frac{1}{\tilde{a}^2} - 1\right)^{1/3}} \rightarrow 0: \text{ pour } \tilde{a} = 0, \tilde{d} = 0$$

$$\text{Si } \tilde{a} \rightarrow 1, \frac{1}{\tilde{a}^2} - 1 \rightarrow 0 \text{ donc } \frac{0,04}{\left(\frac{1}{\tilde{a}^2} - 1\right)^{1/3}} \rightarrow \infty: \text{ pour } \tilde{a} = 1, \tilde{d} \rightarrow \infty$$

$$\text{I.3.7: Pour } \tilde{a} = 0,95, \tilde{d} = \left[(0,95)^2 + \frac{0,04}{\left(\frac{1}{(0,95)^2} - 1\right)^{1/3}} \right]^{1/2} = 0,9932; \quad \tilde{d} - \tilde{a} = 0,0432$$

I.3.8: A 0,04 près (donc $\tilde{a}$ 4% près), $\tilde{d} = \tilde{a}$ pour $0,2 < \tilde{d} < 0,99$. Dans cet intervalle, on peut modéliser le graphe $\tilde{a}(\tilde{d})$ pour la droite $\tilde{a} = \tilde{d}$ (de pente 1). Pour $\tilde{d} = 0,993$, $\tilde{a}$ a atteint sa valeur asymptotique ($\tilde{a} = 1$) à 0,05 près (donc 5%); pour $\tilde{d} > 1$, on peut modéliser le graphe $\tilde{a}(\tilde{d})$ par son asymptote $\tilde{a} = 1$.



On reconnaît l'allure de la courbe expérimentale en portant $a (= \tilde{a} \cdot a_m)$ en fonction de $d (= \tilde{d} \cdot a_m)$; l'expérience proposée correspond à $a_m = 17,5 \text{ nm}$ (pourquoi pas 13,5 nm? mystère...)

$$\text{I.3.9: } u = \sqrt{1 - \frac{0,9}{9}} \neq 1 - \frac{0,9}{2 \cdot 9} = 1 - 1,1 \cdot 10^{-3} (= 0,9989)$$

$$\text{I.3.10: } \tilde{d}^2 = \tilde{a}^2 + \frac{0,04}{(0,9 \pm \sqrt{1/\tilde{a}^2 - 1})^{2/3}}$$

Les deux branches se rejoignent pour $d_{\oplus} = d_{\ominus}$ donc $\sqrt{\frac{1}{\tilde{a}^2} - 1} = 0$, donc $\tilde{a} = 1$;

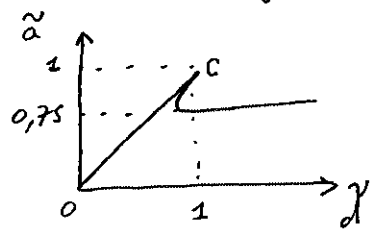
$$\tilde{d} \text{ vaut alors } \tilde{d} = \sqrt{1 + \frac{0,04}{(0,9)^{2/3}}} = 1,02$$

I.3.11. On reprend le raisonnement fait en I.3.6: $\frac{1}{\tilde{a}^2}$ est une fonction d'croissance, $(0,9 + \sqrt{\frac{1}{\tilde{a}^2} - 1})^{2/3}$ aussi; donc $\frac{0,04}{(0,9 + \sqrt{\frac{1}{\tilde{a}^2} - 1})^{2/3}}$ est croissante ainsi que $\tilde{a}^2$; $\tilde{d}^2$ est donc croissante et $\tilde{d}$ aussi.

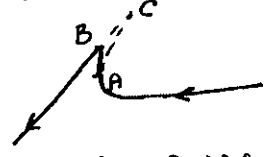
Comme à la question I.3.8, la courbe $\tilde{a}(\tilde{d})$, passe par le point (0;0), par le point (1;1,02), donc pratiquement par le point (1;1), elle est croissante; on peut la modéliser par le même segment de droite de pente 1.

I.3.12. $\tilde{d} \rightarrow 0$ pour $0,9 - \sqrt{\frac{1}{\tilde{a}^2} - 1} = 0$ donc $\tilde{a} = \frac{1}{\sqrt{1+(0,9)^2}} = 0,74$

Pour $\tilde{a} = 0,75$, $\tilde{d} = d_1 = 1,07$. $\tilde{a}$ varie de 0,75 à 0,74 (donc de 1%) lorsque $\tilde{d}$ varie de d_1 à l'infini; on peut considérer que la courbe se confond avec une droite horizontale $\tilde{a} = \text{cte} = 0,75$.

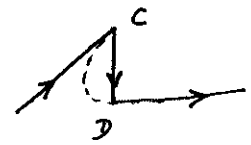


Approche: $\tilde{d} \downarrow$; le point représentatif sur la branche $\ominus$ (la seule $\tilde{a}$ à atteindre les valeurs élevées de $\tilde{d}$) se déplace vers la gauche jusqu'en A qui correspond à la plus faible valeur de $\tilde{d}$ sur la branche $\ominus$.



continuant à diminuer, le point représentatif saute sur la branche $\oplus$, en B, puis continue sur la branche $\oplus$ (droite de pente 1).

Retrait: $\tilde{d} \uparrow$; le point représentatif sur la branche $\oplus$ se déplace vers la droite jusqu'en C, saute sur la branche $\ominus$ en D, puis continue sur la branche $\ominus$ quasi-horizontale.



On observe donc le résultat expérimental de la figure 3 et un hystérésis tel qu'il est décrit dans l'introduction: lors de l'approche, $\tilde{a}$ (donc $a = \tilde{a} \cdot a_m$!) subit une discontinuité ($\tilde{a}_B - \tilde{a}_A$) pour une distance $\tilde{d}_A$ différente de la discontinuité ($\tilde{a}_C - \tilde{a}_D = 1 - 0,75$) pour la distance $\tilde{d}_C = 1$ lors du retrait. $\Delta \tilde{a}_{\text{retrait}} > \Delta \tilde{a}_{\text{approche}}$; $\tilde{d}_{\text{retrait}} > \tilde{d}_{\text{approche}}$; petit pic étroit à l'approche, grand pic large au retrait.

II.1.1. Remarque: quelles que soient les valeurs de l'angle d'incidence et des indices, on a: $1+r = \frac{\sin(\theta_1+\theta_1) + \sin(\theta_2-\theta_1)}{\sin(\theta_2+\theta_1)} = \frac{2\cos\theta_1 \sin\theta_2}{\sin(\theta_2+\theta_1)} = t$. Cette relation

$(1+r=t)$ traduit la continuité de la composante tangentielle de $\vec{E}$ à la traversée du dioptré.

$$r = \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin(\pi - \varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)} ; \quad t = \frac{2\cos(\pi/2 - \varphi_1)\sin(\pi/2 - \varphi_2)}{\sin(\pi - \varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{2\cos\varphi_1 \sin\varphi_2}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Pour des angles φ_1 et φ_2 positifs et très petits, on a aussi $(\varphi_1 + \varphi_2) \ll \frac{\pi}{2}$ et $|\varphi_1 - \varphi_2| \ll \frac{\pi}{2}$. On utilise un développement au 1^{er} ordre pour les fonctions sinus et cosinus: $\sin(\varphi_1 - \varphi_2) \simeq \varphi_1 - \varphi_2$ $\sin\varphi_2 \simeq \varphi_2$
 $\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \simeq \varphi_1 + \varphi_2$ $\cos\varphi_1 \simeq 1$

II.1.2. $\frac{I_t}{I_i} = \frac{n_2}{n_1} \frac{(E_t^\circ)^2}{(E_i^\circ)^2} = \frac{n_2}{n_1} t^2 \simeq \frac{4\varphi_1^2}{(\varphi_1 + \varphi_2)^2}$ ($n_2 \simeq n_1$ et angles petits); $\frac{I_t}{I_i} = \frac{4\varphi_1^2}{(\varphi_1 + \varphi_2)^2}$

II.2.1. La loi de Descartes s'écrit, dans le cas où il y a transmission, $\sin\theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin\theta_1$. Or, ici, $n_2 < n_1$; si il y a une onde transmise, $\sin\theta_2 \leq 1$; cela impose $\sin\theta_1 \leq \frac{n_2}{n_1} = 1 - \frac{\Delta}{n_1}$ donc $\cos\varphi_1 \leq 1 - \frac{\Delta}{n_1} = \cos\varphi_c$; pour des petits angles $\cos\varphi_c \simeq 1 - \frac{\varphi_c^2}{2}$; d'où $\varphi_c = \sqrt{\frac{2\Delta}{n_1}}$. La condition $\cos\varphi_1 \leq \cos\varphi_c$ s'écrit $\varphi_1 \geq \varphi_c$; si $\varphi_1 < \varphi_c$, il y a réflexion totale et pas d'onde transmise

II.2.2 La condition $\sin\theta_1 \leq \frac{n_2}{n_1}$ s'écrit maintenant: $1 - \frac{\varphi_1^2}{2} \leq 1 - \frac{\Delta}{n_1} + \frac{\eta I_t}{n_1}$
 donc $\frac{\eta I_t}{n_1} \geq \frac{\Delta}{n_1} - \frac{\varphi_1^2}{2} (= \frac{\varphi_c^2 - \varphi_1^2}{2})$, donc $\frac{\eta I_i}{n_1} \geq \frac{\varphi_c^2 - \varphi_1^2}{2} \times \frac{(\varphi_1 + \varphi_2)^2}{4\varphi_1^2}$
 $\frac{\eta I_i}{\Delta} \geq \frac{n_1}{\Delta} \times \frac{\varphi_c^2 - \varphi_1^2}{2} \times \frac{(\varphi_1 + \varphi_2)^2}{4\varphi_1^2} = \frac{2}{\varphi_c^2} \times \frac{\varphi_c^2 - \varphi_1^2}{2} \times \frac{(\varphi_1 + \varphi_2)^2}{4\varphi_1^2} = \left(1 - \frac{\varphi_1^2}{\varphi_c^2}\right) \times \frac{1}{4} \times \left(1 + \frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)^2 > \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\varphi_1^2}{\varphi_c^2}\right)$

La valeur minimale (égalité) correspond au cas de l'angle limite pour φ_1

et alors $\varphi_2 = 0$ $\left(\frac{\eta I_i}{\Delta}\right)_{\min} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\varphi_1^2}{\varphi_c^2}\right)$

$\nearrow 0,23$ pour $\frac{\varphi_1}{\varphi_c} = \frac{1}{4}$
 $\rightarrow 0,22$ pour $\frac{\varphi_1}{\varphi_c} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$
 $\searrow 0,125$ pour $\frac{\varphi_1}{\varphi_c} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

II.2.3 $n_2 = n_1 - \Delta + \eta I_i \cdot \frac{4\varphi_1^2}{(\varphi_1 + \varphi_2)^2}$; $n_2 = n_1 - \Delta + \eta I_i (1+r)^2$ (pour la question suivante...)

II.2.4 Il faut regarder la relation demandée et voir qu'elle revient à écrire

$n_2 \dots \eta I_i (1+r)^2 = n_2 - n_1 + \Delta$ et $n_2 = \frac{n_1 \sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{n_1 \cos\varphi_1}{\cos\varphi_2} = n_1 \frac{1 - \varphi_1^2/2}{1 - \varphi_2^2/2}$

D'où $\eta I_i (1+r)^2 = n_1 \frac{1 - \varphi_1^2/2}{1 - \varphi_2^2/2} - n_1 + \Delta = n_1 \frac{\varphi_2^2/2 - \varphi_1^2/2}{1 - \varphi_2^2/2} + \Delta$
 $\uparrow$
négligeable

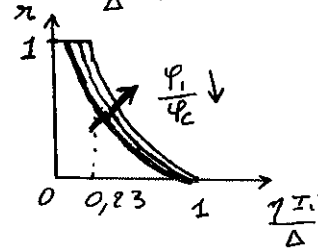
Enfin: $\frac{\eta I_i (1+r)^2}{\Delta} = 1 - \frac{\varphi_1^2 - \varphi_2^2}{2} \times \frac{n_1}{\Delta} = 1 - \frac{\varphi_1^2 - \varphi_2^2}{\varphi_c^2} = 1 - \frac{\varphi_1^2}{\varphi_c^2} \left[1 - \frac{\varphi_2^2}{\varphi_1^2} \right]$

On termine en sortant $\frac{\varphi_2}{\varphi_1}$ de $r = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2}$: $\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{1-r}{1+r}$ puis $\left(1 - \frac{\varphi_2^2}{\varphi_1^2} \right) = \frac{(1+r)^2 - (1-r)^2}{(1+r)^2}$

Finalement $\frac{\eta I_i (1+r)^2}{\Delta} = 1 - \frac{\varphi_1^2}{\varphi_c^2} \times \frac{4r}{(1+r)^2}$ et la relation demandée...

II. 2.5 Pour $r=0$, $\frac{\eta I_i}{\Delta} = 1$. Pour $r=1$, $\frac{\eta I_i}{\Delta}$ prend les valeurs du tableau:

$\frac{\varphi_1}{\varphi_c}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{\eta I_i}{\Delta}$	0,23	0,22	0,12



II. 2.6 Pour $r=0$ (il n'y a pas d'onde réfléchi), $\frac{\eta I_i}{\Delta} = 1$, $\varphi_2 = \varphi_1$, $I_t = I_i$ et $n_2 = n_1$. Les deux milieux ont le même indice; il est normal qu'il n'y ait pas de réflexion.

II. 3.1. $\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{cT} = \frac{2\pi}{\lambda}$; $\beta^{-1} = \frac{\lambda}{2\pi} \times \frac{1}{\sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_2^2}} = 2,70 \mu\text{m}$

II. 3.2. On utilise la relation donnée par l'énoncé: $\frac{I_t}{I_i} = \left(\frac{E_t}{E_i^0} \right)^2 = \frac{4n_1^2 \sin^2 \varphi_1}{n_1^2 - n_2^2}$
On fait un développement à l'ordre le plus bas:

$$\sin^2 \varphi_1 \simeq \varphi_1^2$$

$$n_1^2 - n_2^2 = n_1^2 - (n_1 - \Delta + \eta I_t)^2 = \underbrace{n_1^2 - n_1^2}_{=0} - 2n_1(-\Delta + \eta I_t) - \underbrace{(-\Delta + \eta I_t)^2}_{\text{ordre supérieur}}$$

$$\simeq 2n_1(-\Delta + \eta I_t)$$

D'où $I_t \cdot 2n_1(-\Delta + \eta I_t) \simeq -I_i \cdot 4n_1^2 \varphi_1^2$

qui s'écrit $\eta I_t^2 - \Delta I_t \simeq -2n_1 \varphi_1^2 I_i$ donc $I_t^2 - \frac{\Delta I_t}{\eta} + \frac{2n_1 \varphi_1^2 I_i}{\eta} = 0$

II. 3.3 Cette équation du 2^e degré en I_t n'admet de solution que si son discriminant est positif, donc si

$$\Delta^2 - 4 \cdot \eta \cdot 2n_1 \varphi_1^2 I_i \geq 0 \quad \text{donc si} \quad I_i \leq \frac{\Delta^2}{\eta 8 n_1 \varphi_1^2} = \frac{1}{16\eta} \left(\frac{\varphi_c}{\varphi_1} \right)^2 = I_i^c$$

Si $I_i > I_i^c$, I_t est trop intense pour avoir $n_2 < n_1$; il n'y a pas réflexion totale (ni onde évanescente), mais transmission "ordinaire".

II. 3.4. Qu'est ici r ? Quand on détaille la détermination de l'onde évanescente, on est amené à utiliser la notation complexe et à introduire r et t complexes...

Il faut donc trouver autre chose; définissons les coefficients de réflexion et de transmission en intensité R et T par: $T = \frac{I_t}{I_i}$ et

$R = 1 - T$ ("conservation de l'énergie"), puis $x = \sqrt{R} \dots (?)$. 7/8

Posons aussi $x = \frac{\eta I_i}{\Delta}$. I_t est alors solution de l'équation:

$$I_t^2 - \frac{\Delta}{\eta} I_t + I_i \frac{4 \frac{\varphi_i^2}{\varphi_c^2} \cdot \frac{\Delta}{\eta}}{\varphi_c^2} = 0 \quad \text{d'où} \quad x T^2 - T + \frac{4 \varphi_i^2}{\varphi_c^2} = 0$$

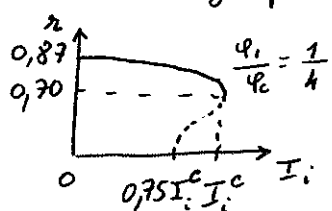
Dans le cas $\frac{\varphi_i}{\varphi_c} = \frac{1}{4}$, T est solution de $4x T^2 - 4T + 1 = 0$

On retrouve la condition II.3.3 avec $x < 1$ pour que le discriminant soit positif: $T = \frac{1 \pm \sqrt{1-x}}{2x}$

La solution $\oplus$, $T = \frac{1 + \sqrt{1-x}}{2x}$ est inacceptable pour I_i (donc x) croissant à partir de 0 (T diverge).

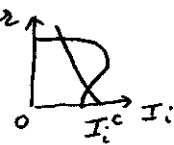
Pour $x \ll 1$, la solution $\ominus$ devient: $T = \frac{1 - \sqrt{1-x}}{2x} \approx \frac{1 - (1 - \frac{x}{2})}{2x} = \frac{1}{4} = 0,25$ (et alors $x = \sqrt{1-T} = 0,87$). Pour $x = 1$, $T = \frac{1}{2}$ et $x = 0,70$.

Pour I_i croissant de 0 à I_i^c , donc x croissant de 0 à 1, on obtient donc le graphe ci-dessous (trait plein; points noirs de la figure 6)



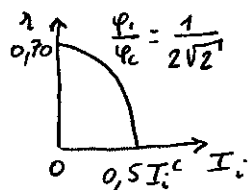
Pour I_i décroissant, la solution $\oplus$ est acceptable tant que $T \leq 1$, donc $x \geq \frac{3}{4}$ (trait pointillé)

On peut lui adjoindre le graphe II.2.5



Pour $\frac{\varphi_i}{\varphi_c} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, T est solution de $2x T^2 - 2T + 1 = 0$

Il faut (discriminant positif) $x < \frac{1}{2}$ (donc $I_i < 0,5 I_i^c$). La solution $\oplus$ est impossible ($T > 1 \forall x < \frac{1}{2}$). La solution $\ominus$, $T = \frac{1 - \sqrt{1-2x}}{2x}$ est possible pour I_i croissant ($x(0) = 0,70$; $x(\frac{1}{2}) = 0$) de 0 à $0,5 I_i^c$



Pour $\frac{\varphi_i}{\varphi_c} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, T est solution de $x T^2 - T + 2 = 0$, mais toutes les solutions ($\oplus$ et $\ominus$), qui n'existent que pour $x < \frac{1}{8}$, sont toutes supérieures à 1. La situation proposée est impossible.

II.3.5. $I_i^c = \frac{1}{16} \times \frac{1 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{-14}} \times 16 = 3,3 \cdot 10^{10} \text{ W cm}^{-2}$, obtenue avec des lasers à impulsion.

II.3.6. On réunit les 2 branches étudiées en II.3.4 et la branche II.2.5.

Pour $I_i = 0$, $r = 0,87$; $I_i \uparrow$; le point représentatif suit la branche $\ominus$ jusqu'à I_i^c . Puis $I_i \downarrow$, le point représentatif suit la branche $\oplus$ puis la branche de "transmission usuelle" étudiée en II.2.5

On reconnaît le phénomène d'hystérésis; on reconnaît la figure 6 avec "changement de branche" pour les "cercles ouverts" (aux environs de $I = 15$ u.a.), mais avec $\sqrt{R}$ au lieu de R ... (pourquoi? bof...)

Les milieux optiquement non linéaires sont utilisés pour les fenêtres de sortie des lasers; lorsque l'intensité piégée dans la cavité résonante (I_i) est suffisante, le coefficient de réflexion chute et l'onde sort. L'effet d'hystérésis (ici: R est plus faible lorsque l'intensité diminue que lorsqu'elle augmente) permet de laisser sortir l'onde même lorsque I_i diminue dans la cavité (du fait de la sortie...).

