

I Propagation des ondes électromagnétiques

A Propagation dans une ligne coaxiale sans pertes

1. Dans le vide, loin des charges et courants :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{E}) &= 0 & \operatorname{rot}(\vec{E}) &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div}(\vec{B}) &= 0 & \operatorname{rot}(\vec{B}) &= +\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

D'où l'on déduit $\vec{\Delta} \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$.

En remplaçant $\vec{E}$ par l'expression proposée, on obtient :

$$k^2 = \epsilon_0 \mu_0 \omega^2$$

2. Dans les conducteurs parfaits, les champs magnétique et électrique variables dans le temps sont nuls en tout points, car l'épaisseur de peau y est nulle. Le champ magnétique proposé est orthoradial, donc sa composante normale aux deux conducteurs est nulle, ce qui respecte la condition de passage de part et d'autre d'une surface de discontinuité $\Delta \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_{surf} \wedge \vec{n}_{1-2}$.

Le champ électrique proposé est normal aux surfaces de conducteurs, donc sa composante tangentielle est nulle, ce qui respecte la condition de continuité de la composante tangentielle de $\vec{E}$ au passage d'une surface de discontinuité.

Le flux du champ électrique sortant du cylindre est indépendants du rayon du cylindre. Il est égal à la charge portée par le cylindre conducteur intérieur sur la hauteur H de cylindre choisie.

La circulation du champ magnétique sur un cercle de rayon r ne dépend pas de r , elle est donc proportionnelle au courant qui passe dans le conducteur central.

Les théorèmes de Gauss et d'Ampère sont vérifiés, ils permettent de déduire à la cote z la charge linéique portée par le conducteur, ainsi que le courant.

3. Le théorème d'Ampère appliqué sur le cercle centré sur Oz , de rayon r :

$\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i(z, t)$ permet de calculer $i(z, t)$:

$$\begin{aligned} i(z, t) &= \frac{1}{\mu_0} \int \vec{B}(r, z, t) \cdot r d\theta \vec{e}_\theta \\ i(z, t) &= \frac{1}{\mu_0} \int \vec{e}_\theta \cdot \frac{E_0}{c} \frac{r_0}{r} \cdot e^{j(\omega t - kz)} \cdot r d\theta \vec{e}_\theta \\ i(z, t) &= \frac{2\pi E_0 r_0}{c \mu_0} \cdot e^{j(\omega t - kz)}. \end{aligned}$$

On en déduit donc $\alpha = 2\pi \frac{r_0}{c \cdot \mu_0}$

D'après la dépendance en z et t de la tension et du courant en $t - \frac{z}{c}$, on déduit $\underline{i}(z, t)$ et $\underline{u}(z, t)$ vérifient l'équation de D'Alembert :

$$\frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial z^2}$$

- 4.

$$\begin{aligned} i(z, t) - i(z + dz, t) &= \Gamma dz \frac{\partial u(z + dz, t)}{\partial t} \quad \text{et} \quad u(z, t) - u(z + dz, t) = \Lambda dz \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} \\ -\frac{\partial i(z, t)}{\partial z} &= \Gamma \frac{\partial u(z, t)}{\partial t} \quad \text{et} \quad -\frac{\partial u(z, t)}{\partial z} = \Lambda \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

Soit :

$$\frac{\partial^2 i(z, t)}{\partial z^2} = \Gamma \Lambda \frac{\partial^2 i(z, t)}{\partial t^2}$$

On identifie ainsi une première relation entre Γ , Λ , ϵ_0 et μ_0 :

$$\Gamma \Lambda = \frac{1}{c^2} \text{ soit } \Gamma \cdot \Lambda = \epsilon_0 \mu_0$$

Une autre relation provient de l'expression de l'impédance caractéristique du milieu donnée par l'énoncé :

$Z_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$, qu'on peut aussi exprimer en fonction de Γ et Λ :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \underline{i}(z, t)}{\partial z} &= \Gamma \frac{\partial \underline{u}(z, t)}{\partial t} \\ +jk\underline{i}(z, t) &= \Gamma j\omega \underline{u}(z, t) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{c\Gamma} = \frac{\underline{u}(z, t)}{\underline{i}(z, t)}$$

Finalement $Z_c = \frac{1}{c\Gamma}$

On en déduit : $\Gamma = \epsilon_0$ et $\Lambda = \mu_0$.

5. **Erreur d'énoncé : il s'agit de l'abscisse z .** La puissance reçue par le câble situé au-delà de z est $p_{EM}(z, t) = u(z, t) \cdot i(z, t)$ où u et i sont les grandeurs réelles.

Comme $i(z, t) = \sqrt{2}I_0 \cos(\omega t - kz)$ donc $p_{EM}(z, t) = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} i(z, t) \cdot i(z, t)$,

alors $p_{EM}(z, t) = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} 2I_0^2 \cos^2(\omega t - kz)$.

En valeur moyenne temporelle : $P_{EM} = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} I_0^2$

La puissance transmise est transmise vers les z croissants.

6. L'énergie contenue dans la tranche dz est $\delta W_{EM} = \frac{1}{2} \Lambda dz (i(z, t))^2 + \frac{1}{2} \Gamma dz (u(z, t))^2$.

Comme $\frac{u}{i} = Z_c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$, $\delta W_{EM} = \Lambda dz (i(z, t))^2$ donc en valeur moyenne, par unité de longueur :

$$w_{EM} = \Lambda I_0^2$$

La grandeur $\frac{P_{EM}}{w_{EM}} = \frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}$ représente la vitesse de propagation de l'énergie, ici, elle est égale à la vitesse de propagation de l'onde.

7. Les lois des noeuds et des mailles :

$$\begin{aligned} u_{n-1} - u_n &= L \frac{di_{n-1}}{dt} \\ u_n - u_{n+1} &= L \frac{di_n}{dt} \\ i_{n-1} - i_n &= C \frac{du_n}{dt} \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned} u_{n-1} + u_{n+1} - 2u_n &= L \frac{d(i_{n-1} - i_n)}{dt} \\ u_{n-1} + u_{n+1} - 2u_n &= LC \frac{d^2 u_n}{dt^2} \end{aligned}$$

En remplaçant u_n par l'expression proposée, il vient :

$$U_0 e^{j(\omega t - k(n-1)a)} + U_0 e^{j(\omega t - k(n+1)a)} - 2U_0 e^{j(\omega t - kna)} = LC(j\omega)^2 U_0 e^{j(\omega t - kna)}$$

Soit en simplifiant par $U_0 e^{j(\omega t - kna)}$:

$$\begin{aligned} e^{jka} + e^{-jka} - 2 &= -LC\omega^2 \\ 2\cos(ka) - 2 &= -LC\omega^2 \\ -4\sin^2(ka) &= -LC\omega^2 \end{aligned}$$

Finalement :

$$\sin^2\left(\frac{ka}{2}\right) = \frac{LC}{4} \omega^2$$

Pour retrouver les solutions identiques à celles de la ligne à constantes réparties, il faut pouvoir linéariser le sinus, donc cela est possible dans l'approximation des petits angles $ka/2 < 0,1$ car alors :

$$\sin\left(\frac{ka}{2}\right) = \sqrt{\frac{LC\omega^2}{4}}$$

$$\frac{k}{\omega} = \sqrt{\frac{L}{a} \frac{C}{a}}$$

$$\frac{k}{\omega} = \sqrt{\Lambda\Gamma}$$

La condition $ka/2 < 0,1$ des petits angles entraîne $\frac{2\pi}{\lambda}a/2 < 0,1$ soit $\lambda \gg a$, la longueur d'onde de l'onde que l'on étudie doit être bien supérieure aux discontinuités du milieu.

8. Pour des composants de l'ordre du centimètre, les ondes qui peuvent se propager sans dispersion notable ont une longueur d'onde de l'ordre du mètre $\lambda \simeq 1 \text{ m}$, or $\lambda = c/f$ soit une fréquence inférieure à 300 MHz , domaine radio. Pour des composants de dix microns, la fréquence est de l'ordre de 3.10^{13} Hz , ce qui est l'ordre des fréquences optiques.

B Atténuation et amplification des ondes électromagnétiques

9. **Erreur d'énoncé : il faut lire $dG = \gamma dz$ et non $dG = \gamma dx$.** Établissons la nouvelle équations aux dérivées partielles vérifiée par $u(z, t)$ ou $i(z, t)$.

$$-\frac{\partial i(z, t)}{\partial z} = \Gamma \frac{\partial u(z, t)}{\partial t} + \gamma u(z, t)$$

$$-\frac{\partial u(z, t)}{\partial z} = \Lambda \frac{\partial i(z, t)}{\partial t}$$

Il vient :

$$\frac{\partial^2 i(z, t)}{\partial z^2} = \Gamma \Lambda \frac{\partial^2 i(z, t)}{\partial t^2} + \gamma \Lambda \frac{\partial i(z, t)}{\partial t}$$

L'équation de dispersion est alors :

$$k^2 = \Gamma \Lambda \omega^2 - j\omega \gamma \Lambda$$

k est donc complexe. Soit $k = k_1 + jk_2$ avec k_1 et k_2 réels, alors $k^2 = (k_1^2 - k_2^2) + j(2k_1 k_2)$. Comme on s'intéresse aux ondes qui se propagent vers les z croissants, k_1 est positif, l'identification des parties imaginaires des deux expressions de k^2 , soit $2k_1 k_2 = -\omega \gamma \Lambda$ entraîne que $k_2 < 0$, alors $e^{j(\omega t - (k_1 + jk_2)z)}$ s'écrit :

$$e^{k_2 z} e^{j(\omega t - k_1 z)}$$

est bien une onde qui s'atténue en progressant vers z croissant.

Par ailleurs, dans le cas d'une ligne coaxiale, on peut considérer que la conductance placée en parallèle sur le condensateur est un terme correctif, ce qui permet de considérer que $\omega \gamma \Lambda \ll \Gamma \Lambda \omega^2$, alors en effectuant un développement limité en $\frac{\gamma}{\Gamma \omega}$, il vient :

$k = \sqrt{\Gamma \Lambda} \omega (1 - j \frac{\gamma}{2\Gamma \omega})$, on voit alors que l'onde progressive vers les z croissants s'atténue si γ est positif, car alors $\underline{u}(z, t) = U_0 e^{-\frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} z} e^{j(\omega t - \sqrt{\Gamma \Lambda} \omega z)}$.

10. **Erreur d'énoncé : l'expression proposée pour $\underline{u}_n(t)$ dépend de z . L'énoncé introduit donc une confusion entre modèle discret et modèle continu. Il faudrait avoir $\underline{u}_n(t) = U_0 e^{\frac{\gamma a}{2c} e^{j(\omega t - k n a)}}$.**

Le montage à amplificateur opérationnel réalise une résistance négative, de sorte que le courant qui traverse la branche en parallèle du condensateur dans le sens haut vers bas est $i_e = -\frac{u_{n+1}}{R}$.

Alors l'équation qui relie u_{n-1} , u_{n+1} et u_n est :

$$u_n - u_{n+1} = L \frac{di_n}{dt}$$

$$i_n - i_{n+1} = C \frac{du_{n+1}}{dt} - \frac{1}{R} u_{n+1}$$

$$u_n + u_{n+2} - 2u_{n+1} = L \frac{d(i_n - i_{n+1})}{dt}$$

$$u_n + u_{n+2} - 2u_{n+1} = LC \frac{d^2 u_{n+1}}{dt^2} - \frac{L}{R} \frac{du_{n+1}}{dt}$$

La nouvelle équation de dispersion est

$$4.\sin^2\left(\frac{ka}{2}\right) = LC\omega^2 + j\omega\frac{L}{R}$$

Soit, puisque la condition des petits angles est vérifiée,

$$4.\left(\frac{ka}{2}\right)^2 = LC\omega^2 + j\omega\frac{L}{Ra^2}$$

Soit $k = k_1 + jk_2$ le nombre d'onde de l'onde qui progresse vers les z croissants. avec k_1 et k_2 réels. L'onde étudiée progresse vers les z croissants, donc $k_1 > 0$, alors comme $k^2 = k_1^2 - k_2^2 + 2jk_1k_2$ on identifie $k_1k_2 = \omega\frac{L}{R} > 0$, donc $k_2 > 0$, l'onde est bien amplifiée.

11. On utilise des amplificateurs d'ondes dans les fibres optiques. On peut aussi citer l'effet laser qui est une amplification optique.

12. **Énoncé : Il faut comprendre : Établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la tension.** Pour passer d'un milieu discret à un modèle continu, il suffit de remplacer les composants de la cellule élémentaire discrète par les composants de la cellule élémentaire continue. Soit :

C à remplacer par $dC = \frac{C}{a}dz = \Gamma dz$ d'où $\Gamma = \frac{C}{a}$

L à remplacer par $dL = \frac{L}{a}dz = \Lambda dz$ d'où $\Lambda = \frac{L}{a}$

G à remplacer par $dG = \frac{1}{Ra}dz$ d'où $\gamma = -\frac{1}{Ra}$. Ici la résistance est négative à cause de l'amplificateur opérationnel.

On peut reprendre directement le résultat de la question 9), l'équation différentielle est alors :

$$\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} = \Gamma\Lambda \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2} + \gamma\Lambda \frac{\partial u(z,t)}{\partial t}$$

Soit, en utilisant $l_c = -\frac{2}{\gamma}\sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}}$ et $c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}$, comme on remarque que $cl_c = -\frac{2}{\gamma}\sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}}\frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}} = -\frac{2}{\gamma\Lambda}$,

Finalement :

$$\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2} - \frac{2}{l_cc} \frac{\partial u(z,t)}{\partial t}$$

13. Cherchons σ tel que $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ soit la relation constitutive du milieu qui permette d'établir que le champ électrique vérifie la même équation différentielle que la tension.

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad \text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Les équations vérifiées par u et E sont identiques à condition que $\sigma = -\frac{2}{cl_c\mu_0}$.

C Réalisation d'un milieu paradoxal

14. La situation est la même qu'à la question 7) à condition de remplacer L par $-L$ et C par $-C$, en effet les amplificateurs opérationnels sont disposés de sorte que le courant qui passe dans la bobine soit $-i_n$ selon le sens de Oz , et le courant qui descend dans le condensateur est $i_{n+1} - i_n$. Les calculs mèneront donc à la même équation différentielle, et la solution progressive proposée peut bien se propager vers les z croissants.
15. La condition qui permet d'utiliser le modèle de ligne à constante répartie est à nouveau $\lambda \gg a$.

$$\Lambda = \frac{L}{a} \text{ et } \Gamma = \frac{C}{a}$$

16. L'impédance caractéristique de la ligne est désormais $Z_c = -\frac{1}{\Gamma C}$.

La puissance transmise à l'abscisse z est en valeur instantanée $p_{EM}(z,t) = u(z,t)i(z,t)$ donc $p_{EM}(z,t) = Z_c i^2(z,t)$.

Finalement en valeur moyenne $P_{EM} = -\frac{1}{\Gamma C} I_0^2$. La puissance est donc effectivement transmise de droite à gauche.

17. Au I.A.4) on avait établi $\Lambda = \mu_0$ et $\Gamma = \epsilon_0$, on constate qu'en changeant ϵ_0 en $-\epsilon_0$ et μ_0 en $-\mu_0$ on transforme Λ et Γ en leurs opposés.

18. La vitesse de phase est dirigée vers les z croissants, car la phase est $\omega(t - \frac{z}{c})$, alors que la puissance est transmise vers les z décroissants, en effet, on peut exprimer le vecteur de Poynting dans ce milieu :

$$\begin{aligned}\vec{\Pi} &= \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{-\mu_0} \\ &= \left(\frac{E_0 r_0}{r}\right)^2 \frac{\cos^2(\omega t - kz)}{-c\mu_0} \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta \\ &= \left(\frac{E_0 r_0}{r}\right)^2 \frac{\cos^2(\omega t - kz)}{-c\mu_0} \vec{u}_z\end{aligned}$$

II Diffusion thermique

A Modèle électrique de la diffusion thermique

19. Le bilan d'énergie dans la tranche de longueur dz entre t et $t + dt$ s'écrit :

$$\begin{aligned}P_{th}(z, t) - P_{th}(z + dz, t) &= \Sigma c_{th} dz (T(z, t + dt) - T(z, t)) \\ -dz \frac{\partial P_{th}}{\partial z} &= \Sigma c_{th} dz \frac{\partial T}{\partial t}\end{aligned}$$

$$\text{Soit : } -\frac{\partial P_{th}}{\partial z} = \Sigma c_{th} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Avec la loi de Fourier, $j_{th} = -K \frac{\partial T}{\partial z}$, on en déduit :

$$\begin{aligned}-\frac{\partial \Sigma j_{th}}{\partial z} &= \Sigma c_{th} \frac{\partial T}{\partial t} \\ \Sigma K \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} &= \Sigma c_{th} \frac{\partial T}{\partial t}\end{aligned}$$

$$\text{Soit : } K \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = c_{th} \frac{\partial T}{\partial t}$$

20. Loi des mailles : $T(z, t) - T(z + dz, t) = dR_{th} P_{th}(z, t)$
 Loi des noeuds : $P_{th}(z, t) - P_{th}(z + dz, t) = dC_{th} \frac{\partial T(z+dz, t)}{\partial t}$
 Soit, en simplifiant par dz :

$$\begin{aligned}-\frac{\partial T}{\partial z} &= \frac{1}{K\Sigma} P_{th}(z, t) \\ -\frac{\partial P_{th}}{\partial z} &= \Sigma c_{th} \frac{\partial T(z + dz)}{\partial t}\end{aligned}$$

$$\text{Soit : } \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{Kc_{th}} \frac{\partial T}{\partial t}$$

21. On peut utiliser une modélisation discrète du problème thermique à condition que la longueur typique du phénomène soit très supérieure à la longueur a . L'équation différentielle permet d'identifier la longueur typique l_c d'un phénomène de fréquence f : $\frac{K}{l_c^2} = c_{th} f$, donc plus la fréquence est grande, plus la longueur caractéristique est faible, donc la condition sera que la longueur caractéristique minimale soit supérieure à a : $l_{cmin} = \sqrt{\frac{K}{c_{th} f_{max}}} > a$
 $R_{th} = \frac{a}{K\Sigma}$ et $C_{th} = a\Sigma c_{th}$

B Effet thermique en haute fréquence

22. Ici, je ne sais pas de quoi on parle. La température $T_{in}(t)$ n'est pas définie concrètement, en quel point physique serait elle mesurable!! C'est un tube de quoi? de circuits intégrés?

On refait les mêmes calculs que précédemment :

$$\begin{aligned}T_n - T_{n+1} &= L_{th} \frac{dP_{th,n}}{dt} + R_{th} P_{th,n} \\T_{n+1} - T_{n+2} &= L_{th} \frac{dP_{th,n+1}}{dt} + R_{th} P_{th,n+1} \\P_{th,n} - P_{th,n+1} &= C_{th} \frac{dT_{n+1}}{dt}\end{aligned}$$

$$\text{Soit : } T_n + T_{n+2} - 2T_{n+1} = L_{th} C_{th} \frac{d^2 T_{n+1}}{dt^2} + R_{th} C_{th} \frac{dT_{n+1}}{dt}$$

L'équation différentielle s'en déduit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \Lambda_{th} \Gamma_{th} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + r_{th} \Gamma_{th} \frac{\partial T}{\partial t}$$

où $\Gamma_{th} = \frac{C_{th}}{a}$, $\Lambda_{th} = \frac{L_{th}}{a}$ et $r_{th} = \frac{R_{th}}{a}$.

23. On peut établir l'équation de la chaleur à partir de l'équation de conservation de l'énergie et la nouvelle forme proposée pour l'équation de Fourier :

$$\begin{aligned}-\frac{\partial P_{th}}{\partial z} &= \Sigma c_{th} \frac{\partial T}{\partial t} \\j_{th} + \tau \frac{\partial j_{th}}{\partial t} &= -K \frac{\partial T}{\partial z}\end{aligned}$$

$$\text{Soit : } \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{c_{th}}{K} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\tau c_{th}}{K} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}$$

Il s'agit bien de la même équation différentielle qu'à la question précédente.

24. **Je ne vois pas comment répondre à la question, car je ne comprends pas de quoi il s'agit. Faut il considérer encore le tube de la question 19) ???**

Il y aurait une puissance perdue par rayonnement ?

III Machine frigorifique

A La représentation de la machine frigorifique

25. Les deux relations sont pour la première l'écriture du premier principe pour les transformations cycliques de la machine pendant une unité de temps, pour la deuxième, la relation de Clausius, par unité de temps.

26. **Il me semble qu'il y a une erreur dans la définition de $P_{thc} = (T'_C - T_C)/R_0$ et donc de R_0 , en effet, je pense que $T'_C > T_C$ et $T_F > T'_F$. Je change ces relations pour la suite**

Comme $T_F > T'_F$ et $T'_C > T_C$, alors $T'_C - T'_F > T_C - T_F$ soit $\Delta T_0 > T_C - T_F$.

27. L'efficacité de la machine peut être définie comme $\eta = \frac{\text{Puissance Extraite De La Source Froide}}{\text{Puissance Mécanique Recue}} = \frac{P_{thF}}{P_W}$. Celle-ci est maximale lorsque le fonctionnement est réversible. L'inégalité de Clausius est alors remplacée par une égalité, $\frac{P_{thF}}{T_F} = \frac{P_{thC}}{T_C}$.

On en déduit, alors, avec le premier principe : $P_{thF}(1 - \frac{T_C}{T_F}) + P_W = 0$, puis $\eta = \frac{T_F}{T_C - T_F}$. Dans ce cas, $\Delta T_0 = T_C - T_F$ puisque le fonctionnement réversible n'est possible que s'il n'y a pas de phénomène de diffusion, donc $R_0 = 0$.

$P_{thF} = P_W \frac{T_F}{\Delta T_0}$. La puissance extraite de la source froide est d'autant plus grande que l'écart de température entre T_C et T_F est petit.

28. **Je ne sais pas quoi répondre.**

Une machine petite et rapide, mais à P_W donné, entraîne à chaque cycle un échange faible.

29. **La relation est fautive, car $T'_C = T_C + P_{thC} R_0$ et $T'_F = T_F - P_{thF} R_0$** La relation proposée est la relation de Clausius pour la machine frigorifique réversible. $\frac{P_{thF}}{T_F} = \frac{P_{thC}}{T_C}$.

30. A partir de :

$$\frac{P_{thF}}{P_{thC}} = \frac{T_F - P_{thF} R_0}{T_C + P_{thC} R_0} \quad \text{et} \quad P_{thF} - P_{thC} + P_W = 0$$

On établit :

$$\frac{P_W}{P_{thF}} = \frac{\theta}{1-\beta} - 1$$

Alors, avec $T'_C = T_C + P_{thC}R_0$ et $T'_F = T_F - P_{thF}R_0$ On établit :

$$\frac{\Delta T_0}{T_F} = \theta - 1 + \frac{\beta}{2} \left(\frac{\theta}{1-\beta} + 1 \right)$$

Et numériquement : $\frac{P_W}{P_{thF}} = 0,33$ et $\frac{\Delta T_0}{T_F} = 0,32$.

31. L'efficacité maximale trouvée est $\eta = \frac{1}{\theta-1} = 5$, alors que l'efficacité de la machine globale est $\eta = 3...$

Si on ne modifie pas l'erreur sur les définitions de R_0 on trouve une efficacité de carnot inférieure à l'efficacité de la machine

B Réalisation de micromachines thermiques

32. Je ne vois pas la définition de $\Delta T_{L0} dz$, je considère que c'est l'équivalent de $T'_C - T'_F$ pour la micromachine.

La loi des noeuds s'écrit ici,

$$P_{th}(z) - P_{th}(z+dz) = -P_{LW}(z)dz$$

Soit :

$$\frac{dP_{th}}{dz} = P_{LW}(z)$$

33. En appliquant la somme des tensions aux bornes de l'association série de résistances et de la source de tension, on obtient :

$$\frac{dT}{dz} = -2\frac{R_0}{d}P_{th}(z) + \Delta T_{L0}$$

34. On a $T'_F = T(z) - \frac{R_0}{d}dzP_{th}(z)$ et $T'_C = T(z+dz) + \frac{R_0}{d}dzP_{th}(z+dz)$

Et le deuxième principe de la thermodynamique s'écrit : $\frac{P_{th}(z)}{T'_F} = \frac{P_{th}(z+dz)}{T'_C}$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{P_{th}(z)}{T(z) - \frac{R_0}{d}dzP_{th}(z)} &= \frac{P_{th}(z+dz)}{T(z+dz) + \frac{R_0}{d}dzP_{th}(z+dz)} \\ P_{th}(z)(T(z+dz) + \frac{R_0}{d}dzP_{th}(z+dz)) &= P_{th}(z+dz)(T(z) - \frac{R_0}{d}dzP_{th}(z)) \\ P_{th}(z)T(z+dz) - P_{th}(z+dz)T(z) &= -2\frac{R_0}{d}dzP_{th}(z+dz)P_{th}(z) \\ \frac{P_{th}(z)}{T(z)} - \frac{P_{th}(z+dz)}{T(z+dz)} &= -2\frac{R_0}{d}dz \frac{P_{th}(z+dz)P_{th}(z)}{T(z+dz)T(z)} \end{aligned}$$

$$\text{Soit : } -\frac{d}{dz} \left(\frac{P_{th}(z)}{T(z)} \right) = -2\frac{R_0}{d} \left(\frac{P_{th}(z)}{T(z)} \right)^2$$

35. D'après la relation précédente, Si on pose $X(z) = \frac{P_{th}(z)}{T(z)}$, l'équation différentielle s'écrit : $\frac{dX}{dz} = 2\frac{R_0}{d}X^2$.

L'intégration de cette relation entre $z=0$ et z conduit à :

$$-\frac{1}{X(z)} + \frac{1}{X(0)} = 2\frac{R_0}{d}z$$

Soit :

$$\frac{T(z)}{P(z)} = \frac{T(0)}{P(0)} - 2\frac{R_0}{d}z$$

Ce qui correspond bien à la relation proposée. avec $C_1 = \frac{T(0)}{P(0)}$ et $C_2 = -2\frac{R_0}{d}$.

36. La relation précédente en $z=d$ conduit à

$$P_{thC} = \frac{T_C}{\frac{T_F}{P_{thF}} - 2\frac{R_0}{d}d}$$

Soit :

$$P_{thC} = P_{thF} \frac{\theta}{1-\beta}$$

37. D'après la question 32), on établit :

$$\begin{aligned}P'_W &= \int_0^2 P_{LW} dz \\P'_W &= \int_0^2 \frac{dP_{th}}{dz} dz \\P'_W &= P_{th}(d) - P_{th}(0) \\P'_W &= P_{thC} - P_{thF}\end{aligned}$$

Le rapport $\frac{P'_W}{P_{thF}} = \frac{\theta}{\beta-1} - 1$, on retrouve le même résultat que précédemment, dans le cas de la machine non idéale.

38. Grâce à la question 33) on peut établir l'équation différentielle vérifiée par $T(z)$, soit $\frac{dT}{dz} = -\frac{2R_0}{d} \frac{T(z)}{C_1+C_2z} + \Delta T_{L0}$, soit $\frac{dT}{dz} = C_2 \frac{T(z)}{C_1+C_2z} + \Delta T_{L0}$. L'énoncé indique que ΔT_{L0} est uniforme, donc indépendant de z , on peut résoudre l'équation par la méthode de la variation de la constante :

Solution de l'équation homogène $\frac{dT}{dz} - C_2 \frac{T(z)}{C_1+C_2z} = 0$:

$$T(z) = B(z)(C_1 + C_2z)$$

Dans l'équation avec second membre :

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dz} &= C_2 \frac{T(z)}{C_1 + C_2z} + \Delta T_{L0} \\ \frac{dB}{dz}(C_1 + C_2z) + B(z)C_2 &= C_2 \frac{B(z)(C_1 + C_2z)}{C_1 + C_2z} + \Delta T_{L0} \\ \frac{dB}{dz}(C_1 + C_2z) &= \Delta T_{L0} \\ \frac{dB}{dz} &= \frac{\Delta T_{L0}}{(C_1 + C_2z)} \\ B(z) &= \frac{\Delta T_{L0}}{C_2} \ln(C_1 + C_2z) + A\end{aligned}$$

Il reste à calculer la constante d'intégration. A $z = 0$, $T = T_F$, on en déduit :

$$\begin{aligned}T_F &= \left(\frac{\Delta T_{L0}}{C_2} \ln(C_1) + A\right)C_1 \\ A &= \frac{T_F}{C_1} - \frac{\Delta T_{L0}}{C_2} \ln(C_1)\end{aligned}$$

Soit :

$$T(z) = (C_1 + C_2z)\left(\frac{T_F}{C_1} + \frac{\Delta T_{L0}}{C_2} \ln\left(\frac{C_1 + C_2z}{C_1}\right)\right)$$

Et finalement :

$$\begin{aligned}T_C &= (C_1 + C_2d)\left(\frac{T_F}{C_1} + \frac{\Delta T_{L0}}{C_2} \ln\left(\frac{C_1 + C_2d}{C_1}\right)\right) \\ \theta &= (1 - \beta)\left(1 + \frac{\Delta T_{L0}d}{-\beta T_F} \ln(1 - \beta)\right)\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta T_{L0}d}{T_F} = \frac{\beta}{\ln(1 - \beta)}\left(1 - \frac{\theta}{1 - \beta}\right)$$

39. Je ne sais pas répondre à cette question...et ne comprends pas le comportement paradoxal des machines annoncé au début...